Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

МАГЕРОВСЬКА Тетяна Валеріївна

УДК 517.946+511.2

Задачі з нелокальними умовами для гіперболічних рівнянь та задача з початковими умовами для безтипних рівнянь

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2011

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Львівському державному університеті внутрішніх справ Міністерства внутрішніх справ України і в Інституті математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка» Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор

Ільків Володимир Степанович,

Національний університет „Львівська політехніка“, професор кафедри обчислювальної математики та програмування.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор

Пукальський Іван Дмитрович,

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, завідувач кафедри диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук, доцент

Кирилич Володимир Михайлович,

Львівський національний університет імені Івана Франка,

завідувач кафедри математичної економіки та економетрії.

Захист відбудеться 16 червня 2011 р. о 15^{00} год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, аудиторія 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий 12 травня 2011 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради Остудін Б. А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Крайові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними виникають при математичному моделюванні різноманітних природних процесів. Коефіцієнти рівнянь та крайових умов визначаються певними характеристиками процесу. Вивчення впливу коефіцієнтів задачі на її розв'язність, динаміку та гладкість її розв'язків є актуальним, але малорозробленим завданням. У дисертаційній роботі вивчено три типи задач – задачу з *початковими* умовами (задачу Коші), задачі з *нелокальними багатоточковими* та задачі з *нелокальними інтегральними* умовами.

Вагомий внесок у розвиток теорії задачі Коші для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними зробили І. Г. Петровський, А. Фрідман, Г. Є. Шилов, І. М. Гельфанд, С. Д. Ейдельман, Л. Н. Слободецький, С. Теклінд, Л. Хермандер, В. О. Солонников, М. Л. Горбачук, С. Д. Івасишен, М. І. Матійчук, В. В. Городецький, В. А. Літовченко та ін. Вони одержали низку важливих результатів, які стосуються коректної розв'язності задачі Коші у різних функціональних просторах, інтегральних зображень розв'язків, дослідження фундаментальної матриці розв'язків. У їхніх роботах знайдено класи коректності задачі Коші для систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами; а для випадку коефіцієнтів, що залежать тільки від просторових змінних, встановлено теореми про коректну розв'язність задачі Коші у класах функцій, обмежених на нескінченності. Досліджено властивості локалізації та стабілізації розв'язків задачі Коші з узагальненими початковими даними типу ультрарозподілів Жевре. Аналогічні результати встановлено для псевдодиференціальних рівнянь, диференціально-операторних рівнянь, а також рівнянь із частинними похідними у комплексній області (М. С. Агранович, М. Й. Вишик, Г. І. Ескін, Ю. А. Дубинський, Я. В. Радино, С. Р. Умаров, Б. Л. Гуревич).

Особлива увага в останні десятиліття приділяється задачам з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. У різних аспектах такі задачі вивчалися у працях О. О. Дезіна, В. М. Борок, А. М. Нахушева, М. Й. Юрчука, Р. К. Романка, А. В. Біцадзе, О. А. Самарського, О. А. Скубачевського, М. І. Матійчука. Встановлено, що нелокальні умови можна використати для опису розв'язних розширень диференціальних операторів зі сталими коефіцієнтами. Знайдено умови розв'язності нелокальних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними класичних типів, диференціально-операторних рівнянь і таких узагальнень цих рівнянь, що зберігають основні властивості типу. За допомогою диференціально-символьного методу отримано зображення для розв'язків однорідних і неоднорідних задач у вигляді дії диференціальних виразів нескінченного порядку на деякі цілі або мероморфні функції (П. І. Каленюк, З. М. Нитребич), а також описано спектральні властивості таких задач (Я. О. Баранецький).

Задачі з інтегральними умовами зустрічаються у сучасних проблемах фізики, біології, демографії, прогнозування погоди тощо. Інтегральні умови за виділеною (часовою) змінною можна розглядати як узагальнення багатоточкових нелокальних умов на випадок, коли множина точок задання розв'язку має потужність континуум. Методи дослідження прямих та обернених задач з інтегральними умовами для гіперболічних та параболічних рівнянь розроблено у працях А. М. Нахушева, В. М. Борок, Л. В. Фардіголи, З. О. Мельника, В. М. Кирилича, М. І. Іванчова, І. Я. Кміть, де встановлено умови розв'язності таких задач, а також описано властивості їх розв'язків.

Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними, взагалі, є некоректними в сенсі Адамара. Умови їх коректності у багатьох випадках залежать від оцінок знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків цих задач. Для вирішення проблеми малих знаменників ефективною виявилася концепція метричного підходу, запропонована А. М. Колмогоровим та в усій повноті застосована ним та В. І. Арнольдом в задачах про рухи на торі та в теорії динамічних систем.

На основі метричного підходу у працях Б. Й. Пташника та його учнів встановлено однозначну розв'язність у циліндричних областях задач з нелокальними умовами для окремих класів рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів рівнянь, нелокальних умов та параметрів області.

Проте не достатньо вивченими залишалися питання про розв'язність у просторах Соболєва задач із загальними нелокальними багатоточковими та інтегральними умовами для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, а також питання про умови існування розв'язку задачі Коші для безтипних рівнянь із частинними похідними. Дослідженню вказаних питань присвячено дану дисертаційну роботу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана із науковими дослідженнями кафедри обчислювальної математики та програмування Національного університету «Львівська політехніка"'. Її результати включені в наукові звіти про виконання державних тем "'Методи розв'язування крайових задач з некласичними умовами для рівнянь із частинними похідними"' (номер держреєстрації 0107U001111) і «Мішані задачі та задачі за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними"' (номер держреєстрації 0109U001157).

Мета і задачі дослідження. Дослідити коректність, побудувати розв'язки задач із локальними (початковими) умовами для лінійних безтипних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними та задач із нелокальними умовами для лінійних строго гіперболічних рівнянь довільного порядку в обмеженій циліндричній області, розв'язність яких пов'язана з проблемами малих знаменників і є нестійкою щодо малих змін параметрів задачі. Досягнення цієї мети полягає у:

- встановленні умов однозначної розв'язності:

– задачі Коші для безтипних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами;

– задач з багатоточковими нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами гіперболічного типу;

– задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами гіперболічного типу.

- виборі функціональних просторів для кожної із поставлених задач;
- вивченні впливу малих знаменників на розв'язність вказаних задач;
- доведенні теорем метричного характеру про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові формальних розв'язків задач.

Об'єкт дослідження: задача Коші, задачі з нелокальними багатоточковими та нелокальними інтегральними умовами для лінійних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними.

Предмет дослідження: умови коректності розглядуваних задач, гладкість розв'язків, метричні оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків задач.

Методи дослідження: методи звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, лінійної алгебри, функціонального аналізу, теорії функцій комплексної змінної та метричної теорії чисел.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна дисертації визначається такими положеннями:

- уперше використано метричний підхід для дослідження умов розв'язності задачі Коші для безтипних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними;
- встановлено умови розв'язності у просторах Соболєва задач з нелокальними багатоточковими та нелокальними інтегральними умовами для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами;
- встановлено метричні оцінки знизу малих знаменників, що виникли при дослідженні задач дисертації; отримано точну оцінку міри множини, обмеженої лінією рівня гладкої функції зі знакосталою похідною високого порядку.

Для розв'язків усіх задач дисертації побудовано формули у вигляді рядів Фур'є.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати у подальших теоретичних дослідженнях крайових задач для рівнянь із частинними похідними, а також при дослідженні практичних задач, які моделюються такими задачами.

Особистий внесок здобувача. Дослідження, викладені в дисертації, є результатом самостійної роботи автора. У спільних роботах [1-6, 8] науковому керівнику належить постановка задач і аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації викладено у доповідях і обговорені на Міжнародній науковій конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2007), Міжнародній конференції до 100-річчя С. Л. Соболєва (Новосибірськ, 2008), IV Всеукраїнській науковій конференції «Нелінійні проблеми аналізу» (Івано-Франківськ, 2008), Міжнародній конференції до 70-річчя В. А. Садовничого (Москва, 2009), Міжнародній конференції «Problems of decision making under uncertainties (PDMU–2009)» (Східниця, 2009), Міжнародній конференції до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди (Чернівці, 2009), Міжнародній конференції «Functional methods in approximation theory and operator theory III» до 70-річчя В. К. Дзядика (Світязь, 2009), Українському математичному конгресі (Київ, 2009), Міжнародній конференції ім. акад. М. П. Кравчука (Київ, 2010), Міжнародній конференції «Approximation theory and application» до 90-річчя М. П. Корнейчука (Дніпропетровськ, 2010), наукових конференціях професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка», Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники Б. Й. Пташник, П. І. Каленюк, М. І. Іванчов, Львів, 2010), засіданні семінару ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники Б. Й. Пташник, В. О. Пелих), науковому семінарі факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (керівник І. М. Черевко, Чернівці, 2010), семінарі з диференціальних рівнянь Національного університету «Львівська політехніка» (керівник П. І. Каленюк, Львів, 2010), на семінарах та засіданнях кафедри обчислювальної математики та програмування Національного університету «Львівська політехніка» (керівники В. С. Ільків, А. Ф. Обшта, Я. М. Чабанюк, Львів, 2009-2010).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у восьми статтях [1-8] у фахових періодичних виданнях, які входять до переліку ВАК України, а також додатково висвітлено у 14 тезах доповідей [9-22] наукових конференцій.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, додатку і має обсяг 156 сторінок. Список використаних джерел налічує 165 найменувань і займає 16 сторінок, додаток складається з 8 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Надалі використовуватимемо такі позначення: $\Omega_{2\pi}^{p}$ $-$ p-вимірний тор $(\mathrm{R}/2\pi\mathrm{Z})^{p}$, $\mathrm{D}^{p}=\{(t,x): t\in[0,T], x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_{2\pi}^{p}\}$; O_R $-$ круг $\{z\in\mathrm{C}:|z|\le R\}$, $\mathrm{O}=\mathrm{O}_1$; $measE$ $-$ міра Лебега множини E; $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathrm{Z}^{p}$, $(k,x)=k_1x_1+\cdots+k_px_p$, $k=(1+k_1^2+\cdots+k_p^2)^{1/2}$, $\zeta(r)=\sum_{k\in\mathrm{Z}^{p}\setminus\{0\}} k^{-r}$; $D_t=\partial/\partial t$, $D=(D_1,\ldots,D_p)$, $D_j=-i\partial/\partial x_j$;

$\mathbf{C}^{n}(G)$ $-$ простір n разів неперервно диференційовних в області G функцій;

$\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^{p})$, $q\in\mathrm{R}$, $-$ соболєвський простір 2π-періодичних за змінними $x_1,\ldots,x_p$ функцій $\varphi(x)=\sum_{k\in\mathrm{Z}^{p}}\varphi(k)e^{i(k,x)}$ з нормою $\|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^{p})\|=(\sum_{k\in\mathrm{Z}^{p}} k^{2q}|\varphi(k)|^2)^{1/2}$;

$\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^{p})$, $h\in\mathrm{R}$, $l\in\mathrm{R}$, $-$ гільбертів простір 2π-періодичних за $x_1,\ldots,x_p$ функцій з нормою $\|\varphi;\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^{p})\|=(\sum_{k\in\mathrm{Z}^{p}}\exp(2hk^{l})|\varphi(k)|^2)^{1/2}$;

$\mathbf{H}_{l,q}^{n}(\mathcal{D}^{p})$, $l,q\in\mathrm{R}$, $n\in\mathrm{N}$, $-$ банахів простір функцій $u=u(t,x)$ таких, що похідна $D_t^j u$ належить до простору $\mathbf{C}([0,T],\mathbf{H}_{q-lj}(\Omega_{2\pi}^{p}))$, $j=0,1,\ldots,n$, а норма визначається формулою

$$\left\|u;\mathbf{H}_{l,q}^{n}(\mathcal{D}^{p})\right\|^2=\sum_{j=0}^{n}\left\|D_t^j u;\mathbf{C}([0,T],\mathbf{H}_{q-lj}(\Omega_{2\pi}^{p}))\right\|^2;$$

$\mathbf{E}_{\Lambda,l}^{n}(\mathcal{D}^{p})$, $\Lambda,l\in\mathrm{R}$, $n\in\mathrm{N}$, $-$ банахів простір функцій $u=u(t,x)$, для яких функція $\|(1-\Delta)^{l(n-j)/2}D_t^j u(t,\cdot);\mathbf{E}_{\Lambda t,l}(\Omega_{2\pi}^{p})\|$, $\Delta=-(D_1^2+\cdots+D_p^2)$, є неперервною на $[0,T]$, а норма задається рівністю

$$\left\|u;\mathbf{E}_{\Lambda,l}^{n}(\mathcal{D}^{p})\right\|^2=\sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|(1-\Delta)^{\frac{l(n-j)}{2}}D_t^j u(t,\cdot);\mathbf{E}_{\Lambda t,l}(\Omega_{2\pi}^{p})\right\|^2.$$

За послідовністю $\{F(k)\}_{k\in\mathrm{Z}^{p}}$, $F(k)\in\mathrm{C}$, побудуємо операцію $F(D)$, дія якої на функцію $\varphi(x)=\sum_{k\in\mathrm{Z}^{p}}\varphi(k)e^{i(k,x)}$ визначається правилом $F(D)\varphi(x)=\sum_{k\in\mathrm{Z}^{p}}F(k)\varphi(k)e^{i(k,x)}$.

У **вступі** дисертації обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та задачі дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення та апробацію одержаних результатів, кількість публікацій.

У **першому** розділі дисертації подано огляд літератури, пов'язаної з теорією задачі Коші та задач із нелокальними (багатоточковими та інтегральними) умовами для диференціальних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними.

У **другому** розділі дисертації досліджено задачу Коші для лінійних безтипних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

У підрозділі 2.1 вивчено задачу Коші

$$D_t^n u + \sum_{j=1}^{n} a_j(D) D_t^{n-j} u = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_1, \ldots, \quad D_t^{n-1} u|_{t=0} = \varphi_{n-1}, \tag{2}$$

де $a_j(D) = \sum_{|s| \le jl} a_{js} D^s$, $j = 1, \ldots, n$, $a_{js} \in \mathrm{C}$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathrm{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $l > 0$.

Нехай $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ – корені многочлена $f_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_j(k) \lambda^{n-j}$, $\tilde{a}_j(k) = a_j(k)/k^{jl}$, впорядковані нерівностями $\mathrm{Re}\lambda_1(k) \ge \cdots \ge \mathrm{Re}\lambda_n(k)$, а число Λ є таким, що нерівність $\Lambda \ge \mathrm{Re}\lambda_1(k)$ не виконується лише для скінченної кількості векторів $k \in \mathrm{Z}^p$.

У підрозділі 2.1 встановлено умови однозначної розв'язності задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$. Із результатів Гельфанда і Шилова[1] випливає, що розв'язок задачі (1), (2) належить до простору $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$, якщо

$$\varphi_\alpha \in \mathbf{H}_{(n-\alpha)l+(n-1)l}(\Omega_{2\pi}^p), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Ці достатні умови розв'язності задачі Коші у просторі $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$ не можна послабити для всіх рівнянь вигляду (1), про що свідчить наведений у підрозділі 2.1 приклад задачі Коші для рівняння $(D_t - (1-\Delta)^{l/2})^n u = 0$. Але для деяких рівнянь умови (3) можуть бути послаблені. Зокрема, достатніми умовами розв'язності в просторі $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$ задачі Коші для рівняння $D_t^n u - (1-\Delta)^{ln/2} u = 0$ є умови $\varphi_\alpha \in \mathbf{H}_{(n-\alpha)l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$, які є слабшими від умов (3).

У підрозділі 2.1 показано (теорема 2.1), що у випадку $p/l < 4$ достатні умови (3) розв'язності задачі (1), (2) в просторі $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$ можна послабити для майже всіх (стосовно міри Лебега) рівнянь (1). Для встановлення цього результату використано метричний підхід до оцінювання знизу дискримінанта $D(k) = \prod_{1 \le \alpha < \beta \le n} (\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k))^2$ многочлена $f_k(\lambda)$, $k \in \mathrm{Z}^p$. Дискримінанти $D(k)$, $k \in \mathrm{Z}^p$,

[1] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – Вып. 3. – 274 с.

входять знаменниками у формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, яким зображується розв'язок задачі (1), (2); вони можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $k \in \mathrm{Z}^p$.

Позначимо через $\bar{b} = (b_1, \dots, b_p)$ вектор, складений із коефіцієнтів при старших похідних D_j^{nl} диференціального виразу $a_n(D)$ у рівнянні (1).

Лема 2.1. *Для майже всіх (за мірою Лебега в* C^p*) векторів* $\bar{b} \in \mathrm{O}_R^p$ *оцінка*

$$| D(k) | \geq C_1 k^{(1-n)r/2}, \qquad k \in \mathrm{Z}^p \setminus \{0\},$$

виконується при $r > p$, де стала $C_1 > 0$ не залежить від вектора $k \in \mathrm{Z}^p$. Для довільних $\varepsilon \in (0,1)$, $r > p$ існує така множина $W_\varepsilon \subset \mathrm{O}_R^p$, що $mes W_\varepsilon \leq \varepsilon$ і оцінка

$$| D(k) | \geq \varepsilon^{(n-1)/2} C_2 k^{(1-n)r/2}, \qquad k \in \mathrm{Z}^p \setminus \{0\}, \tag{4}$$

справджується для всіх $\bar{b} \in \mathrm{O}^p \setminus W_\varepsilon$, де $C_2 = n^n (\pi^p (p+1)^{nl} \zeta(r))^{(1-n)/2}$.

Із леми 2.1 випливає твердження про розв'язність задачі Коші (1), (2).

Теорема 2.1. *Нехай* $\varphi_\alpha \in \mathbf{H}_{(n-\alpha)l+(n-1)r/4}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\alpha = 0,1,\dots,n-1$, $r > p$. *Тоді для майже всіх (за мірою Лебега в* C^p*) векторів* $\bar{b} \in \mathrm{O}_R^p$ *у просторі* $\mathbf{E}_{-\Lambda,l}^n(\mathcal{D}^p)$ *існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі (1), (2). Для довільного* $\varepsilon \in (0,1)$ *і довільного вектора* $\bar{b} \in \mathrm{O}_R^p \setminus W_\varepsilon$ *справджується оцінка*

$$\left\| u; \mathbf{E}_{-\Lambda,l}^n \right\|^2 \leq \left(C_3 \varepsilon^{-(n-1)/2} + C_4 \right) \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left\| \varphi_\alpha; \mathbf{H}_{(n-\alpha)l+(n-1)r/4}(\Omega_{2\pi}^p) \right\|^2,$$

де W_ε – множина з леми 2.1, $C_3 = C_3(n,m,p,r,R) > 0$, $C_4 = C_4(n,R,\bar{b}) > 0$.

Підсумком результатів Гельфанда і Шилова та теореми 2.1 є такий факт: задача (1), (2) має в просторі $\mathbf{E}_{-\Lambda,l}^n(\mathcal{D}^p)$ єдиний розв'язок, якщо $\varphi_\alpha \in \mathbf{H}_{(n-\alpha)l+(n-1)\sigma}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\alpha = 0,1,\dots,n-1$, де $\sigma = r/4$ у випадку, коли $p/l < 4$, $\bar{b} \in \mathrm{O}_R^p \setminus W_\varepsilon$, і $\sigma = l$ у решті випадків.

У підрозділі 2.2 досліджено задачу Коші для системи двох анізотропних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(D) D_t^{n-j} u = 0, \qquad D_t^j u|_{t=0} = \varphi_j, \quad j = 0,1,\dots,n-1, \tag{5}$$

де $a_j(D) = \sum_{|s| \leq jl} a_{js} D^s = \begin{pmatrix} a_j^{11}(D) & a_j^{12}(D) \\ a_j^{21}(D) & a_j^{22}(D) \end{pmatrix}$, $a_0(D) = a_{00} = a_0 = \begin{pmatrix} a_0^{11} & a_0^{12} \\ a_0^{21} & a_0^{22} \end{pmatrix}$, причому $\det a_0 \neq 0$, $a_j^{j_1 j_2}(D) = \sum_{|s| \leq jl} a_{js}^{j_1 j_2} D^s$, $a_{js} = \begin{pmatrix} a_{js}^{11} & a_{js}^{12} \\ a_{js}^{21} & a_{js}^{22} \end{pmatrix}$, $a_{js}^{j_1 j_2} \in \mathrm{C}$, число l є показником анізотропності системи (5) стосовно порядків за змінними $t, x_1, \ldots, x_p$.

Нехай $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{2n}(k)$ – такі λ-корені многочлена $f(\lambda, k) = \det(\sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_j(k)\lambda^{n-j})$, $\tilde{a}_j(k) = a_j(k)/k^{jl}$, що $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \geq \cdots \geq \operatorname{Re}\lambda_{2n}(k)$, а $\Lambda > \limsup_{k \in \mathrm{Z}^p} \operatorname{Re}\lambda_1(k)$.

Дискримінант многочлена $f = f(\lambda, k)$ за змінною λ подамо у вигляді відношення $\frac{\det S(f)}{\det a_0}$, де $S(f)$ – матриця Сильвестра многочлена f. Визначник $\det S(f)$ є формою степеня $(4n-1)$ коефіцієнтів многочлена f, які є лінійними функціями коефіцієнтів $a_{js}^{j_1 j_2}$ системи (5).

У лемах 2.2-2.4 з'ясовано структуру старших коефіцієнтів многочлена $\det S(f)$ як функції коефіцієнтів системи (5). Ці леми використано при доведенні леми 2.5.

Нехай $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_{2p})$, де $b_1, \ldots, b_p$ – коефіцієнти при D_j^{nl} виразу $a_n^{11}(D)$, і виразу $a_n^{22}(D)$.

Лема 2.5. *Нехай виконується умова* $a_0^{22} \det a_0 \neq 0$. *Тоді для довільних* $\varepsilon \in (0,1)$, $r > p$ *існує така множина* $W_\varepsilon \subset \mathrm{O}_R^{2p}$, *що* $\operatorname{meas} W_\varepsilon \leq \varepsilon$ *і для всіх векторів* $\bar{b} \in \mathrm{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ *справджується оцінка*

$$|\det S(f)| \geq \varepsilon^{2n-1} C_5^{-1} \bar{k}^{-(2n-1)r}, \quad k \in \mathrm{Z}^p \setminus \{0\}, \tag{6}$$

де $C_5 = (2\zeta(r)(p+1)^{nl} \pi^{2p} R^{4p-2})^{2n-1} (n |a_0^{22}|)^{-2n} |\det a_0|^{-n}$.

У лемі 2.6 встановлено метричну оцінку знизу для $|\det S(f)|$, якщо $a_0^{22} = 0$.

Нехай $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_{2p})$, де $b_1, \ldots, b_p$ – коефіцієнти при похідних $D_1^{nl-\theta_1}, \ldots, D_p^{nl-\theta_1}$ виразу $a_n^{11}(D)$, а $b_{p+1}, \ldots, b_{2p}$ – при похідних $D_1^{nl-\theta_2}, \ldots, D_p^{nl-\theta_2}$ виразу $a_n^{22}(D)$.

Лема 2.7. *Нехай виконуються умови* $\det a_0 \neq 0$, $|a_0^{11}| + |a_0^{22}| \neq 0$. *Тоді для довільних* $\varepsilon \in (0,1)$, $r > p$ *існує така множина* $W_\varepsilon \subset \mathrm{O}_R^{2p}$, *що* $\operatorname{meas} W_\varepsilon \leq \varepsilon$ *і для всіх векторів* $\bar{b} \in \mathrm{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ *та для всіх векторів* $k \in \mathrm{Z}^p \setminus \{0\}$ *справджується оцінка* $|\det S(f)| \geq \varepsilon^{2n-1} C_4^{-1} \bar{k}^{(1-2n)r + (1-3n)\theta_1 + (1-n)\theta_2}$.

Позначимо: $\mathbf{Y}_j = \mathbf{H}_{(n-j)l + (2n-1)r/2}(\Omega_{2\pi}^p)$, $r > p$, $\mathbf{X}_n = \mathbf{E}_{-\Lambda, l}^n(\mathrm{D}^p)$.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови леми* 2.5 *і* $\varphi_j \in \mathbf{Y}_j^2$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. *Тоді для майже всіх векторів* $\bar{b} \in \mathrm{O}_R^{2p}$ *існує єдиний розв'язок* u *задачі (5) із простору* $\mathbf{X}_n^2$. *Для довільного* $\varepsilon \in (0,1)$ *і для всіх векторів* $\bar{b} \in \mathrm{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$, *де* W_ε – *множина з леми* 2.5, *виконується нерівність* $\|u; \mathbf{X}_n^2\|^2 \leq \left(C_6\, \varepsilon^{-(2n-1)} + C_7\right) \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j; \mathbf{Y}_j^2\|^2$, *причому стала* C_6 *не залежить від коефіцієнтів* *системи (5).*

Якщо виконуються умови леми 2.7, то для існування розв'язку задачі (5) в просторі $\mathbf{X}_n^2$ від правих частин умов Коші слід вимагати вищу гладкість, ніж у теоремі 2.2.

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови леми* 2.7 *і* $\tilde{D}^{n\theta_1+(n-1)(\theta_1+\theta_2)/2}\varphi_j \in \mathbf{Y}_j^2$, $j=0,1,\dots,n-1$, *тоді для всіх векторів* $\bar{b} \in \mathrm{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ *існує єдиний розв'язок задачі (5) із простору* $\mathbf{X}_n^2$ *і виконується нерівність*

$$\left\| u; \mathbf{X}_n^2 \right\|^2 \le C_8(\varepsilon) \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \tilde{D}^{n\theta_1+(n-1)(\theta_1+\theta_2)/2}\varphi_j; \mathbf{Y}_j^2 \right\|^2,$$

де W_ε – множина з леми 2.7, стала C_8 не залежить від коефіцієнтів системи (5).

У **третьому** розділі дисертації досліджено задачі з нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Зокрема, у підрозділі 3.1 в області D^p розглянуто нелокальну багатоточкову задачу для хвильового рівняння

$$D_t^2 u - a^2(t)\Delta u = 0, \qquad \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_p^2, \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t \end{pmatrix}\Big|_{t=0} + \sum_{j=1}^{M}\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t \end{pmatrix}\Big|_{t=T_j} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де $a(t)$ – додатна неперервно диференційовна на $[0,T]$ функція, a, b, c, d та a_j, b_j, c_j, d_j, $j=1,\dots,M$, – комплексні числа, модуль яких не перевищує одиниці.

Позначимо: $\rho_k(t) = ia(t)\|k\|$, $Y_k = Y_k(t)$ – нормальна при $t=0$ фундаментальна матриця розв'язків системи диференціальних рівнянь

$$Y_{k'} = \rho_k(t)diag(1,-1)Y_k + a'(t)col(1,-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}Y_k / 2a(t), \quad k \in \mathrm{Z}^p,$$

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{M}\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(T_j) & -\rho_k(T_j) \end{pmatrix} Y_k(T_j)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix}^{-1}, k \in \mathrm{Z}^p.$$

Теорема 3.1. *Якщо коефіцієнти Фур'є* $\hat{\varphi}(k)$, $k \in \mathrm{Z}^p$, *функції* $\varphi = col(\varphi_1, \varphi_2)$ *задовольняють умову* $\left\| \mathrm{diag}(\rho_k(0),0)\Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k) \right\| \le C_{10}\tilde{k}^{\sigma}$, *де сталі* $C_{10} > 0$, $\sigma \in \mathrm{R}$ *не залежать від вектора* k, *то існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі (7), (8) такий, що* $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_{2\pi}^p)$, $D_t u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1 - 1}(\Omega_{2\pi}^p)$ *для всіх* $t \in [0,T]$, *де* $\sigma_1 < 1 - \sigma - p/2$.

Нехай $a'(t)$ змінює свій знак $(\ell - 1)$ разів на $[0,T]$, $\tilde{A} = A_{\max} / A_{\min}$, $A_{\max} = \max_{t \in [0,T]} a(t)$,

$A_{\min} = \min\limits_{t\in[0,T]} a(t)$, $A_0 = a(0)$, $\bar{\alpha} = (a,b,c,d,a_1,b_1,c_1,d_1,\ldots,a_M,b_M,c_M,d_M) \in \mathrm{O}^{4(M+1)}$.

Теорема 3.3. *Нехай* $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{r+1}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{r+1}(\Omega_{2\pi}^p)$, $r > p$. *Для довільного* $\varepsilon \in (0,1)$ *існує множина* $B_\varepsilon \subset \mathrm{O}^{4(M+1)}$, *міра* $meas B_\varepsilon$ *якої не перевищує* ε, *така, що для всіх* $\bar{\alpha} \in \mathrm{O}^{4(M+1)} \setminus B_\varepsilon$ *задача (7), (8) має єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$, *для якого* $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_1(\Omega_{2\pi}^p)$, $D_t u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)$ *при* $t \in [0,T]$ *і виконуються нерівності*

$$\left\| u(t,\cdot);\mathbf{H}_1(\Omega_{2\pi}^p)\right\| \le \varepsilon^{-1} C_{11} \left\|\varphi;\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_{2\pi}^p)\right\|,$$

$$\left\| D_t u(t,\cdot);\mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)\right\| \le \varepsilon^{-1} C_{12} \left\|\varphi;\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_{2\pi}^p)\right\|.$$

де $C_{11} = \sqrt{2} C_{12} / A_{\min}$, $C_{12} = 12\pi \tilde{A}^J C_{13} \max\{A_0, 1\}$, $J = [(\ell+1)/2]$, $C_{13} > 0$.

При доведенні теореми 3.3 використано результат теореми 3.2, у якій для всіх $\bar{\alpha} \in \mathrm{O}^{4(M+1)} \setminus B_\varepsilon$ встановлено оцінку малого знаменника $|\Delta(k)| \ge \varepsilon \overline{k}^{-r} / C_{13}$, $k \in \mathrm{Z}^p$.

У підрозділах 3.2 і 3.3 розглянуто задачі з нелокальними двоточковими та нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь другого та високого порядків за змінною t.

Зокрема, у підрозділі 3.3 в області D^p для строго гіперболічного рівняння

$$D_t^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,D) D_t^{n-j} u = 0, \quad n > 2, \tag{9}$$

вивчається задача з нелокальними багатоточковими умовами

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{j=1}^{n} B_{j\alpha}(D) D_t^{n-j} u|_{t=t_\alpha} = \varphi, \quad 0 \le t_1 < \cdots < t_M \le T, \tag{10}$$

де $A_j(t,D) = A_j^0(D) + A_j^1(t,D) = \sum\limits_{|s|=jl} A_{js} D^s + \sum\limits_{|s|\le(j-1)l} a_{js}(t) D^s$, $B_{j\alpha}(D) = \sum\limits_{|s|\le jl} B_{j\alpha s} D^s$, $A_{js} \in \mathrm{C}$, $a_{js} \in \mathbf{C}[0,T]$, $B_{j\alpha s} \in \mathrm{C}^n$. Зі строгої гіперболічності рівняння (9) випливає, що для кожного $k \in \mathrm{Z}^p$ всі корені $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ многочлена $\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n} A_j^0(k)\lambda^{n-j}$ є різними уявними числами.

Позначимо: $\mu_j(k) = -i\overline{k}^{-l}\lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,n$, $G(t,k) = diag(\exp(i\overline{k}^{l}\mu_j(k)t))_{j=1}^n$, $R(k) = (\mu_j^{\alpha-1}(k))_{\alpha,j=1}^n$, $k \in \mathrm{Z}^p$; $\Phi_j(t,D)$, $j = 1,\ldots,M$, – така фундаментальна матриця системи рівнянь $D_t\Phi = i\overline{D}^{l} G^{-1}(t,D) R^{-1}(D) A^1(t,D) R(D) G(t,D)\Phi$, що $\Phi_j(t_j,D) = G^{-1}(t_j,D) R^{-1}(D)$, де $A^1(t,D) = (A_{ij}^1(t,D))_{i,j=1}^n$, $A_{j,j+1}^1(t,k) = 1$, $j = 1,\ldots,n-1$, $k \ne 0$, $A_{nj}^1(t,k) = -(i\overline{k}^{l})^{-j} A_j^1(t,k)$, $j = 1,\ldots,n$, а решта елементів матриці $A^1(t,k)$ є нулями. Нехай $B_j(k)=(k^{-nl}B_{n\alpha}(k),k^{-(n-1)l}B_{(n-1),\alpha}(k),\dots,k^{-l}B_{1\alpha}(k))$, $j=1,\dots,M$, $k\in Z^p$, і $\Delta_j(D)=B_j(D)+\sum_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{M}B_\alpha(D)R(D)G(t,D)\Phi_j(t_\alpha,D)$, $j=1,\dots,M$.

Теорема 3.9. *Якщо* $\varphi\in(\mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega^p_{2\pi}))^n$ *та існує така послідовність* $\{j(k)\}_{k\in Z^p}$, *що* $j(k)\in\{1,\dots,M\}$ *і виконується умова*

$$|\det\Delta_{j(k)}(k)|\geq C_{14}k^{r},\qquad C_{14}>0,\qquad k\in Z^p, \tag{11}$$

то задача (9), (10) має в просторі $\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ *єдиний розв'язок, який неперервно залежить від* φ.

Виберемо послідовність $\{j(k)\}_{k\in Z^p}$ за правилом $j(k)=\alpha_q$, якщо $k\in K_q$, де $K_1\cup\ldots\cup K_p$ – деяке (побудоване в дисертації) розбиття множини Z^p. Нехай компоненти вектора $\bar{b}=(b_1,\dots,b_{np})$ визначаються рівностями: $b_{(m-1)n+j}=B^{\zeta^{(m-1)n+j}}_{j\alpha_m s^{(m-1)n+j}}$, де $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\{1,\dots,M\}^p$, $s^{(m-1)n+j}=(\underbrace{0,\dots,0}_{m-1},\theta^{(m-1)n+j},\underbrace{0,\dots,0}_{p-m})$, $j=1,\dots,n$, $m=1,\dots,p$, $\{\zeta^{(m-1)n+1},\dots,\zeta^{mn}\}=\{1,\dots,n\}$. Покладемо $\theta=\min_{j=1,\dots,p}\sum_{\sigma=1}^{n}\theta^{(j-1)n+\sigma}$.

Лема 3.5. *Якщо* $\det\Delta_{j(0)}(0)\neq0$, *то для довільних чисел* r *та* ε, *де* $r<\theta-n(p+(n+1)l)/2$, $0<\varepsilon<1$, *існує така множина* B_ε, *що* $measB_\varepsilon\leq\varepsilon$ *і для всіх векторів* $\bar{b}\in O^{pn}\setminus B_\varepsilon$ *виконується нерівність (11) зі сталою*

$$C_{14}=\varepsilon^{n/2}\min\left\{\frac{|\det\Delta_{j(0)}(0)|}{\varepsilon^{n/2}},\frac{n^{-n/2}\pi^{-n^2}p/2}{(p+1)^{(\theta^1+\ldots+\theta^n)/2}\zeta^{n/2}(2(\theta-r)/n-(n+1)l)}\right\}.$$

З теореми 3.9 та леми 3.5 випливає, що для всіх $\bar{b}\in O^{pn}\setminus B_\varepsilon$ виконується нерівність

$$\left\|u;\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)\right\|\leq\varepsilon^{-\frac{n}{2}}C_{15}\left\|\varphi;\mathbf{H}_{q\text{-}nl\text{-}\theta+r}(\Omega^p_{2\pi})\right\|,\quad C_{15}>0$$

У **четвертому** розділі дисертації вивчено задачі з лінійними інтегральними умовами для строго гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

У підрозділі 4.1 для хвильового рівняння (7) розглянуто задачу з умовами

$$\int_0^T\begin{pmatrix}b_{11}(\tau)&b_{12}(\tau)\\b_{21}(\tau)&b_{22}(\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(\tau,\cdot)\\D_tu(\tau,\cdot)\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}, \tag{12}$$

де $b_{ij} \in \mathbf{L}_1(0,T)$ і $\max\limits_{\alpha,\beta=1,2} |\int_0^T b_{\alpha,\beta}(\tau)d\tau| \le 1$.

Позначимо: $\Delta(k) = \int\limits_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(\tau) & -\rho_k(\tau) \end{pmatrix} Y_k(\tau)d\tau$, де Y_k – нормальна в точці $t=0$ фундаментальна матриця розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь $Y_{k'} = \rho_k(t)diag(1,-1)Y_k + (a'(t)/2a(t))col(1,-1)\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}Y_k$, $k \in \mathrm{Z}^p$. Нехай B_{ij} – середнє значення функції $b_{ij}(t)$, $b_{ij}^0(t) = b_{ij}(t) - B_{ij}$, $\mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$ – підпростір функцій із простору $\mathbf{L}_1(0,T)$ з нульовим середнім, тоді $\mathbf{L}_1(0,T) = \mathrm{R} \oplus \mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$. Покладемо $\bar{\alpha} = (B_{11}, B_{22}) \in \mathrm{O}^2$, $b_{11} = B_{11} + b_{11}^0$, $b_{22} = B_{22} + b_{22}^0$ і функції b_{11}^0, b_{12}, b_{21}, b_{22}^0 – фіксовані. Зобразимо матрицю $\Delta(k)$ у вигляді $\Delta(k) = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \Delta_1(k) + \Delta_2(k)$.

Теорема 4.2. *Нехай для деяких сталих* $C_{16} > 0$, $r_1 \in \mathrm{R}$ *та для всіх векторів* $k \in \mathrm{Z}^p$ *виконується умова*

$$|\det \Delta_1(k)| \ge C_{16}^{-1} k^{-r_1}. \tag{13}$$

Тоді для довільних чисел $r_2 > p$, $\varepsilon \in (0,1)$ та для всіх векторів $\bar{\alpha} \in \mathrm{O}^2 \setminus B_\varepsilon$, $k \in \mathrm{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\det \Delta(k)| \ge \varepsilon / 2C_{16}\pi^2 \zeta(r) k^{r_1+r_2},$$

де B_ε – деяка множина, міра Лебега якої не перевищує ε.

Теорема 4.3. *Нехай виконується умова (13),* $r_2 > p$ *і* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_{2\pi}^p)$. *Тоді для довільного* $\varepsilon \in (0,1)$ *існує така множина* B_ε, *міра Лебега якої не перевищує* ε, *що для всіх векторів* $\bar{\alpha} \in \mathrm{O}^2 \setminus B_\varepsilon$, *задача (7), (12) має єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$, *причому* $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_1(\Omega_{2\pi}^p)$, $D_t u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)$ *при* $t \in [0,T]$ *і виконується нерівність*

$$\max_{\alpha=0,1} \left\| D_t^\alpha u(t,\cdot); \mathbf{H}_{j-1}(\Omega_{2\pi}^p) \right\| \le \mathrm{e}^{-1} C_{17} \sum_{j=1}^{2} \left\| \varphi_j; \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_{2\pi}^p) \right\|$$

де стала C_{17} залежить від чисел T, r, C_{16} та функції $a(t)$.

У підрозділі 4.2 для рівняння

$$D_t^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,D) D_t^{n-j} u = f, \tag{14}$$

у якому $A_j(t,D) = A_j^0(t,D) + A_j^1(t,D) \equiv \sum\limits_{|s|=jl} a_{js}(t)D^s + \sum\limits_{|s|\le(j-1)l} a_{js}(t)D^s$, вивчено задачу із загальними інтегральними умовами

$$\int_0^T \sum_{j=1}^{n} b_{qj}(\tau, D) D_t^{j-1} u(\tau, \cdot) d\tau = \varphi_q, \qquad q = 1, \ldots, n. \qquad (15)$$

Нехай $\mu_j(t,k)$ – корені многочлена $\sum_{j=0}^{n} A_j^0(t, k/k)\mu^{n-j}$, $S(\tau,k) = R(\tau,k)G(\tau,k)\Phi(\tau,k)$, де $R(t,k) = (\mu_j^{\alpha-1}(t,k))_{\alpha,j=1}^n$, $G(t,k) = diag(\exp(k^l \int_0^t \mu_j(\tau,k)d\tau))_{j=1}^n$, $\Phi(\tau,k)$ – така фундаментальна матриця розв'язків системи рівнянь $\Phi'(t,k) = A^2(t,k)\Phi(t,k)$, що $\Phi(0,k) = G^{-1}(0,k)R^{-1}(0,k)$, $B(t,k) = (k^{(j-n-1)l} b_{ij}(t,k))_{i,j=1}^n$, $Q(k) = \int_0^T B(\tau,k)S(\tau,k)d\tau$,

$$A^2(t,k) = G^{-1}(t,k)R^{-1}(t,k)(k^l A^1(t,k)R(t,k)G(t,k) - D_t R(t,k)G(t,k)), \quad k \in \mathrm{Z}^p.$$

Теорема 4.5. *Нехай для деякого* $r \in \mathrm{R}$ *оператор* $(\det Q(D))^{-1}\tilde{D}^{-r}$ *обмежений у просторі* $\mathbf{H}_{q-nl}(\Omega_{2\pi}^p)$. *Тоді для довільних* $f \in \mathbf{C}([0,T], \mathbf{H}_{q-nl+r}(\Omega_{2\pi}^p))$, $\varphi \in \mathbf{H}_{q-nl+r}(\Omega_{2\pi}^p)$ *існує єдиний розв'язок* $u \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$ *задачі (14), (15), такий, що* $u = \tilde{D}^{-nl} U^1$, *де* U^1 *– перша компонента вектор-функції* U, *яка визначається формулою*

$$U(t,x) = S(t,D)(C(x) + \int_0^t S^{-1}(\tau,D)F(\tau,x)d\tau), F = col(0,\ldots,0,f),$$

$$C(x) = Q^{-1}(D)(\varphi - \int_0^T H(s,D)F(s,x)ds), \; H(s,D) = \int_s^T B(\tau,D)S(\tau,D)d\tau S^{-1}(s,D).$$

Вважаємо, що $Q(k)$ залежить від вектора $\bar{b} = (b_1(t),\ldots,b_{np}(t))$, де $b_{(d-1)n+j}(t)$ – коефіцієнт диференціального виразу $b_{jj}(t,D)$ при похідній $D_d^{s_d^j}$, $0 \le s_d^j \le (n-j+1)l$, $d = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,n$. Нехай $b_j(t) = \alpha_j \beta_j(t) + g_j^{\perp}(t)$, $j = 1,\ldots,np$, де $\beta_j \in \mathbf{L}_2(0,T)$, $g_j^{\perp} \in \mathbf{L}_2(0,T)$, $\beta_j \perp g_j^{\perp}$, L_j^{e} – множина функцій b_j таких, що $|\alpha_j| \le \sqrt{1 - \| g_j^{\perp}; \mathbf{L}_2(0,T)\|^2}$, $L^{\mathrm{e}} = L_1^{\mathrm{e}} \times \cdots \times L_{np}^{\mathrm{e}}$.

Позначимо: $B_j(t) = diag(\beta_{(j-1)n+\theta}(t))_{\theta=1}^n$, $Q_j(k) = \int_0^T B_j^{\beta}(\tau)S(\tau,k)d\tau$. Зафіксуємо коефіцієнти рівняння (14) та умов (15), за винятком коефіцієнтів $b_1(t),\ldots,b_{np}(t)$.

Лема 4.4. *Нехай виконується умова:* $\det Q_j(k) \ne 0$ *для всіх* $k \in K_j$, $j = 1,\ldots,p$. *Тоді для довільних* $\varepsilon > 0$ *і* $\gamma > np/2$ *існує така множина* $\mathrm{F}_\varepsilon \subset L^{\mathrm{e}}$, *що* $meas \mathrm{F}_\varepsilon \le \varepsilon$ *і для всіх векторів* $\bar{b} \in L^{\mathrm{e}} \setminus \mathrm{F}_\varepsilon$ *виконується нерівність*

$$|\det Q(k)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{C_{18}}\right)^{\frac{n}{2}} |\det Q_j(k)|\, k^{-\gamma-\frac{n(n-1)}{2}} |k_j|^{\sum\limits_{\theta=1}^{n} s_j^{\theta}},$$

де $C_{18} = measL^{e} \cdot \sum\limits_{j=1}^{p}(\sum\limits_{d=1}^{n} R_{jn-d}^{-2})(\sum\limits_{k \in K_j} k^{-\frac{2\gamma}{n}}) > 0$.

Теорема 4.6. *Якщо* $\det Q(0) \neq 0$ *і виконується нерівність* $|\det Q_j(k)| \geq C_{19} k^{-r}$, $k \in K_j$, $j = 1,\ldots,p$, *то для довільних чисел* $\varepsilon > 0$ *і* $\gamma > np/2$ *існує така множина* $\mathrm{F}_{\varepsilon} \subset L^{e}$, *що* $meas\mathrm{F}_{\varepsilon} \leq \varepsilon$ *і для всіх векторів* $\overline{b} \in L^{e} \setminus \mathrm{F}_{\varepsilon}$ *існує єдиний розв'язок* $u \in \mathbf{H}^{n}_{l,q}(\mathcal{D}^{p})$ *задачі (14), (15), у якій* $f \in \mathbf{H}^{0}_{l,q-nl+q_1}(\mathcal{D}^{p})$, $\varphi_j \in \mathbf{H}_{q-nl+q_1}(\Omega^{p}_{2\pi})$, $j = 1,\ldots,n$, *де* $q_1 = n(n-1)/2 + r + \gamma - \min\limits_{j=1,\ldots,p} \sum\limits_{\theta=1}^{n} s_j^{\theta}$. *Для цього розв'язку виконується нерівність*

$$\left\|u; \mathbf{H}^{n}_{l,q}(\mathcal{D}^{p})\right\|^{2} \leq C_{20}\left(\left\|f; \mathbf{H}^{0}_{l,q-nl+q_1}(\mathcal{D}^{p})\right\|^{2} + \sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j; \mathbf{H}_{q-nl+q_1}(\Omega^{p}_{2\pi})\right\|^{2}\right), C_{20} > 0.$$

У **додатку** доведено допоміжні результати про оцінки мір множин, які визначаються гладкими дійсними функціями. Нехай

$$\mathbf{C}^{n}_{\pm,\delta}[a,b] = \{\pm\frac{\delta}{n!}x^{n} \pm f(x) : f \in \mathbf{C}^{n}[a,b], \pm\min_{x\in[a,b]} f^{(n)}(x) \geq 0\}, \quad n \in \mathrm{N},$$

$G_n(\varepsilon,\delta,f) = \{x \in [a,b] : |f(x)| \leq \varepsilon\}$, де $\varepsilon, \delta > 0$, $f \in \mathbf{C}^{n}_{\pm,\delta}[a,b]$. Встановлено твердження про екстремальні властивості міри цієї множини.

Теорема А.1. *Якщо* ε *та* δ *– довільні додатні числа, то*

$$\sup_{f \in \mathbf{C}^{n}_{\pm,\delta}[a,b]} measG_n(\varepsilon,\delta,f) = \min(b-a, 4\sqrt[n]{\frac{n!}{2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}). \tag{16}$$

У наступній теоремі А.2 оцінюється міра довільної (вимірної) множини E.

Теорема А.2. *Нехай* E *– вимірна підмножина відрізка* $[a,b]$, *функція* f *належить простору* $\mathbf{C}^{n}[a,b]$ *і її похідна* $f^{(n)}(x)$ *не перетворюється в нуль на* $[a,b]$, *тоді*

$$measE \leq \min(4\sqrt[n]{n!/2} \cdot \sqrt[n]{\sup_{x\in E}|f(x)| / \min_{x\in[a,b]}|f^{(n)}(x)|}, b-a).$$

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню в області, що є декартовим добутком часового відрізка і багатовимірного просторового тора, задач з початковими умовами для лінійних безтипних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, задач з нелокальними багатоточковими умовами та задач з нелокальними інтегральними умовами для лінійних строго гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Розглянуті задачі є некоректними за Адамаром, їх розв'язність та властивості розв'язків пов'язані з проблемами малих знаменників.

Автором одержано такі нові результати:

1. Досліджено задачу з початковими умовами за часовою змінною для загальних нормальних лінійних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Встановлено умови гладкості на вихідні дані задачі Коші, за яких вона розв'язна у певному заданому функціональному просторі, і з'ясовано, коли ці умови є слабшими за відповідні умови Гельфанда-Шилова.

2. Встановлено умови коректної розв'язності у просторах Соболєва задач з нелокальними багатоточковими умовами за виділеною змінною та умовами періодичності за рештою координат для строго гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

3. Знайдено умови однозначної розв'язності у просторах Соболєва та вивчено властивості розв'язків задач з нелокальними інтегральними умовами для строго гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

4. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при дослідженні задач дисертації; при цьому встановлено точні оцінки для міри множини рівня гладкої функції зі знакосталою похідною високого порядку.

Робота має теоретичний характер. Її результати можна використати у подальших теоретичних дослідженнях задач з локальними та нелокальними (багатоточковими та інтегральними) умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними, а також у конкретних прикладних задачах, що моделюються за допомогою вказаних задач. Результати роботи стали джерелом нових задач метричної теорії діофантових наближень і можуть бути використані у подальшому розвитку цієї теорії.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Ільків В. С. Нелокальна двототочкова задача для строго гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами другого порядку / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Мат. вісник НТШ. – 2006. – **3**. – С. 69-83.
2. Ільків В. С. Крайова задача з нелокальними багатоточковими умовами для гіперболічного рівняння / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 66-81.
3. Ільків В. С. Про константу в лемі Пяртлі / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Вісник НУ «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 12-17.
4. Ільків В. С. Задача з нелокальними багатототочковими умовами для строго гіперболічних рівнянь високого порядку / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Мат. вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 107-115.
5. Ільків В. С. Дослідження умов розв'язності задачі Коші для рівнянь із частинними похідними за допомогою метричного підходу / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Нелинейные граничные задачи. – 2008. – № 18. – С. 86-106.
6. Ільків В. С. Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Вісник НУ «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 12-19.
7. Магеровська Т. В. Задача з інтегральними умовами за часовою змінною для рівнянь з частинними похідними високого порядку / Т. В. Магеровська // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 16-26.
8. Ilkiv V. S. Exact estimate for the measure of the level set of the modulus of a function with high-order constant-sign derivative / V. S. Ilkiv, T. V. Maherovska // Math. studii. – 2010. – **34**, № 1. – С. 57-64.
9. Ільків В. С. Гладкість розв'язків задач нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька, 24-28 вересня 2007, Дрогобич: тези доп. – Львів, 2007. – С. 113.
10. Ільків В. С. Точна стала в лемі Пяртлі / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Наук. конф. проф.-викл. складу ІПМФН: тези доп. – Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2007. – С. 13.
11. Магеровська Т. В. Задача з нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь / Т. В. Магеровська // XII-та Міжнар. наук. конф. М. Кравчука. – Київ, 2008. – С. 251.

12. Ільків В. С. Про гладкість розв’язку задачі з інтегральними умовами для строго гіперболічних рівнянь другого порядку / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Наук. конф. проф.-викл. складу ІПМФН: тези доп. – Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2008. – С. 17.
13. Илькив В. С. Задача с интегральными условиями для уравнений с частными производными / В. С. Илькив, Т. В. Магеровская // Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. С. Л. Соболева: тез. докл. – Новосибирск, 2008. – С. 143.
14. Ільків В. С. Задача з інтегральними умовами за часовою змінною для строго гіперболічних рівнянь другого порядку / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // IV Всеукр. наук. конф. «Нелін. пробл. Аналізу». – Івано-Франківськ, 2008. – С. 111.
15. Илькив В. С. Зависимость гладкости решения задачи Коши для уравнений с частными производными от их коэффициентов / В. С. Илькив, Т. В. Магеровская // Междунар. конф., посвящ. 70-летию со дня рожд. В. А. Садовничего. – Москва, 2009. – С. 172.
16. Ільків В. С. Крайові задачі для рівнянь у частинних похідних – задачі в умовах невизначеності / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Int. conf. «Problems of decision making under uncertainties (PDMU–2009)». – Східниця, 2009. – С. 111-112.
17. Ільків В. С. Точна константа у лемі Пяртлі / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Міжнар. конф. до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди. – Чернівці, 2009. – С. 56-58.
18. Ільків В. С. Про нерівність між нормами похідних та мірою області / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Int. Conf. «Funct. methods in approx. theory and operator theory III», dedicated to the memory of V. K. Dzyadyk, August 22–26, 2009, Volyn. – С. 48-49.
19. Ільків В. С. Про гладкість розв’язків задачі Коші для систем рівнянь з частинними похідними / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Український математичний конгрес. – 2009. – www.imath.fiev. ua/ congress 2009/Abstracts/ IlkivMager.pdf.
20. Ільків В. С. Умови гладкості розв’язку задачі Коші для систем ДРЧП / В.С.Ільків, Т. В. Магеровська // Наук. конф. проф.-викл. складу ІПМФН: тези доп. – Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2009. – С. 37.
21. Ільків В. С. Задача з інтегральними умовами для строго гіперболічних рівнянь / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // XIII-та Міжнар. наук. конф. М. Кравчука. – Київ, 2010. – С. 178.
22. Магеровська Т. В. Про співвідношення між нормами похідних та мірою області / Т. В. Магеровська, В. С. Ільків // Int. conf. «Approx. theory and appl.», in memory of N. P. Korneichuk, Dnepropetrovsk, June 14–17, 2010. – Dnepropetrovsk, 2010. – С. 61-62.

АНОТАЦІЯ

Магеровська Т. В. *Задачі з нелокальними умовами для гіперболічних рівнянь та задача з початковими умовами для безтипних рівнянь.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2011.

У дисертації досліджено задачі з нелокальними багатоточковими та нелокальними інтегральними умовами за виділеною змінною та умовами періодичності за рештою координат для строго гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, а також задачу з початковими умовами для безтипних лінійних рівнянь та систем рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами. Встановлено умови коректності та побудовано розв'язки вказаних задач у вигляді рядів Фур'є. Доведено нові метричні твердження про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові та вивченні властивостей розв'язків розглянутих задач.

Ключові слова: рівняння із частинними похідними, строго гіперболічні рівняння, некоректні задачі, початкові умови, нелокальні багатоточкові умови, нелокальні інтегральні умови, малі знаменники, міра Лебега.

АННОТАЦИЯ

Магеровская Т. В. *Задачи с нелокальными условиями для гиперболических уравнений и задача с начальными условиями для бестипных уравнений.* – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Львовский национальный университет имени Івана Франко, Львов, 2011.

В диссертация изучены задачи с начальными условиями для линейных бестипных уравнений и систем уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами, задачи с нелокальными многоточечными и задачи с нелокальными интегральными условиями для строго гиперболических уравнений с переменными коэффициентами.

В работе получены следующие новые результаты:

- изучена задача с начальными условиями по временной переменной для общих нормальных линейных уравнений и систем уравнений с частными производными и постоянными

коэффициентами. Установлены условия гладкости на исходные данные задачи Коши, при выполнении которых она разрешима в некотором заданном функциональном пространстве, и выделены случаи, когда эти условия слабее соответствующих условий Гельфанда-Шилова;

- установлены условия корректной разрешимости в пространствах Соболева задач с нелокальными многоточечными условиями по выделенной переменной и условиями периодичности по остальным координатам для строго гиперболических уравнений с переменными коэффициентами;
- найдены условия однозначной разрешимости в пространствах Соболева и изучены свойства рещений задач с нелокальными интегральными условиями для строго гиперболических уравнений с переменными коэффициентами;
- доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, возникших при исследовании задач диссертации; при этом установлены точны оценки для меры множества уровня гладкой функции со знакопостоянной производной высокого порядка.

Работа имеет теоретическое значение. Ее результаты можно использовать в дальнейших теоретических исследованиях задач с локальными и нелокальными (многоточечными и интегральными) условиями для уравнений и систем уравнений с частными производными, а также в конкретных прикладных задачах, которые моделируются с помощью указанных задач. Результаты работы стали источником новых задач метрической теории диофантовых приближений и могут быть использованы в дальнейшем развитии этой теории.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, строго гиперболические уравнения, некорректные задачи, начальные условия, нелокальные многоточечные условия, нелокальные интегральные условия, малые знаменатели, мера Лебега.

ABSTRACT

Maherovska T. V. *Nonlocal boundary-value problems for hyperbolic equations and initial problem for typeless equations.* – Manuscript.

Dissertation for the degree of Candidat of physico-mathematical sciences on the speciality 01.01.02 – differential equations. – Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 2011.

In the dissertation the nonlocal problems with multipoint and integral conditions on marked variable t and periodicity conditions on the rest coordinates for hyperbolic equations with variable coefficients, and also the initial problem for typeless equations and systems of equations with constant coefficients of the arbitrary order are considered. The conditions of existence of the unique solution of theses problems are established. The solutions of theses problems are constructed in the form of Fourier series. The new metric theorems about estimates from below of small denominators, that appear in construction of solutions of the problems, are proved.

Keywords: partial differential equations, strongly hyperbolic equations, ill-posed problems, initial conditions, nonlocal multipoint conditions, nonlocal integral conditions, small denominators, Lebesgue measure.

Підписано до друку 6.05.2011 р.

Формат 64×90/16. Гарнітура Times New Roman.

Папір ксероксний. Друк на різографі.

Умовн. Друк. Арк. 0,9. Наклад 100 прим.

Друк ПП «Арал»

м. Львів, вул. Козельницька, 4