УДК 517.946+511.37

©2010 р. Т.В. Магеровська

Львівський державний університет внутрішніх справ, Львів

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЛАДКОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТРИЧНОГО ПІДХОДУ

Праця присвячена дослідженню задачі Коші для безтипної системи двох рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами в шкалах просторів 2π-періодичних за просторовими змінними функцій. Отримано умови існування розв'язку заданої гладкості та встановлено залежність гладкості правих частин задачі від коефіцієнтів системи. Використано метричний підхід для оцінки знизу малих знаменників, які характерні для задачі Коші.

The paper is devoted to investigation of the Cauchy problem for a typeless system of two partial differential equations with constant coefficients in the scale of spaces of 2π-periodic functions of space variables. The existence conditions for given smoothness solution and the dependence the smoothness of the problem right parts of the system coefficients are established. Metric approach used to obtain the lower bounds of small denominators, which are characteristic for the Cauchy problem.

Задача Коші для різних типів диференціальних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними була і є предметом дослідження у різних аспектах багатьох авторів.

Вагомий внесок у розвиток теорії задачі Коші зробили І.Г. Петровський, А. Фрідман, І.М. Гельфанд, Г.Є. Шилов, С. Теклінд, Л.Н. Слободецький, С.Д. Ейдельман, В.О. Солонников, Ю.А. Дубинський, М.Л. Горбачук, С.Д. Івасишен, М.І. Матійчук, В.В. Городецький, В.А. Літовченко та ін.

Зокрема, у випадку рівнянь зі сталими коефіцієнтами для задачі Коші встановлено класи існування та єдиності розв'язку [1]. Ці класи є точними і не залежать від коефіцієнтів рівнянь. Якщо ж враховувати таку залежність, то можна уточнити та доповнити згадані результати. Для одного (анізотропного за порядками диференціювання) диференціального рівняння це зроблено в [2] за допомогою метричного підходу.

У даній статті результати праці [2] перенесено на випадок задачі Коші для системи двох анізотропних рівнянь із частинними похідними і сталими коефіцієнтами. Досліджено проблему малих знаменників [3, 4]

1. Основні позначення. Нехай $\mathcal{D}^p = [0,T] \times \Omega_{2\pi}^p$, де $\Omega_{2\pi}^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор просторових вектор-змінних $x = (x_1, \dots, x_p)$, t – часова (виділена) змінна, $t \in [0,T]$, $T > 0$.

Для довільної пари $(h,l) \in \mathbb{R}^2$ введемо простір $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$, що є поповненням множини скінченних тригонометричних сум $v(x) = \sum\limits_k \widehat{v}_k e^{i(k,x)}$ за нормою
$$\|v; \mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\| = \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \exp(2h\widetilde{k}^{\,l}) |\widehat{v}_k|^2 \Big)^{1/2},$$
де $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(k,x) = \sum\limits_{j=1}^p k_j x_j$, $\widetilde{k} = (1 + k_1^2 + \dots + k_p^2)^{1/2}$.

Простір $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, де $q \in \mathbb{R}$, — це поповнення множини скінченних тригонометричних сум за нормою
$$\|v; \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\| = \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{\,2q} |\widehat{v}_k|^2 \Big)^{1/2}.$$
Нехай $D = (D_1, \dots, D_p)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, $j \in \{1, \dots, p\}$. Означимо оператори $F(D)$ такою формулою:
$$F(D)v(x) = \sum_k F(k) \widehat{v}_k e^{i(k,x)},$$

де $v(x) = \sum\limits_k \widehat{v}_k e^{i(k,x)}$.

Зокрема, оператор $\widetilde{D} = \sqrt{1-\Delta}$, де $\Delta = -D_1^2 - \dots - D_p^2$ — оператор Лапласа, діє неперервно із простору $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$ у простір $\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_{2\pi}^p)$ за формулою

$$\sqrt{1-\Delta}\, v(x) = \sum_k \widetilde{k}\, \widehat{v}_k e^{i(k,x)}.$$

Простір $\mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$, де $(\Lambda, l) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, складається з функцій $u = u(t,x)$, які мають неперервні за t на відрізку $[0,T]$ норми

$$\|(1-\Delta)^{(n-j)l/2} D_t^j u(t,\cdot); \mathbf{E}_{\Lambda t,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2,$$

де $j \in \{0,1,\dots,n\}$, $D_t = \partial/\partial t$;

$$\|u; \mathbf{E}^n_{\Lambda t,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=0}^n \|\widetilde{D}^{(n-j)l} D_t^j u(t,\cdot); \mathbf{E}_{\Lambda t,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 dt.$$

Функції $u \in \mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$ мають такі властивості: $D_t^j u(t,\cdot) \in \mathbf{E}_{\Lambda\widetilde{t},l}(\Omega_{2\pi}^p)$, якщо $0<\widetilde{t}<t\le T$, $D_t^j u(0,\cdot) \in \mathbf{H}_{(n-j)l}(\Omega_{2\pi}^p)$, де $j \in \{0,1,\dots,n\}$.

Далі вважаємо, що квадрат норми в декартовому добутку просторів дорівнює сумі квадратів норм у відповідних просторах заданого декартового добутку.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу Коші для безтипної системи двох рівнянь високого порядку з частинними похідними і сталими коефіцієнтами

$$\sum_{j=0}^n a_j(D) D_t^{n-j} u = 0, \tag{1}$$

де

$$a_j(D) = \sum_{|s|\le jl} a_{js} D^s = \begin{pmatrix} a_j^{11}(D) & a_j^{12}(D) \\ a_j^{21}(D) & a_j^{22}(D) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$a_{js} = \begin{pmatrix} a_{js}^{11} & a_{js}^{12} \\ a_{js}^{21} & a_{js}^{22} \end{pmatrix},\ a_j^{j_1j_2}(D) = \sum_{|s|\le jl} a_{js}^{j_1j_2} D^s, \tag{3}$$

$a_0(D) = a_{00} = a_0 = \begin{pmatrix} a_0^{11} & a_0^{12} \\ a_0^{21} & a_0^{22} \end{pmatrix}$, $\det a_0 \ne 0$, $a_{js}^{j_1j_2} \in \mathcal{O}_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le R\}$, $l \in \mathbb{N}$ є показником анізотропності системи (1) стосовно порядків диференціювання за просторовими змінними $x_1,\dots,x_p$ і часовою змінною t.

Початкові умови задамо при $t=0$, а саме

$$D_t^j u\big|_{t=0} = \varphi_j, \quad j \in \{0,1,\dots,n-1\}, \tag{4}$$

де $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ — задані функції.

Розв'язок $u = \mathrm{col}\,(u_1, u_2)$ задачі (1), (4) шукаємо в просторі $\mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p) \times \mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$ з нормою

$$\|u; \mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p) \times \mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 = \sum_{j=1}^2 \|u_j; \mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2.$$

Число Λ залежить від коефіцієнтів $a_{js}^{j_1j_2}$ системи (1) і вибирається таким способом. Позначимо через $\tilde{a}_j(k)$ обмежену матричну послідовність $\widetilde{k}^{\,-jl} a_j(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, а саме

$$\sum_{|s|\le jl} a_{js}(k) \Big(\frac{k}{\widetilde{k}}\Big)^s \cdot \widetilde{k}^{\,|s|-jl}.$$

Очевидно, що $\tilde{a}_j^{j_1j_2}(k) = \widetilde{k}^{\,-jl} a_j^{j_1j_2}(k)$ та

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^p} |\tilde{a}_j^{j_1j_2}(k)| \le \sum_{|s|\le jl} |a_{js}^{j_1j_2}| \le C_{jl+p}^p R,$$

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^p} \|\tilde{a}_j(k)\| \le 2C_{jl+p}^p R,$$

де $\|\cdot\|$ позначає евклідову норму матриці, C_α^β — біномні коефіцієнти.

Нехай $\lambda_j(k)$ — корінь характеристичного рівняння

$$f(\lambda,k) = \det\Big(\sum_{j=0}^n \tilde{a}_j(k)\lambda^{n-j}\Big) = 0. \tag{5}$$

Впорядкувавши для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ всі $2n$ коренів многочлена f за спаданням дійсної частини $\mathrm{Re}\,\lambda_1(k) \ge \dots \ge \mathrm{Re}\,\lambda_{2n}(k)$, покладемо

$$\Lambda > \limsup_{k\in\mathbb{Z}^p} \mathrm{Re}\,\lambda_1(k). \tag{6}$$

Оскільки $f(\lambda,k)$ — визначник другого порядку, то

$$f(\lambda,k) = \Big(\sum_{j=0}^n \tilde{a}_j^{11}(k)\lambda^{n-j}\Big) \times$$

$$\times \Big(\sum_{j=0}^{n} \tilde a_j^{22}(k)\lambda^{n-j}\Big) -$$
$$- \Big(\sum_{j=0}^{n} \tilde a_j^{12}(k)\lambda^{n-j}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} \tilde a_j^{21}(k)\lambda^{n-j}\Big), \quad (7)$$

тобто

$$f(\lambda,k) = \sum_{j=0}^{2n} f_j(k)\lambda^{2n-j} =$$
$$= f_0(k)\lambda^{2n} + f_1(k)\lambda^{2n-1} + \dots + f_{2n}(k), \quad (8)$$

де

$$f_j(k) = \sum_{\alpha=0}^{j} \Big(\tilde a_{j-\alpha}^{11}(k)\tilde a_{\alpha}^{22}(k) - \tilde a_{j-\alpha}^{12}(k)\tilde a_{\alpha}^{21}(k)\Big)$$

при $0 \le j \le n$ і при $n \le j \le 2n$

$$f_j(k) = \sum_{\alpha=0}^{2n-j} \Big(\tilde a_{n-\alpha}^{11}(k)\tilde a_{j-n+\alpha}^{22}(k) - \tilde a_{n-\alpha}^{12}(k)\tilde a_{j-n+\alpha}^{21}(k)\Big),$$

зокрема $f_0(k) = \det a_0$, $f_{2n}(k) = \det \tilde a_n(k)$.

З оцінки Коші [5, с. 381] для коренів многочлена

$$|\lambda_j(k)| \le 1 + \frac{\max\big(|f_1(k)|, \dots, |f_{2n}(k)|\big)}{|\det a_0|}$$

випливає, що вони є рівномірно обмеженими за змінною k разом із коефіцієнтами многочлена $f(\lambda,k)$, тому границя Λ існує і $|\Lambda|$ обмежене тим самим числом, що й $|\lambda_j(k)|$.

3. Побудова та попереднє оцінювання розв'язку. Введемо нові невідомі функції $v^1, \dots, v^{2n}$ за формулою

$$\begin{pmatrix} v^{2j-1} \\ v^{2j} \end{pmatrix} = \widetilde D^{(n+1-j)l} D_t^{j-1} u, \ j \in \{0,1,\dots,n\},$$

а функції $\varphi^1, \dots, \varphi^{2n}$ за формулою

$$\begin{pmatrix} \varphi^{2j-1} \\ \varphi^{2j} \end{pmatrix} = \widetilde D^{(n+1-j)l} \varphi_{j-1}, \quad j \in \{0,1,\dots,n\},$$

тоді

$$D_t \begin{pmatrix} v^{2j-1} \\ v^{2j} \end{pmatrix} = \widetilde D^{l} \begin{pmatrix} v^{2j+1} \\ v^{2j+2} \end{pmatrix}, \ j \in \{0,\dots,n-1\},$$

$$D_t \begin{pmatrix} v^{2n-1} \\ v^{2n} \end{pmatrix} = -\widetilde D^{l} a_0^{-1}\big(\tilde a_n(D), \dots, \tilde a_1(D)\big)v,$$

де $v = \mathrm{col}\,(v^1, \dots, v^{2n})$.

Нехай $A_{j\cdot}(k)$ — рядок з номером j матриці $A(k)$, причому $A_{1\cdot}(k), \dots, A_{2n-2\cdot}(k)$ – рядки одиничної матриці E_{2n} з номерами $3, \dots, 2n$,

$$\begin{pmatrix} A_{2n-1\cdot}(k) \\ A_{2n\cdot}(k) \end{pmatrix} = -a_0^{-1}\big(\tilde a_n(k), \dots, \tilde a_1(k)\big),$$

а $\varphi = \mathrm{col}\,(\varphi^1, \dots, \varphi^{2n})$, тоді задачу (1), (2) можна записати так:

$$D_t v = \widetilde D^{l} A(D) v, \quad (9)$$

$$v\big|_{t=0} = \varphi. \quad (10)$$

Якщо $v(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k(t)e^{i(k,x)}$, то вектор-функції $v_k(t)$ є розв'язками задач

$$v_k' = \widetilde k^{l} A(k) v_k, \qquad v_k(0) = \varphi_k.$$

де $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_k e^{i(k,x)}$. Ці розв'язки подаються в явному вигляді

$$v_k(t) = e^{\widetilde k^{\,l} A(k) t}\varphi_k. \quad (11)$$

Для оцінювання норми $v_k(t)$ у випадку простих коренів многочлена $f(\lambda,k)$ запишемо формулу [4]

$$v_k(t) = \big(\varphi_k, A(k)\varphi_k, \dots, \big(A(k)\big)^{2n-1}\varphi_k\big) \times$$
$$\times W_k^{-\mathsf T} \begin{pmatrix} \exp\big(\widetilde k^{\,l}\lambda_1(k)t\big) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \exp\big(\widetilde k^{\,l}\lambda_{2n}(k)t\big) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

де $W_k = \big(\lambda_j^{i-1}(k)\big)_{i,j=1}^{2n}$ — матриця Вандермонда, $W_k^{-\mathsf T}$ — обернена до транспонованої матриці Вандермонда $W_k^{\mathsf T}$.

Для обчислення матриці $W_k^{-\mathsf T}$ використовуємо формулу [7]

$$W_k^{-\mathsf T} = \big(f_{2n+1-i-j}(k)\big)_{i,j=1}^{2n} W_k \times$$
$$\times \Big(\mathrm{diag}\,\big(f'\big(\lambda_j(k), k\big)\big)_{j=1}^{2n}\Big)^{-1}, \quad (13)$$

де $f_j(k) = 0$ при $j < 0$, $f' = \partial f / \partial\lambda$.

Перетворимо $\big(f'\big(\lambda_j(k),k\big)\big)^{-2}$ до дробів [8]

$$\frac{(\det a_0)^{2n-1}}{\mathrm{Res}(f,f')}\prod_{\substack{1\le\alpha<\beta\le 2n\\ \alpha\ne j,\ \beta\ne j}}\big(\lambda_\alpha(k)-\lambda_\beta(k)\big)^2,$$

де $\mathrm{Res}(f,g)$ — результант многочленів f та g.

Оскільки

$$\big\|A(k)\big\|\le\frac{\mathrm{const}}{\det a_0},\quad \big|e^{\widetilde{k}^{\,l}\lambda_j(k)t}\big|\le\mathrm{const}\ e^{\widetilde{k}^{\,l}\Lambda t},$$

то

$$\big\|e^{-\widetilde{k}^{\,l}\Lambda t}v_k(t)\big\|^2\le\mathrm{const}\,\frac{\|\varphi_k\|^2}{|\det S(f)|},\qquad(14)$$

причому $\det S(f)=\mathrm{Res}\,(f,f')$, де $S(f)$ — матриця Сильвестра многочлена $f=f(\lambda,k)$, яка є блочною матрицею і складається з двох теплицевих матриць з $2n-1$ і $2n$ рядками відповідно,

$$S(f)=\begin{pmatrix}\Big(f_{j-i}(k)\Big)_{i,j=1}^{2n-1,\,4n-1}\\ \Big((2n-j+i)f_{j-i}(k)\Big)_{i,j=1}^{2n,\,4n-1}\end{pmatrix}.\qquad(15)$$

Число $\dfrac{\det S(f)}{\det a_0}$ є дискримінантом многочлена f, воно набуває малих значень у випадку наявності близьких коренів цього многочлена, тому нерівність (14) потребує уточнення.

Використовуючи оцінку матричної експоненти [1], отримуємо таку нерівність для норми вектора $e^{-\widetilde{k}^{\,l}\Lambda t}v_k(t)=e^{\widetilde{k}^{\,l}(A(k)-\Lambda)t}\varphi_k$:

$$\big\|e^{-\widetilde{k}^{\,l}\Lambda t}v_k(t)\big\|^2\le\mathrm{const}\ \widetilde{k}^{\,(4n-2)l}\|\varphi_k\|^2,\qquad(16)$$

В останній оцінці показник степеня $(4n-2)l$ не можна зменшити (зокрема, у випадку одного $2n$-кратного власного значення матриць $A(k)$ такої ж геометричної кратності).

Для отримання кращої оцінки, ніж (16), встановимо деякі спеціальні властивості матриць Сильвестра.

4. Властивості матриць Сильвестра. Оскільки матриця Сильвестра многочлена $f=f(\lambda,k)$ — форма степеня $4n-1$ його коефіцієнтів $f_0(k),f_1(k),\dots,f_{2n}(k)$, то важливим для подальших оцінок є вигляд доданків цієї матриці, що містять найвищі степені окремих змінних $f_0(k),f_1(k),\dots,f_{2n}(k)$. При відповідних обчисленнях враховуємо формулу (5), що задає структуру многочлена f.

Лема 1. *Якщо $f(\lambda)=h(\lambda)+a\lambda^r g(\lambda)$, де $f(\lambda)$, $h(\lambda)$ і $g(\lambda)$ — многочлени, а саме*

$$f(\lambda)=f_0\lambda^{2n}+f_1\lambda^{2n-1}+\dots+f_{2n},\qquad(17)$$

$$h(\lambda)=h_0\lambda^{2n}+h_1\lambda^{2n-1}+\dots+h_{2n},\qquad(18)$$

$$g(\lambda)=g_0\lambda^{n}+g_1\lambda^{n-1}+\dots+g_{n},,\qquad(19)$$

r — ціле число, $0\le r\le n-1$, $S(f)$, $S(h)$ і $S(g)$ — матриці Сильвестра цих многочленів, то визначник $\det S(f)$ матриці $S(f)$ є многочленом за змінною a степеня не вище $3n-1$ для $r=0$, причому

$$\det S(f)=\pm(nh_0g_0)^n\det S(g)a^{3n-1}+\\ +\dots+\det S(h),\quad(20)$$

і степеня не вище $3n$ для $r\ge1$, причому

$$\det S(f)=\pm\big((n-r)h_0g_0\big)^{n-r}\big(rh_{2n}\big)^{r-1}\times\\ \times g_n^{r+1}\det S(g)a^{3n}+\dots+\det S(h),\quad(21)$$

а знак $\pm$ визначається числом $(-1)^{nr+n+r}$.

Доведення. Оскільки $f_i=h_i+ag_{r-n+i}$ для $i\in\{n-r,\dots,2n-r\}$, $f_i=h_i$ для $i\in\{0,1,\dots,n-r-1,2n-r+1,\dots,2n\}$ і матриця Сильвестра $S(f)$ має такий блочний вигляд:

$$S(f)=\begin{pmatrix}(f_{j-i})_{2n-1}^{4n-1}\\ ((\omega+n)f_{j-i})_{2n}^{4n-1}\end{pmatrix},$$

де i – номер рядка, j – номер стовпця, $(\ )_r^s$ – матриця розміру $r\times s$, то для $r=0$ або $r=1$ маємо

$$S(f)=\begin{pmatrix}(h_{j-i})_{2n-1}^{4n-1}\\ ((\omega+n)h_{j-i})_{2n}^{4n-1}\end{pmatrix}+\\ +a\begin{pmatrix}(0)_{2n-1}^{n-r} & (g_{j-i})_{2n-1}^{3n+r-1}\\ (0)_{2n}^{n-r} & ((\omega+r)g_{j-i})_{2n}^{3n+r-1}\end{pmatrix},\quad(22)$$

де $\omega=n-j+i$, $h_j=0$ для $j<0$ та $j>2n$ і $g_j=0$ для $j<0$ та $j>n$.

Для $r>1$

$$S(f)=S(h)+$$

$$
+\, a \begin{pmatrix} (0)_{2n-1}^{n-r} & (g_{j-i})_{2n-1}^{3n} & (0)_{2n-1}^{r-1} \\ (0)_{2n}^{n-r} & ((\omega+r)g_{j-i})_{2n}^{3n} & (0)_{2n}^{r-1} \end{pmatrix}. \tag{23}
$$

З формул (22) та (23) відповідно отримуємо

$$
S(f) = \\
= \begin{pmatrix} (h_{j-i})_{2n-1}^{4n-1} & (g_{j-i})_{2n-1}^{3n+r-1} \\ ((\omega+n)h_{j-i})_{2n}^{4n-1} & ((\omega+r)g_{j-i})_{2n}^{3n+r-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{n-r} & 0 \\ 0 & E_{3n+r-1} \\ 0 & aE_{3n+r-1} \end{pmatrix},
$$

$$
S(f) = \\
= \begin{pmatrix} (h_{j-i})_{2n-1}^{4n-1} & (g_{j-i})_{2n-1}^{3n+r-1} \\ ((\omega+n)h_{j-i})_{2n}^{4n-1} & ((\omega+r)g_{j-i})_{2n}^{3n+r-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{n-r} & 0 & 0 \\ 0 & E_{3n} & 0 \\ 0 & 0 & E_{r-1} \\ 0 & aE_{3n} & 0 \end{pmatrix}.
$$

Використовуючи формулу Біне–Коші [6] маємо при $r=0$ і $r=1$ рівність

$$
\det S(f) = a^{3n+r-1} \times \\
\times \det \begin{pmatrix} (h_{j-i})_{2n-1}^{n-r} & (g_{j-i})_{2n-1}^{3n+r-1} \\ ((\omega+n)h_{j-i})_{2n}^{n-r} & ((\omega+r)g_{j-i})_{2n}^{3n+r-1} \end{pmatrix} \\
+ \cdots + \det S(h), \tag{24}
$$

а при $r>1$ іншу рівність

$$
\det S(f) = a^{3n} \times \\
\times \det \begin{pmatrix} (H_1)_{2n-1}^{n-r} & (g_{j-i})_{2n-1}^{3n} & (H_3)_{2n-1}^{r-1} \\ (H_2)_{2n}^{n-r} & ((\omega+r)g_{j-i})_{2n}^{3n} & (H_4)_{2n}^{r-1} \end{pmatrix} \\
+ \cdots + \det S(h),
$$

де $H_1 = h_{j-i}$, $H_2 = (\omega+n)h_{j-i}$, $H_3 = h_{\omega+3n-r}$, $H_4 = (r-n-\omega)h_{\omega+3n-r}$.

Коефіцієнт при a^{3n+r-1} у формулі (24) перепишемо так:

$$
\det \begin{pmatrix} (S_3)_{n-r}^{n-r} & (S_4)_{n-r}^{n-r} & \bigstar_2 \\ 0 & 0 & (g_{j-i})_{n+r-1}^{2n+2r-1} \\ (S_1)_{n-r}^{n-r} & (S_2)_{n-r}^{n-r} & \bigstar_1 \\ 0 & 0 & ((\omega+r)g_{j-i})_{n+r}^{2n+2r-1} \end{pmatrix} = \\
= \pm \det \begin{pmatrix} (S_1)_{n-r}^{n-r} & (S_2)_{n-r}^{n-r} & \bigstar_1 \\ (S_3)_{n-r}^{n-r} & (S_4)_{n-r}^{n-r} & \bigstar_2 \\ 0 & 0 & (g_{j-i})_{n+r-1}^{2n+2r-1} \\ 0 & 0 & ((\omega+r)g_{j-i})_{n+r}^{2n+2r-1} \end{pmatrix},
$$

де $\pm = (-1)^{n+r}$, $S_1 = (\omega+n)h_{j-i}$, $S_3 = h_{j-i}$, $S_2 = (\omega+r)g_{j-i}$, $S_4 = g_{j-i}$,

$$
\det \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} = \\
= \left(\det \begin{pmatrix} 2nh_0 & (n+r)g_0 \\ h_0 & g_0 \end{pmatrix} \right)^{n-r} = \\
= \big((n-r)h_0 g_0\big)^{n-r}.
$$

Отже,

$$
\det S(f) = (-1)^{n+r}\big((n-r)h_0g_0\big)^{n-r} a^{3n+r-1} \times \\
\times \det \begin{pmatrix} (g_{j-i})_{n+r-1}^{2n+2r-1} \\ ((\omega+r)g_{j-i})_{n+r}^{2n+2r-1} \end{pmatrix} + \cdots + \det S(h),
$$

і формулу (20) доведено.

Формула (21) для $r=1$ випливає з таких обчислень:

$$
\det \begin{pmatrix} (g_{j-i})_{n}^{2n+1} \\ ((\omega+1)g_{j-i})_{n+1}^{2n+1} \end{pmatrix} = \\
= \det \begin{pmatrix} (g_{j-i})_{n}^{2n} & 0 \\ ((\omega+1)g_{j-i})_{n}^{2n} & 0 \\ \bigstar & (g_n)_1^1 \end{pmatrix} = \\
= \det \begin{pmatrix} (g_{j-i})_{n-1}^{2n-1} & 0 \\ \bigstar & (g_n)_1^1 \\ (\omega g_{j-i})_{n}^{2n-1} & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n g_n^2 S(g).
$$

Для $r>1$ подамо коефіцієнт при a^{3n} у вигляді

$$
\det \begin{pmatrix} (S_3)_{n-r}^{n-r} & (S_4)_{n-r}^{n-r} & \bigstar_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (S_4)_{n}^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bigstar_4 & (S_7)_{r-1}^{r-1} & (S_8)_{r-1}^{r-1} \\ (S_1)_{n-r}^{n-r} & (S_2)_{n-r}^{n-r} & \bigstar_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (S_2)_{n+1}^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bigstar_3 & (S_5)_{r-1}^{r-1} & (S_6)_{r-1}^{r-1} \end{pmatrix} = \\
= \pm \det \begin{pmatrix} (S_1)_{n-r}^{n-r} & (S_2)_{n-r}^{n-r} & \bigstar_1 & 0 & 0 \\ (S_3)_{n-r}^{n-r} & (S_4)_{n-r}^{n-r} & \bigstar_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (S_4)_{n}^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (S_2)_{n+1}^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bigstar_3 & (S_5)_{r-1}^{r-1} & (S_6)_{r-1}^{r-1} \\ 0 & 0 & \bigstar_4 & (S_7)_{r-1}^{r-1} & (S_8)_{r-1}^{r-1} \end{pmatrix},
$$

де $\pm = (-1)^{(n-r)r}$, $S_5 = (\omega+r-n)g_{2n-\omega}$, $S_6 = (\omega+1-n)h_{3n-1-\omega}$, $S_7 = g_{2n+1-\omega}$, $S_8 = h_{3n-\omega}$,

$$
\det \begin{pmatrix} S_5 & S_6 \\ S_7 & S_8 \end{pmatrix} =
$$

$$= \left(\det \begin{pmatrix} rg_n & h_{2n-1} \\ 0 & h_{2n} \end{pmatrix} \right)^{r-1} = \big(rh_{2n}g_n\big)^{r-1}.$$

Звідси отримуємо формулу (21) для $r > 1$. Лему доведено. ▶

Зауважимо, що в доведенні леми 1 і далі зірочки (★) позначають матриці, від яких не залежать відповідні визначники.

Лема 2. *Якщо за умов леми* 1 *многочлен має степінь* $n-1$, *а саме*

$$g(\lambda) = g_0\lambda^{n-1} + g_1\lambda^{n-2} + \cdots + g_{n-1},$$

то

$$\det S(f) = \pm\big((n+1)h_0g_0\big)^{n+1}\times \\ \times \det S(g)a^{3n-2} + \cdots + \det S(h), \quad (25)$$

для $r = 0$, *а для* $r \geq 1$

$$\det S(f) = \pm\big((n-r+1)h_0g_0\big)^{n-r+1}\times \\ \times \big(rh_{2n}\big)^{r-1}g_n^{r+1}\det S(g)a^{3n-1}+ \\ + \cdots + \det S(h), \quad (26)$$

причому знак $\pm$ *є знаком числа* $(-1)^{nr+n+1}$.

Доведення леми 2 аналогічне до доведення леми 1. ▶

Лема 3. *Нехай многочлен* $g(\lambda)$ *має вигляд* (19), *тобто* $g(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n} g_j\lambda^{n-j}$, *тоді*

$$\det S(g) = \sum_{\alpha=0}^{n-1}(-1)^{\alpha+n\alpha}\alpha^{\alpha}(n-\alpha)^{n-\alpha}\times \\ \times g_0^{\alpha}g_n^{n-\alpha-1}\cdot g_\alpha^n + \cdots, \quad (27)$$

де три крапки означають доданки, що не містять n*-их степенів коефіцієнтів* g_α.

Доведення. Функція $S(g)$ є однорідною степеня $2n-1$ функцією щодо коефіцієнтів $g_0, g_1, \ldots, g_n$ многочлена $g(\lambda)$.

Нехай $\omega = n-j+i$, $0 \leq \alpha \leq n-1$, тоді

$$\omega g_{j-i} = (\omega - n + \alpha)g_{j-i} + (n-\alpha)g_{j-i}.$$

З властивостей визначників отримуємо

$$\det S(g) = \det \begin{pmatrix} (g_{j-i})_{n-1}^{2n-1} \\ ((\omega - n + \alpha)g_{j-i})_{n-1}^{2n-1} \\ ((2n-1+\omega)g_{1-\omega})_1^{2n-1} \end{pmatrix},$$

причому матриця $\big((\omega - n + \alpha)g_{j-i}\big)$, очевидно, не залежить від коефіцієнта g_α. Звідси випливає рівність

$$\det S(g) = \\ = g_0^n \det \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 & 0 \\ \bigstar_1 & \bigstar_2 & \big(-\omega g_\omega\big) \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix} + \cdots \\ = ng_0^n \det \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \bigstar & (\omega g_\omega) \end{pmatrix} + \cdots = \\ = ng_0^n \det\big(\omega g_\omega\big) + \cdots = n^n g_n^{n-1}g_0^n + \cdots,$$

де три крапки означають доданки менших степенів щодо g_0, E_n — одинична матриця.

Для $\alpha = n-1$ отримуємо

$$\det S(g) = \\ = g_{n-1}^n \det \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} & 0 \\ ((\omega-1)g_{j-i}) & \bigstar_1 & \bigstar_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots = \\ =(-1)^{n-1}g_{n-1}^n \det \begin{pmatrix} ((\omega-1)g_{j-i}) & \bigstar \\ 0 & E_n \end{pmatrix} + \cdots = \\ = (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}g_0^{n-1}g_{n-1}^n + \cdots,$$

де три крапки означають доданки менших степенів щодо g_{n-1}.

Для $0 < \alpha < n-1$ аналогічно отримаємо низку рівностей:

$$\det S(g) = g_\alpha^n\times \\ \times\det \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} & 0 & 0 \\ (G_1)_{n-1}^{\alpha} & \bigstar_1 & \bigstar_2 & (G_2)_{n-1}^{n-\alpha-1} \\ 0 & 0 & (n-\alpha)_1^1 & 0 \end{pmatrix} \\ + \cdots = (-1)^{n-1+n\alpha}(n-\alpha)g_\alpha^n \det \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \bigstar & G \end{pmatrix} + \cdots = \\ = (-1)^{n-1+n\alpha}(n-\alpha)g_\alpha^n \det G + \cdots,$$

де $G = \big(G_1\ G_2\big)$, $G_1 = \big((\omega - n + \alpha)g_{j-i}\big)$ та $G_2 = \big((\alpha - 2n - \omega)g_\omega\big)$ мають $n-1$ рядок і α та $n-\alpha-1$ стовпців.

Оскільки справджується рівність

$$\det G = \alpha^\alpha(\alpha - n)^{n-\alpha-1}g_0^\alpha g_n^{n-\alpha-1},$$

то отримуємо формулу (27) у загальному випадку при $0 < \alpha < n-1$. Лему доведено. ▶

5. Оцінювання малих знаменників. Коефіцієнти многочлена f є многочленами від змінних $a_{js}^{j_1 j_2}$ — коефіцієнтів системи (1), тому функція $\det S(f)$ також є многочленом від цих змінних.

Позначимо через $b_1, \ldots, b_p$ коефіцієнти при похідних $D_1^{nl}, \ldots, D_p^{nl}$ оператора $a_n^{11}(D)$, а відповідні коефіцієнти оператора $a_n^{22}(D)$ — $b_{p+1}, \ldots, b_{2p}$; нехай $b = (b_1, \ldots, b_{2p})$.

Із формули (7) випливає рівність

$$f(\lambda, k) = b_j \cdot \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{nl} g(\lambda, k) + h(\lambda, k),$$

де многочлени $g(\lambda, k)$ та $h(\lambda, k)$ не залежать від b_j і визначаються формулами

$$g(\lambda, k) = \sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_j^{22}(k)\lambda^{n-j},$$
$$h(\lambda, k) = \det a_0 \cdot \lambda^{2n} + \cdots,$$

де три крапки — доданки меншого степеня. Використаємо лему 1 при $r = 0$, $h_0 = \det a_0$, $g_0 = a_0^{22}$, $a = b_j \cdot \big(k_j/\widetilde{k}\big)^{nl}$, тоді

$$\det S(f) = (-n \det a_0 \cdot a_0^{22})^n \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{nl(3n-1)} \times \\ \times \det S(g) b_j^{3n-1} + \cdots, \quad (28)$$

де три крапки означають доданки зі степенями b_j^{α}, $0 \le \alpha \le 3n-2$. З леми 3 при $\alpha = 0$, $g_0 = a_0^{22}$, $g_n = b_{p+j} \cdot \big(k_j/\widetilde{k}\big)^{nl}$ випливає, що

$$\det S(g) = (n a_0^{22})^n \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{nl(n-1)} b_{p+j}^{n-1} + \cdots, \quad (29)$$

де три крапки означають доданки зі степенями b_{p+j}^{α}, $0 \le \alpha \le n-2$.

Позначимо $\zeta(r)$ функцію $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \widetilde{k}^{\,-r}$. Вона існує при $r > p$ і є багатовимірним аналогом дзета-функції Рімана.

Лема 4. *Вважаємо, що $0 < \varepsilon < 1$, $r > p$, коефіцієнти системи (1) — фіксовані (за винятком коефіцієнтів $b_1, \ldots, b_{2p}$) та задовольняють умови*

$$\det a_0 \neq 0, \qquad a_0^{22} \neq 0. \quad (30)$$

Тоді існує множина $W_\varepsilon \subset \mathcal{O}_R^{2p}$ така, що $\operatorname{meas} W_\varepsilon \le \varepsilon$ і для всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ та для всіх $k \neq 0$ справджується оцінка знизу

$$|\det S(f)| \ge \varepsilon^{2n-1} C_1^{-1} \widetilde{k}^{\,-(2n-1)r}, \quad (31)$$

де $C_1 = \dfrac{\big(2\zeta(r)(p+1)^{nl}\pi^{2p}R^{4p-2}\big)^{2n-1}}{\big(n a_0^{22}\big)^{2n}(\det a_0)^n}$.

Доведення. Формули (28) і (29) дають рівність

$$\det S(f) = (-\det a_0)^n \big(n a_0^{22}\big)^{2n} \times \\ \times \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{nl(4n-2)} B_{p+j}(k) B_j(k), \quad (32)$$

у випадку $B_{p+j}(k) \neq 0$, де $B_{p+j}(k)$ — унітальний (з одиничним старшим коефіцієнтом) степеня $n-1$ многочлен змінної b_{p+j}, коефіцієнти якого не залежать від змінної b_j, $B_j(k)$ — унітальний степеня $3n-1$ многочлен змінної b_j.

Нехай $W_\varepsilon^1(k)$ — множина таких векторів $b \in \mathcal{O}_R^{2p}$, для яких при фіксованому k виконується оцінка

$$|B_{p+j}(k)| < \Big(\frac{\varepsilon \widetilde{k}^{\,-r}}{2\zeta(r)\pi^{2p}R^{4p-2}}\Big)^{(n-1)/2}. \quad (33)$$

Для множини $\tilde{W}_\varepsilon^1(k)$ тих векторів b_{p+j} із круга $\mathcal{O}_R$, для яких виконується нерівність (33) з довільним фіксованим вектором $(b_1, \ldots, b_{p+j-1}, b_{p+j+1}, \ldots, b_{2p}) \in \mathcal{O}_R^{2p-1}$, за лемою Картана [10] справджується оцінка

$$\operatorname{meas} \tilde{W}_\varepsilon^1(k) \le \frac{\varepsilon \widetilde{k}^{\,-r}}{2\zeta(r)(\pi R^2)^{2p-1}}.$$

Після інтегрування по області $\mathcal{O}_R^{2p-1}$ отримуємо

$$\operatorname{meas} W_\varepsilon^1(k) \le \frac{\varepsilon}{2\zeta(r)} \widetilde{k}^{\,-r}.$$

Аналогічну оцінку справджує міра множини $W_\varepsilon^2(k)$ тих векторів $b \in \mathcal{O}_R^{2p}$, для яких при фіксованому k виконується оцінка

$$|B_j(k)| < \Big(\frac{\varepsilon \widetilde{k}^{\,-r}}{2\zeta(r)\pi^{2p}R^{4p-2}}\Big)^{(3n-1)/2}.$$

Тому на множині $\mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon(k)$, де $W_\varepsilon(k) = W_\varepsilon^1(k) \cup W_\varepsilon^2(k)$, а $\operatorname{meas} W_\varepsilon(k) \leq \dfrac{\varepsilon}{\zeta(r)}\widetilde{k}^{\,-r}$, із рівності (32) випливає нерівність

$$|\det S(f)| \geq \left|na_0^{22}\right|^{2n} |\det a_0|^n \times \\ \times \Big(\frac{\varepsilon\widetilde{k}^{\,-r}}{2\zeta(r)(p+1)^{nl}\pi^{2p}R^{4p-2}}\Big)^{2n-1} \widetilde{k}^{\,-(2n-1)r}$$

для фіксованого вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$.

Отже, на множині $W_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} W_\varepsilon(k)$ з мірою $\operatorname{meas} W_\varepsilon \leq \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \operatorname{meas} W_\varepsilon(k) = \varepsilon$ нерівність (31) виконується для всіх k із множини $\mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$. ►

Аналогічна нерівність справджується і при $a_0^{22} = 0$, якщо ненульовим є коефіцієнт a_0^{11} при похідній $D_t^n u_1$ у першому диференціальному рівнянні системи.

Якщо ж обидва коефіцієнти дорівнюють нулеві, тобто $a_0^{11} = a_0^{22} = 0$, то аналогічну до леми 4 лему можна довести для векторів утворених з відповідних коефіцієнтів операторів $\tilde{a}_n^{12}(D)$ та $\tilde{a}_n^{21}(D)$.

У випадку використання введеного перед лемою 4 вектора b, згідно з лемою 2 (при $r = 0$, $h_0 = \det a_0$, $g_0 = \tilde{a}_1^{22}$, $a = b_j \cdot \big(k_j/\widetilde{k}\,\big)^{nl}$) і лемою 3 для $n-1$ на місці n (при $\alpha = 0$, $h_0 = \det a_0$, $g_{n-1} = b_{n+j}\big(k_j/\widetilde{k}\,\big)^{nl}$) замість рівностей (28) і (29) маємо рівності

$$\det S(f) = \big(-(n+1)\det a_0 \cdot \tilde{a}_1^{22}\big)^{n+1} \times \\ \times \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{nl(3n-2)} \det S(g) \cdot b_j^{3n-2} + \cdots,$$

$$\det S(g) = \big((n-1)\,\tilde{a}_1^{22}\big)^{n-1} \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{nl(n-2)} \times \\ \times b_{p+j}^{n-2} + \cdots,$$

де $g(\lambda, k) = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_j^{22}(k)\lambda^{n-j}$.

За обмеженості знизу модуля функції

$$\tilde{a}_1^{22}(k) \equiv \sum_{|s|\leq l} a_{1s}^{22} \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^s \widetilde{k}^{\,|s|-l}$$

з цих рівностей випливає оцінка знизу для функції $|\det S(f)|$.

Лема 5. *Нехай виконуються умови (крім другої нерівності (30)) леми 4 та умова*

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \widetilde{k}^{\,\theta} \cdot \left|\tilde{a}_1^{22}(k)\right| > 0$$

для деякого $\theta \in \mathbb{R}$. Тоді існує така множина W_ε з мірою $\operatorname{meas} W_\varepsilon \leq \varepsilon$, що для всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ і всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ справджується нерівність

$$|\det S(f)| \geq \operatorname{const} \varepsilon^{2n-2} \widetilde{k}^{\,-(2n-2)r-2n\theta}. \quad (34)$$

Очевидно, що $\theta \geq 0$, а оцінка (34) краща від оцінки (31), якщо $\theta \leq p/2n$.

Якщо не можна вважати незалежними параметрами коефіцієнти при старших похідних оператора $\tilde{a}_n(D)$, то використаємо коефіцієнти при молодших похідних цього оператора.

Сформуємо такий вектор $b = (b_1, \ldots, b_{2p})$ з коефіцієнтів системи: $b_1, \ldots, b_p$ — коефіцієнти при похідних $D_1^{nl-\theta_1}, \ldots, D_p^{nl-\theta_1}$ оператора $a_n^{11}(D)$, а $b_{p+1}, \ldots, b_{2p}$ — при похідних $D_1^{nl-\theta_2}, \ldots, D_p^{nl-\theta_2}$ оператора $a_n^{22}(D)$.

Лема 6. *Нехай $0 < \varepsilon < 1$, $r > p$, коефіцієнти системи (1), що не є компонентами вектора b, — фіксовані та задовольняють умови*

$$\det a_0 \neq 0, \qquad |a_0^{11}| + |a_0^{22}| \neq 0.$$

Тоді існує множина $W_\varepsilon \subset \mathcal{O}_R^{2p}$ така, що $\operatorname{meas} W_\varepsilon \leq \varepsilon$ і для всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ та для всіх $k \neq 0$ справджується оцінка знизу

$$|\det S(f)| \geq \frac{\varepsilon^{2n-1}}{C_1 \widetilde{k}^{\,(2n-1)r+(3n-1)\theta_1+(n-1)\theta_2}}. \quad (35)$$

Доведення цієї леми аналогічне до доведення леми 4.

Оцінка показує, що використання коефіцієнтів при старших похідних як змінних параметрів покращує оцінку дискримінанта многочлена f.

Якщо розглядати системи (1) з фіксованим оператором $a_n(D)$, то використовуємо лему 1 при $r > 0$. Для отримання відповідних оцінок достатньо вимагати степеневих оцінок знизу функцій $|\det \tilde{a}_n(k)|$ і $|\tilde{a}_n^{j_1 j_2}(k)|$.

6. Розв'язність задачі Коші. Наступна теорема про розв'язність задачі (1), (2) базується на лемі 4 і нерівності (14).

Позначимо $\mathbf{Y}_j = \mathbf{H}_{(n-j)l+(2n-1)r/2}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\mathbf{X}_n = \mathbf{E}_{-\Lambda,l}^n(\mathcal{D}^p)$, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{E}_{-\Lambda,l}^0(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми 4 і $\varphi_j \in Y_j^2$, $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$, тоді для майже всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{2p}$ існує єдиний розв'язок и задачі (1), (2) із простору X_n^2. Для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ і для всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$, де W_ε — множина з леми 4, виконується нерівність*

$$\|u; X_n^2\|^2 \leq \left(\frac{C_2}{\varepsilon^{2n-1}} + C_3\right) \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j; Y_j^2\|^2, \quad (36)$$

де стала C_2 не залежить від коефіцієнтів системи (1).

Доведення. Розв'язок задачі (1), (2) та його похідні до $(n-1)$-го порядку включно визначаються формулою (11), тому

$$\|u; X_n^2\|^2 = \sum_{j=1}^{2n} \|v^j; X_0\|^2 + \\ + \|A_{2n-1\cdot}(D)v; X_0\|^2 + \|A_{2n\cdot}(D)v; X_0\|^2 \leq \\ \leq \mathrm{const}\, \|v; X_0^{2n}\|^2,$$

де стала залежить від коефіцієнтів системи.

Нехай S — множина, що складається з нульового вектора і тих векторів k, для яких $\operatorname{Re}\lambda_1(k) > \Lambda$.

Ця множина за побудовою є скінченною, тому можна записати нерівність

$$\|u; X_n^2\|^2 \leq \mathrm{const} \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus S} \int_0^T \frac{|v_k(t)|^2 dt}{Te^{2\widetilde{k}^{\,l}\Lambda t}} + C_3.$$

Далі використовуємо оцінку (14), нерівність (31) з леми 4 і формулу

$$\|\varphi_k\|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{k}^{\,2(-j)l} \|\varphi_{kj}\|^2,$$

де φ_{kj} — коефіцієнти Фур'є вектор-функції φ_j, та отримуємо нерівність (36).

За лемою Бореля-Кантеллі оцінка (31) виконується для майже всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{2p}$, для всіх (за винятком скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, звідси випливає розв'язність задачі у просторі X_n^2. Теорему доведено. ▶

За умов леми 5 достатньою умовою існування та єдиності розв'язку в просторі X_n^2 для всіх $b \in \mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ є належність функцій $\widetilde{D}^{n\theta-r/2}\varphi_j$ до простору Y_j^2, $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$.

Для отримання розв'язку задачі Коші з простору X_n^2 у випадку виконання умов леми 6 потрібно накладати сильніші умови гладкості, ніж у теоремі 1.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови леми 6 і $\widetilde{D}^{n\theta_1+(n-1)(\theta_1+\theta_2)/2}\varphi_j \in Y_j^2$, тоді для всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$, $\operatorname{meas} W_\varepsilon \leq \varepsilon$, існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору X_n^2 і виконується нерівність*

$$\|u; X_n^2\|^2 \leq \left(C_4\varepsilon^{-(2n-1)} + C_5\right) \times \\ \times \sum_{j=0}^{n-1} \|\widetilde{D}^{n\theta_1+(n-1)(\theta_1+\theta_2)/2}\varphi_j; Y_j^2\|^2,$$

де стала C_4 не залежить від коефіцієнтів системи (1).

Доведення теореми близьке до доведення теореми 1. Воно базується на оцінці малих знаменників (35). ▶

Порівняння результатів: якщо використовувати оцінку (16), яка виконується для всіх систем (1), то для розв'язності задачі (1), (2) у просторі X_n^2 достатньо, щоб

$$\widetilde{D}^{(2n-1)(l-r/2)}\varphi_j \in Y_j^2, \quad j \in \{0,1,\dots,n-1\},$$

а якщо розглядати системи строго гіперболічного чи строго еліптичного типу ($|\det S(f)| \geq \mathrm{const} > 0$), то достатньо виконання умови

$$\widetilde{D}^{-(2n-1)r/2}\varphi_j \in Y_j^2 \quad \left(\varphi_j \in \left(\mathbf{H}_{(n-j)l}(\Omega_{2\pi}^p)\right)^2\right).$$

Остання умова є найслабшою [2], а умова $\widetilde{D}^{(2n-1)(l-r/2)}\varphi_j \in Y_j^2$ є сильнішою чи слабшою за умову з теореми 1 у залежності від того, чи l більше за $r/2$, чи менше.

7. Висновки. У роботі розглянуто задачу Коші (1), (2) для безтипної системи двох рівнянь із частинними похідними і сталими коефіцієнтами в просторах 2π-періодичних за просторовими змінними і достатньо гладкими за часовою змінною функцій. Установлено, що для всіх векторів (за винятком множини як завгодно малої міри), певним способом складених з коефіцієнтів системи (1), задача Коші є розв'язною.

Визначено залежність між гладкістю правих частин початкових умов та складом векторів, утворених з коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь (1).

За допомогою метричного підходу доведено теоретико-числові нерівності для малих знаменників, які характерні для задачі Коші.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – Москва.: Физматгиз, 1958. – 275 с.

2. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Дослідження умов розв'язності задачі Коші для рівнянь із частинними похідними за допомогою метричного підходу// Нелинейные граничные задачи. — 2008. – **18**. – С. 86—106.

3. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

4. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.

5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.

6. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – Москва: Наука, 1984. – 320 с.

7. *Илькив В. С.* Компактное обращение обобщенной матрицы Вандермонда. – Деп. в НИИЭИР. Сб. реф. деп. рук. ВИМИ, 1991. – Вып. 5, № 3-8836. – 10 с.

8. *Прасолов В. В.* Многочлены. – Москва: МЦНМО, 2001. – 336 с.

9. *Калинина Е. А., Утешев А. Ю.* Теория исключения. – Санкт-Перербург: Из-во НИИ химии СПбГУ, 2002. – 72 с.

10. *Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.