Львівський державний університет внутрішніх справ

На правах рукопису

Магеровська Тетяна Валеріївна

УДК 517.946+511.2

Задачі з нелокальними умовами для гіперболічних рівнянь та задача з початковими умовами для безтипних рівнянь

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук,

професор **Ільків В. С.**

Львів — 2011

ЗМІСТ

Стор.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел

$\mathbb{N}$ — множина цілих додатних чисел

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел

$\{y \in Y : P(y)\}$ — підмножина елементів із множини Y із властивістю $P(y)$

$x = (x_1, \dots, x_p)$ — довільна точка із простору $\mathbb{R}^p$

$(t, x) = (t, x_1, \dots, x_p)$, де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$

$dx = dx_1 \cdots dx_p$

$\partial/\partial x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_p)$

$s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$

$|s| = |s_1| + \dots + |s_p|$

$\widehat{s} = (s_0, s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$

$|\widehat{s}| = |s_0| + |s_1| + \dots + |s_p|$

$k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$

$|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$

$(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_p x_p$

$\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_p^2}$

$\widetilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \dots + k_p^2}$

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p) \in \mathbb{R}_+^p \backslash \{(0)\}$

Ω_ω^p — p-вимірний тор, утворений шляхом ототожнення протилежних граней паралелепіпеда $\{x \in \mathbb{Z}^p : 0 \le x_r \le \omega,\ r = 1, \dots, p\}$

$\Omega_{2\pi}^p$ — тор Ω_ω^p при $\omega_r = 2\pi,\ r = 1, \dots, p$

$\mathcal{D}_\tau^p = [0, \tau] \times \Omega_{2\pi}^p$, де $\tau > 0$ — деяке число

$\mathcal{D}^p = \mathcal{D}_T^p$, де $T > 0$ — деяке число

$\operatorname{meas} M$, $|M|$ — міра множини M

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

l — зведений порядок рівняння або системи

ВСТУП

Актуальність теми. Крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними мають широке застосування у математичному моделюванні різноманітних процесів у природі. Коефіцієнти диференціальних рівнянь та параметрів крайових умов пов'язані з певними характеристиками процесу, від яких залежить розв'язок задачі, зокрема його диференціальні властивості.

Дослідження впливу коефіцієнтів та параметрів задачі на її розв'язність, динаміку розв'язків та їх гладкість є актуальними, але малодослідженими питаннями, особливо у задачах для рівнянь з частинними похідними. Вони тісно переплетені з методом виключення та задачами комп'ютерної алгебри і символьних обчислень.

У роботі вивчаються три типи задач: з *початковими* умовами (задача Коші), з *нелокальними* (*багатоточковими* та *інтегральними*) умовами.

Розв'язність вказаних задач вивчалася багатьма авторами або при певній спеціалізації параметрів задачі, або для всіх значень параметрів, що приводить до сильніших умов розв'язності для майже усіх значень цих параметрів.

Вагомий внесок у розвиток теорії задачі Коші для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними зробили: І. Г. Петровський, А. Фрідман, Г. Є. Шилов, І. М. Гельфанд, С. Д. Ейдельман, Л. Н. Слободецький, С. Теклінд, М. Л. Горбачук, С. Д. Івасишен, В. О. Солонников, М. І. Матійчук, В. В. Городецький, В. А. Літовченко та ін. Ними одержано ряд важливих результатів, пов'язаних з коректною розв'язністю задачі Коші у різних функціональних просторах, інтегральними зображеннями розв'язків, методами дослідження фундаментальної матриці розв'язків. Знайдено класи єдиності та коректності розв'язку для систем зі сталими коефіцієнтами, встановлено теореми про коректну розв'язність задачі Коші у класах обмежених функцій у випадку коефіцієнтів, що залежать лише від просторових змінних. Досліджено властивості локалізації та стабілізації розв'язків, задачі з узагальненими початковими даними типу ультрарозподілів Жевре тощо.

Аналогічні результати встановлено для псевдодиференціальних рівнянь та систем, а також диференціально-операторних рівнянь і рівнянь з частинними похідними у комплексній області (М. С. Агранович, М. Й. Вишик, Г. І. Ескін, Ю. А. Дубінський, Я. В. Радино, С. Р. Умаров, Б. Л. Гуревич).

Особливою увагою в останні десятиліття користуються задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. У таких задачах умови задають лінійні комбінації значень невідомих функцій та похідних від них на двох або більше гіперповерхнях. Загальне означення нелокальних умов та опис багатьох нелокальних задач (задач зі зміщеннями) подано А. М. Нахушевим. У різних аспектах такі задачі вивчалися у працях О. О. Дезіна, В. М. Борок, М. Й. Юрчука, Р. К. Романка, А. В. Біцадзе, О. А. Самарського, О. А. Скубачевського, М. І. Матійчука.

Встановлено, що нелокальні умови необхідні для описання розв'язних розширень диференціальних операторів зі сталими коефіцієнтами. Знайдено умови розв'язності нелокальних задач для диференціальних рівнянь класичних типів, узагальнень цих рівнянь, що зберігають головні властивості типу та для диференціально-операторних рівнянь. Вивчено спектральні властивості, зображення розв'язків однорідних та неоднорідних задач (П. І. Каленюк, З. М. Нитребич, Я. О. Баранецький).

Інтегральні умови за виділеною (часовою) змінною можна розглядати як узагальнення багатоточкових нелокальних умов, коли кількість точок задання розв'язку є континуумом.

Задачі з інтегральними умовами часто зустрічаються під час описання багатьох процесів, що стосуються сучасних прикладних проблем у фізиці, біології, демографії, прогнозування погоди тощо. При цьому розглядаються гіперболічні чи параболічні рівняння, для яких ставляться як прямі, так і обернені задачі.

Методи дослідження різних задач з інтегральними умовами розроблені у роботах: А. М. Нахушева, В. М. Борок, Л. В. Фардіголи, З. О. Мельника, В. М. Кирилича, М. І. Іванчова, І. Я. Кміть, у яких встановлено умови розв'язності задач, необхідні і достатні умови існування та єдиності розв'язків, а також властивості розв'язків.

Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними, взагалі, є некоректними в сенсі Адамара, їх розв'язність залежить від малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків цих задач. Вивчення нелокальних задач за допомогою метричного підходу до проблеми малих знаменників та встановлення оцінок знизу цих знаменників започатковано у науковій школі чл.-кор. НАН України Б. Й. Пташника. Для багатьох частинних випадків нелокальних задач для рівнянь зі сталими коефіцієнтами отримано розв'язність у просторах Соболєва, а для ряду загальніших нелокальних задач для рівнянь зі змінними коефіцієнтами у просторах функцій із експоненційним спаданням коефіцієнтів Фур'є. Проте не досліджувалася розв'язність нелокальних задач із загальними багатоточковими та інтегральними умовами у просторах Соболєва для рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами та не вивчалися умови підвищення гладкості розв'язків задачі Коші, яким присвячено дисертаційну роботу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана із науковими дослідженнями кафедри обчислювальної математики та програмування Національного університету „Львівська політехніка“. Її результати включені у наукові звіти про виконання державних тем „Методи розв'язування крайових задач з некласичними умовами для рівнянь із частинними похідними“ (номер держреєстрації 0194U029571) та „Мішані задачі та задачі за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними“ (номер держреєстрації 0109U001157).

Мета і задачі дослідження. Дослідити розв'язність, побудувати розв'язки для задач із локальними та нелокальними умовами для безтипних лінійних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними довільного порядку в області, що є декартовим добутком відрізка та багатовимірного тора, розв'язність яких є нестійкою і пов'язана з проблемами малих знаменників, та встановити гладкість розв'язків задач. Розробити методику встановлення коректності таких задач. Досягнення цієї мети полягає у:

- вивченні впливу малих знаменників та встановленні умов розв'язності:
  - задачі Коші для безтипних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами;
  - задач з багатоточковими нелокальними умовами для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами;
  - задач з інтегральними умовами для рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами гіперболічного типу;
- виборі функціональних просторів для кожної із поставлених задач;
- доведенні теорем метричного характеру про оцінки знизу малих знаменників, які виникають під час побудови формальних розв'язків задач, і, на підставі цих оцінок, встановленні умов існування розв'язків та їх гладкості.

Об'єкт дослідження: задача Коші і нелокальні задачі з багатоточковими та інтегральними умовами для лінійних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними.

Предмет дослідження: умови коректності задач, що розглядаються, гладкість розв'язків та аналіз метричних оцінок знизу малих знаменників, які зустрічаються у задачах.

Методи дослідження: у дисертації використано результати та методи теорії звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, лінійної алгебри, функціонального аналізу та метричної теорії чисел. При побудові явних формул для розв'язків нелокальних задач використовується метод відокремлення змінних. За допомогою сучасних методів метричної теорії діофантових наближень отримано оцінки знизу малих знаменників, що виникли у задачах, які розглядаються в роботі.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна роботи визначається таким:

- вперше використано метричний підхід під час дослідження гладкості розв'язків задачі Коші;
- встановлено розв'язність у просторах Соболєва нелокальних задач для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами;
- вперше застосовується розбиття у пряму суму просторів коефіцієнтів інтегральних умов, за допомогою якого встановлено умови коректності задачі з інтегральними умовами;
- встановлено нові метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають у задачах, які розглядаються у дисертації; отримано точну оцінку міри області, обмеженої лінією рівня гладкої функції зі знакосталою похідною високого порядку.

Для розв'язків задач побудовано явні формули у вигляді рядів Фур'є чи дії деяких лінійних операторів на праві частини задач, що розглядаються.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати у подальших теоретичних дослідженнях крайових задач для рівнянь із частинними похідними, а також під час дослідження практичних завдань, які моделюються такими задачами.

Особистий внесок здобувача. Дослідження, представлені в дисертації, є результатом самостійної роботи автора. У спільних роботах науковому керівнику належить постановка задач і аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на: Міжнародній науковій конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2007), Міжнародній конференції до 100-річчя С. Л. Соболєва (Новосибірськ, 2008), IV всеукраїнській науковій конференціїї „Нелінійні проблеми аналізу“ (Івано-Франківськ, 2008), Міжнародній конференції до 70-річчя В. А. Садовничого (Москва, 2009), Міжнародній конференції „Problems of decision making under uncertainties (PDMU–2009)“(Східниця, 2009), Міжнародній конференції до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди (Чернівці, 2009), Міжнародній конференції „Functional methods in approximation theory and operator theory III“ до 70-річчя В. К. Дзядика (Світязь, 2009), Українському математичному конгресі (Київ, 2009), Міжнародній конференції ім. акад. М. П. Кравчука (Київ, 2010), Міжнародній конференції „Approx. theory and appl.“ до 90-річчя М. П. Корнейчука (Дніпропетровськ, 2010) та наукових конференціях професорсько-викладацького складу ІПМФН Національного університету „Львівська політехніка“ (Львів, 2007–2009), на Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники Б. Й. Пташник, П. І. Каленюк, М. І. Іванчов, Львів, 2010), засіданні семінару ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники член-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. Пташник Б. Й. д. ф.-м. н., пр. н. с. Пелих В. О., Львів, 2010), на науковому семінарі факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (керівник І. М. Черевко, Чернівці, 2010), на семінарі з диференціальних рівнянь Національного університету „Львівська політехніка“ (керівник П. І. Каленюк, Львів, 2010), засіданнях кафедри обчислювальної математики та програмування Національного університету „Львівська політехніка“ та кафедральному семінарі (керівники В. С. Ільків, А. Ф. Обшта, Я. М. Чабанюк, Львів, 2009–2010).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 8 статтях у фахових періодичних виданнях, які входять до переліку ВАК України, а також додатково висвітлено у 14 тезах наукових конференцій.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і має обсяг 148 сторінок, а також містить додаток на 8 сторінках. Список використаних джерел налічує 165 найменувань.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Вперше задачу з початковими умовами (задачу Коші) для рівнянь з частинними похідними поставив і розв'язав О. Коші у 1842 р., знайшовши достатні умови розв'язності в класі аналітичних функцій. Незалежно такі ж умови розв'язності пізніше встановила С. Ковалевська. У роботі [98] доведено, що умови Коші–Ковалевської є також необхідними у випадку одного рівняння. Загальніші достатні умови Лере–Волевича встановлено для коректної розв'язності систем диференціальних рівнянь [90]. Розв'язність задачі Коші у просторах аналітичних функціоналів досліджено у роботах [104].

У загальному випадку комплексної задачі Коші для систем рівнянь з частинними похідними опис систем, для яких гарантована загальна розв'язність задачі Коші, встановлена Ю.А. Дубінським [43].

У класах цілих функцій єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності дослідив Е. Хольмгрен [161] за допомогою ідеї використання двоїстої задачі, а А.М. Тихонов [130] встановив, що для цього рівняння класом єдиності є гаусова шкала росту.

Важливі результати для рівнянь та систем еволюційних рівнянь у класах цілих функцій скінченного порядку здобуті в роботах І.Г. Петровського [106], І.М. Гельфанда, Г.Є. Шилова [24].

Фундаментальний вклад у розв'язування задачі Коші внесли Ж. Адамар [159], І.Г. Петровський [105], С.Л. Соболєв [129]. Метод інтегралів енергії розроблено у працях [35, 129] для строго гіперболічних рівнянь, а для ширшого класу рівнянь — у роботі [18].

Лінійні гіперболічні рівняння та особливості їх розв'язків розглянуто у праці [90]. Розв'язність задачі Коші у класах гіперфункцій для нестрого гіперболічних рівнянь вивчалася у роботі [150], а у класах ультарозподілів нескінченного порядку сингулярності для рівняння теплопровідності у [144].

Розв'язування задачі Коші за допомогою півгруп є одним з універсальних підходів до цього в задачі та суттєвою частиною досліджень у даній тематиці (див. книги [86, 134] та бібліографію в них).

Задача Коші для диференціально-операторних рівнянь високого порядку вивчалася у працях [41, 160].

Обширні дослідження задачі Коші проведено для параболічних рівнянь. Найбільш загальні результати для параболічних за Петровським рівнянь отримано в роботах І.М. Гельфанда та Г.Є. Шилова [22, 23], Б.Л. Гуревича [39], С.Д. Ейдельмана [142], М. С. Аграновича та М. Й. Вішика [2]. Подальші дослідження виконано у працях М. Л. Горбачука [32,34], В. В. Городецького [36] та інших авторів.

Властивості розв'язків задачі Коші для параболічних за Ейдельманом систем досліджено у ряді праць С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, М.І. Матійчука [47–49, 95, 97, 158], а для систем параболічних за Шиловим — у працях І.М. Гельфанда і Г.Є. Шилова [22, 23].

Задача Коші для абстрактних диференціально-операторних рівнянь вивчалася у роботах [12, 31, 37, 86]: детальний огляд цих праць наведено у статті [33].

Коректну розв'язність задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних систем у просторах нескінченно диференційовних функцій досліджено у працях багатьох авторів (див., наприклад, роботи В.В. Городецького [37], В.А. Літовченка [91]).

Задачі з нелокальними багатоточковими умовами досліджено у роботах В. М. Борок та її учнів [5,92,137] у безмежному за просторовими змінними шарі для лінійних еволюційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та для навантажених еволюційних рівнянь [13]. Встановлено класи єдиності та розв'язності таких задач. Показано, що умови коректності залежать від арифметичної природи точок, у яких задаються значення розв'язку. Проведено порівняльний аналіз задач з нелокальними та локальними багатоточковими умовами і навантаженими рівняннями та рівняннями без навантажень.

Класи існування та класи єдиності багатоточкових задач у безмежному шарі, явні формули для розв'язків встановлено у роботах П. І. Каленюка та його учнів [78, 79]. Описано і обґрунтовано процедуру (З. М. Нитребич [103]) граничного переходу від багатоточкової задачі до задачі Коші. Використовується спеціальний операційний метод, побудований за узагальненою схемою відокремлення змінних [78]. У класах функцій, що задовольняють умову Ліпшиця, досліджено у необмеженому шарі задачі з багатоточковими (локальними та нелокальними) умовами для систем квазілінійних гіперболічних рівнянь розглянуто у роботах [145, 155, 165].

Доведено існування, єдиність та неперервну залежність від правих частин задачі розв'язку на основі теореми Банаха про нерухому точку.

Для диференціально-операторних рівнянь задачі з багатоточковими умовами вивчалися у роботах багатьох авторів [1, 40, 120, 136]. Зокрема О. О. Дезін [40] вказав на необхідність використання нелокальних багатоточкових умов для опису розв'язних розширень диференціальних операторів, що породжені загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Аналогічні питання опису правильних розширень для диференціальних рівнянь високого порядку з операторними коефіцієнтами вивчав В. К. Романко [120].

Встановленню умов існування та єдиності розв'язку обернених задач для параболічного рівняння другого порядку і крайової умови та умови перевизначення нелокального вигляду присвячено роботи М. І. Іванчова [45, 61].

У роботах І. Д. Пукальського досліджено нелокальні задачі для лінійних неперервно параболічних рівнянь з виродженнями [114–116].

Також для параболічних рівнянь нелокальні багатоточкові задачі вивчалися у роботах [87, 96].

Вивчення умов коректної розв'язності локальних і нелокальних багатоточкових задач для псевдодиференціальних рівнянь та систем рівнянь проведено в роботах [58, 113, 132]. У цих працях використовується теорія Ю. А. Дубінського [42] псевдодиференціальних операторів з аналітичними символами у довільній області багатовимірного евклідового простору.

Задачі з нелокальними інтегральними умовами для рівнянь з частинними похідними виникають у деяких теоріях, що моделюють певні практичні задачі. Зокрема, теорії поширення тепла [4, 16, 60, 83, 140, 151], вологопереносу у деяких середовищах [100], технологічних процесів [99], дифузії у турбулентній плазмі [122], обернених задач [46], математичної біології [101], демографії [9] тощо.

Використання інтегральних умов у багатьох випадках є необхідним, оскільки неможлива постановка локальних крайових задач [94], тому задачі з такими умовами активно вивчаються останнє півстоліття.

Для одновимірного рівняння теплопровідності інтегральна умова пов'язується з відомою загальною кількістю тепла частини стержня, яка прилягає до одного з його кінців.

Розв'язність задачі для цього рівняння з умовами Діріхлє на частині межі області та інтегральною умовою досліджено у роботі [151]. Для встановлення однозначної розв'язності використано метод теплових потенціалів. За допомогою цього ж методу досліджено мішану задачу з інтегральною умовою для загального параболічного рівняння [83]. Встановлено існування єдиного неперервного в усій області розв'язку задачі за умов гельдеровості коефіцієнтів рівняння та функцій, що задають область. Розглядаються випадки обмеженої та необмеженої області та застосовується метод послідовних наближень до отриманої системи сингулярних рівнянь Вольтерра.

Метод розвинення функцій у ряд за системою власних і приєднаних функцій використано при дослідженні у прямокутнику несамоспряженої задачі з інтегральною умовою для рівняння теплопровідності [60]. Встановлено двосторонні апріорні оцінки у різних просторах і доведено існування неперервного розв'язку.

Такі ж задачі для випадків, коли у рівнянні теплопровідності замість другої похідної використовується самоспряжений оператор другого порядку, або оператор Бесселя, досліджено у роботах [10, 143].

Вивчення задач пов'язане з методом енергетичних нерівностей, введенням спеціальних вагових банахових просторів, доведенням гомеоморфізму між цими просторами, що його здійснює оператор задачі.

Задачу керування розподілом температури у тонкому нагрітому стержні за умови підтримання нульової температури на лівому кінці стержня і нульової загальної кількості тепла стержня досліджено у роботі [4]. Керування здійснюється шуканим початковим розподілом температури і полягає у мінімізації (квадратичного щодо розв'язку рівняння теплопровідності для деякого фіксованого часу) функціоналу методом квазіобертання [88]. Цей метод використовує заміну оператора теплопровідності за зворотнім часом, який є некоректним, близьким до нього коректним оператором. Близькість операторів регулюється окремим параметром, значення якого спрямовується до нуля. Так поставлена задача вже є коректною за Адамаром і значення функціоналу прямує до нуля разом зі значенням параметра.

При дослідженні процесів керування термопружними деформаціями [16] виникає у прямокутній області задача з інтегральними крайовими умовами для одновимірного параболічного рівняння, яку розглянув М. І. Іванчов у роботі [46]. Умови існування та єдиності класичного розв'язку встановлено методом зведення до еквівалентної першої крайової задачі для параболічного рівняння.

За допомогою функції Гріна досліджено крайову задачу з інтегральною умовою для звичайного диференціального рівняння другого порядку [123]. Знайдено необхідну та достатню умову існування розв'язку задачі за умови існування розв'язку деякої задачі з локальними крайовими умовами. Наближені розв'язки будуються на основі різницевих схем, для них встановлено збіжність до точного розв'язку задачі при зменшенні до нуля кроку різницевої схеми.

При моделюванні процесів очищення кремнію від домішок виникає задача з крайовою інтегральною умовою для рівняння теплопровідності, яка досліджена у роботах [99]. Мішані задачі з умовою Діріхлє та умовою Неймана для одновимірного та двовимірного однорідного рівняння дифузії розглянуто у роботах [152, 153, 157].

Абстрактні еволюційні рівняння з умовою, що містить інтеграл Рімана–Стільтьєса з мірою, визначеною функцією обмеженої варіації, досліджуються у статті [131]. Розв'язок шукається у банаховому просторі, в якому діє оператор з еволюційного рівняння, який є лінійним і замкненим. Встановлено коректність задачі при деяких додаткових умовах на оператор.

Класичний розв'язок у смузі для багатовимірного рівняння теплопровідності, середнє за часом якого збігається із заданою функцією, досліджено у роботах [109, 110]. Вивчається єдиність та існування розв'язку в експоненційних шкалах просторів двох типів; встановлено межі між єдиністю та неєдиністю і між розв'язністю та нерозв'язністю задачі.

У роботах [138, 139] досліджено у смузі нелокальні задачі із загальною інтегральною умовою за часовою змінною для системи еволюційних рівнянь. Вивчено критерії коректної розв'язності, сильної коректності, властивість квазірегулярності, вплив параметрів задачі на властивості її розв'язків (при цьому використано теорему Зайденберга–Тарського [133]). Класи єдиності та критерії коректності цієї задачі сформульовано у працях [15, 92].

За допомогою диференціально-символьного методу [80] знайдено формули [81] для елементів ядра Гладкість розв'язків крайових задач для рівнянь із частинними похідними (квазімногочленів) однорідної задачі з інтегральною умовою для еволюційного рівняння, що визначається диференціальним виразом зі сталими коефіцієнтами і цілим аналітичним символом.

Задачу з двома диференціально-інтегральними умовами за просторовою змінною для рівняння теплопровідності у прямокутнику розглянуто в роботі [102]. Вона вивчається за допомогою способу зведення до відповідної крайової задачі для системи навантажених рівнянь з частинними похідними.

Для лінійних і квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку у прямокутній області досліджено мішані задачі з початковими даними, граничною умовою Неймана та нелокальною інтегральною умовою [117, 118]. Існування узагальненого розв'язку доводиться методом Гальоркіна з використанням апріорних оцінок, а у випадку квазілінійного рівняння — за допомогою принципів нерухомої точки Банаха та Шаудера за виконання умов Каратеодорі та Ліпшиця для правої частини рівняння.

Із задачею Гурса [30] пов'язують задачу з інтегральними умовами за обома змінними для рівняння з частинними похідними другого порядку у прямокутнику, а для хвильового рівняння з [19] спеціальними умовами спряження на характеристиці. Використовується функція Рімана задачі Гурса, альтернатива Фредгольма для відповідної системи інтегральних рівнянь, а також властивості гіпергеометричної функції Гауса та її інтегральне зображення.

У роботах [7, 8, 146] розглянуто мішані задачі для одновимірного та багатовимірного хвильового рівняння з класичними початковими умовами та крайовими умовами, одна з яких — інтегральна. Досліджується розв'язність задач у просторах Соболєва та класична розв'язність; окремо розглянуто рівняння з сингулярним коефіцієнтом та інтегральною умовою з ядром. Встановлено умови коректності задач.

РОЗДІЛ 2
ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТРИЧНОГО ПІДХОДУ

2.1. Задача Коші для рівняння з частинними похідними

Задача Коші для рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами досліджувалась у роботі Гельфанда і Шилова [24], в якій за допомогою операторного методу і методу Фур'є доведено існування та єдиність розв'язку, а також встановлено відповідні класи існування та єдиності розв'язку цієї задачі. Отримані результати є точними, залежать від (приведеного) порядку диференціального рівняння, але не залежать від його коефіцієнтів та кількості просторових змінних.

У даному розділі за допомогою метричного підходу [112,113] отримано результати щодо умов розв'язності і гладкості розв'язку задачі Коші для „майже всіх" диференціальних рівнянь у випадку просторів 2π-періодичних за просторовими змінними функцій; зокрема показано, що гладкість розв'язків залежить як від порядку рівняння, так і від кількості просторових змінних.

2.1.1. Основні позначення. Нехай $\mathcal{D}^p = [0,T] \times \Omega_{2\pi}^p$, де $\Omega_{2\pi}^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор просторових змінних $x = (x_1, \ldots, x_p)$, t – часова (виділена) змінна, $t \in [0,T]$, $T > 0$.

Простори $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $h \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, та $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, є поповненнями множини скінченних тригонометричних сум $v(x) = \sum_k \widehat{v}_k e^{i(k,x)}$ відповідно за нормами

$$\|v; \mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(2h\widetilde{k}^l)|\widehat{v}_k|^2\Big)^{1/2}, \ \|v; \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q}|\widehat{v}_k|^2\Big)^{1/2},$$

де $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(k,x) = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$, $\widetilde{k} = (1 + k_1^2 + \cdots + k_p^2)^{1/2}$.

Оператор $F(D)$, де $D = (D_1, \dots, D_p)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, діє на функцію $v(x) = \sum_k \widehat{v}_k e^{i(k,x)}$ за правилом $F(D)v(x) = \sum_k F(k)\widehat{v}_k e^{i(k,x)}$.

Простір $\mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$, $\Lambda \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, складається з функцій $u = u(t,x)$, похідні $(1-\Delta)^{l(n-j)/2} D^j_t u(t,\cdot)$, $j = 0, 1, \dots, n$, яких при $t \in [0,T]$ належать до простору $\mathbf{E}_{\Lambda t,l}(\Omega^p_{2\pi})$, причому на відрізку $[0,T]$ є неперервною функція $\|(1-\Delta)^{l(n-j)/2} D^j_t u(t,\cdot); \mathbf{E}_{\Lambda t,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2$, де Δ — оператор Лапласа від p змінних, $\Delta = -(D_1^2 + \dots + D_p^2)$, $D_t = \partial/\partial t$;

$$\|u; \mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \sup_{t\in[0,T]} \|(1-\Delta)^{l(n-j)/2} D^j_t u(t,\cdot); \mathbf{E}_{\Lambda t,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2.$$

2.1.2. Рівняння першого порядку за часовою змінною.

У цьому випадку для довільної функції $\varphi_0 \in \mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi})$ існує єдиний розв'язок $u = u(t,x)$ задачі Коші

$$D_t u - (1-\Delta)^{l/2} u = 0, \qquad l/2 \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0; \tag{2.2}$$

цей розв'язок задається формулою

$$u(t,x) = \exp\big((1-\Delta)^{l/2} t\big)\varphi_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(t\widetilde{k}^l)\widehat{\varphi}_0(k) e^{i(k,x)}, \tag{2.3}$$

де $\varphi_0 = \varphi_0(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\varphi}_0(k) e^{i(k,x)}$, $\widehat{\varphi}_0(k) \in \mathbb{C}$ — коефіцієнти Фур'є функції φ_0.

При фіксованому $t = h \in [0,T]$ функція $u(h,\cdot) \in \mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})$ і виконується рівність

$$\|u(h,\cdot); \mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(-2h\widetilde{k}^l) |\exp(h\widetilde{k}^l)\widehat{\varphi}_0(k)|^2 =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\widehat{\varphi}_0(k)|^2 = \|\varphi_0; \mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi})\|^2.$$

Аналогічне твердження правильне для кожного рівняння

$$D_t u = a_1(D) u, \tag{2.4}$$

де $a_1(D) = \sum\limits_{|s|\le l} a_{1s}D^s$, l — зведений порядок рівняння (2.4) [24, с. 51, 83], $a_{1s} \in \mathbb{C}$, $|a_{1s}| \le R$, R — довільне фіксоване додатне число.

Справді, нехай $\widetilde{a}_1(k) = a_1(k)/\widetilde{k}^l$, $S(\alpha) = \{k \in \mathbb{Z}^p : \operatorname{Re}\widetilde{a}_1(k) > \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, число Λ вибрано так (наприклад, $\Lambda > \limsup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{Re}\lambda_1(k)$), що $S(\Lambda)$ — скінченна множина.

Зокрема для рівняння (2.1), яке є частинним випадком рівняння (2.4) при $a_1(D) = \big(1 + D_1^2 + \cdots + D_p^2\big)^{l/2}$, де l — парне додатне число, маємо $\widetilde{a}_1(k) = 1$, $\Lambda = 1$, $S(\Lambda) = \emptyset$ і $S(\alpha) = \mathbb{Z}^p$ при $\alpha < \Lambda$.

Твердження 2.1 *Умова $\varphi_0 \in \mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)$ є необхідною і достатньою умовою існування розв'язку u задачі Коші (2.4), (2.2), для якого $u(h,\cdot) \in \mathbf{E}_{-\Lambda h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$ при $h \in [0,T]$.*

Доведення. Нехай $\varphi_0 \in \mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)$, тоді задача Коші (2.4), (2.2) має розв'язок

$$u(t,x) = \exp\big(a_1(D)t\big)\varphi_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp\big(\widetilde{a}_1(k)t\widetilde{k}^l\big)\widehat{\varphi}_0(k)e^{i(k,x)}, \tag{2.5}$$

який при $t = h$ є функцією із $\mathbf{E}_{-\Lambda h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$, оскільки справджує нерівність

$$\|u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-\Lambda h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(-2\Lambda h\widetilde{k}^l)\big|\exp\big(\widetilde{a}_1(k)h\widetilde{k}^l\big)\widehat{\varphi}_0(k)\big|^2 \le$$

$$\le \sum_{k\in S(\Lambda)} \big(\exp\big(2(\operatorname{Re}\widetilde{a}_1(k) - \Lambda)h\widetilde{k}^l\big) - 1\big)|\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + \|\varphi_0;\mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 < \infty.$$

Навпаки, простір $\mathbf{E}_{-\Lambda h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$ при фіксованих l і h є точним стосовно числа Λ, яке не може бути таким, щоб $S(\Lambda)$ була нескінченною множиною.

Це випливає з того, що для функції $\varphi_0 = \sum\limits_{k\in S(\Lambda)} \widehat{\varphi}_0(k)e^{i(k,x)}$ із простору $\mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)$, яка задовольняє умову $\sum\limits_{k\in S(\Lambda)} \exp\big(2(\operatorname{Re}\widetilde{a}_1(k) - \Lambda)h\widetilde{k}^l\big)|\widehat{\varphi}_0(k)|^2 = \infty$ для якогось $h \in [0,T]$, маємо рівність

$$\|u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-\Lambda h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 = \sum_{k\in S(\Lambda)} \exp\big(-2\Lambda h\widetilde{k}^l\big)|u_k(h)|^2 =$$

$$= \sum_{k\in S(\Lambda)} \exp\big(2(\operatorname{Re}\widetilde{a}_1(k) - \Lambda)h\widetilde{k}^l\big)|\widehat{\varphi}_0(k)|^2 = \infty.$$

Твердження доведено. ∎

2.1.3. Рівняння другого порядку за часовою змінною. Розглянемо два модельні диференціальні рівняння

$$D_t^2 u - (1-\Delta)^l u = 0 \tag{2.6}$$

та

$$\big(D_t - (1-\Delta)^{l/2}\big)^2 u = 0, \tag{2.7}$$

які мають однаковий зведений порядок l. Проаналізуємо умови розв'язності задачі Коші з умовами

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \qquad D_t u|_{t=0} = \varphi_1, \tag{2.8}$$

для рівнянь (2.6) та (2.7).

Коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, розв'язку $u = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)}$ задачі (2.6), (2.8) є розв'язками таких задач:

$$u_k''(t) - \widetilde{k}^{2l} u_k(t) = 0, \qquad u_k(0) = \widehat{\varphi}_0(k), \quad u_k'(0) = \widehat{\varphi}_1(k),$$

тому

$$u_k(t) = \frac{1}{2}\Big(\exp(t\widetilde{k}^l) \;\; \exp(-t\widetilde{k}^l)\Big)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{-l}\widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix},$$

$$u_k'(t) = \frac{1}{2}\Big(\exp(t\widetilde{k}^l) \;\; \exp(-t\widetilde{k}^l)\Big)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix},$$

і

$$\widetilde{k}^{2l}\exp(-t\widetilde{k}^l) u_k(t) = \frac{1+\exp(-2t\widetilde{k}^l)}{2}\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k) + \frac{1-\exp(-2t\widetilde{k}^l)}{2}\widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_1(k),$$

$$\widetilde{k}^{l}\exp(-t\widetilde{k}^l) u_k'(t) = \frac{1-\exp(-2t\widetilde{k}^l)}{2}\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k) + \frac{1+\exp(-2t\widetilde{k}^l)}{2}\widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_1(k).$$

Звідси отримуємо нерівності

$$\exp(-2t\widetilde{k}^l)\big|\widetilde{k}^{2l} u_k(t)\big|^2 \le 2\big|\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k)\big|^2 + \frac{1}{2}\big|\widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_1(k)\big|^2,$$

$$\exp(-2t\widetilde{k}^l)\big|\widetilde{k}^{l} u_k'(t)\big|^2 \le \frac{1}{2}\big|\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k)\big|^2 + 2\big|\widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_1(k)\big|^2.$$

В результаті підсумовування цих нерівностей маємо для всіх $h \in [0,T]$ нерівності для норм

$$\|(1-\Delta)^l u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le 2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi_1;\mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})\|^2,$$
$$\|(1-\Delta)^{l/2} D_t u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le \frac{1}{2}\|\varphi_0;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 2\|\varphi_1;\mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})\|^2. \tag{2.9}$$

Якщо $\varphi_1 = 0$, то

$$\widetilde{k}^{2l}\exp(-t\widetilde{k}^l)u_k(t) = \frac{1+\exp(-2t\widetilde{k}^l)}{2}\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k),$$

$$\widetilde{k}^{l}\exp(-t\widetilde{k}^l)u'_k(t) = \frac{1-\exp(-2t\widetilde{k}^l)}{2}\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k),$$

тому виконується двостороння оцінка

$$\frac{1}{4}\|\varphi_0;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le \|(1-\Delta)^l u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le \|\varphi_0;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \tag{2.10}$$

для функції $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$; якщо ж $\varphi_0 = \sum\limits_{2h\widetilde{k}^l \ge \ln 2} \widehat{\varphi}_0(k)e^{i(k,x)} \in \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$, то

$$\frac{1}{16}\|\varphi_0;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le \|(1-\Delta)^{l/2} D_t u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le$$
$$\le \frac{1}{4}\|\varphi_0;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \tag{2.11}$$

Аналогічно при $\varphi_0 = 0$ маємо

$$\widetilde{k}^{2l}\exp(-t\widetilde{k}^l)u_k(t) = \frac{1-\exp(-2t\widetilde{k}^l)}{2}\widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_1(k),$$

$$\widetilde{k}^{l}\exp(-t\widetilde{k}^l)u'_k(t) = \frac{1+\exp(-2t\widetilde{k}^l)}{2}\widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_1(k).$$

тому для всіх $\varphi_1 \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$ виконуються оцінки

$$\frac{1}{4}\|\varphi_1;\mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le \|(1-\Delta)^{l/2} D_t u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le \|\varphi_1;\mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})\|^2; \tag{2.12}$$

якщо $\varphi_1 = \sum\limits_{2h\widetilde{k}^l \ge \ln 2} \widehat{\varphi}_1(k)e^{i(k,x)} \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$, то

$$\frac{1}{16}\|\varphi_1;\mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le \|(1-\Delta)^l u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le \frac{1}{4}\|\varphi_1;\mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})\|^2. \tag{2.13}$$

Ці нерівності означають, що класом розв'язності задачі (2.6), (2.8) є простір $\mathbf{E}^2_{-1,l}(\mathcal{D}^p)$, якщо $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$ і $\varphi_1 \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$, причому із нерівностей (2.9) та рівності $D_t^2 u = (1-\Delta)^l u$ маємо оцінку

$$\|u;\mathbf{E}^2_{-1,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \frac{9}{2}\|\varphi_0;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 3\|\varphi_1;\mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})\|^2.$$

Розв'язок $u = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{i(k,x)}$ задачі (2.7), (2.8) має коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$, які є розв'язками задач

$$\left(\frac{d}{dt}-\widetilde{k}^l\right)^2 u_k(t) = u_k''(t) - 2\widetilde{k}^l u_k'(t) + \widetilde{k}^{2l}u_k(t) = 0,\ u_k(0) = \widehat{\varphi}_0(k),\ u_k'(0) = \widehat{\varphi}_1(k),$$

а саме

$$u_k(t) = \exp(t\widetilde{k}^l)\begin{pmatrix}1 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\widetilde{k}^l & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix},$$

$$u_k'(t) = \exp(t\widetilde{k}^l)\begin{pmatrix}\widetilde{k}^l & 1+t\widetilde{k}^l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\widetilde{k}^l & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо рівності

$$\widetilde{k}^{2l}\exp(-t\widetilde{k}^l)u_k(t) = (1-t\widetilde{k}^l)\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k) + t\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_1(k),$$

$$\widetilde{k}^{l}\exp(-t\widetilde{k}^l)u_k'(t) = -t\widetilde{k}^{3l}\widehat{\varphi}_0(k) + (1+t\widetilde{k}^l)\widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_1(k)$$

та нерівності

$$\exp(-2t\widetilde{k}^l)\left|\widetilde{k}^{2l}u_k(t)\right|^2 \le 2\left|\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2 + 2t^2\left|\widetilde{k}^{3l}\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2 + 2t^2\left|\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_1(k)\right|^2,$$

$$\exp(-2t\widetilde{k}^l)\left|\widetilde{k}^{l}u_k'(t)\right|^2 \le 3t^2\left|\widetilde{k}^{3l}\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2 + 3\left|\widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_1(k)\right|^2 + 3t^2\left|\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_1(k)\right|^2.$$

Підсумовуючи за індексом $k \in \mathbb{Z}^p$, маємо

$$\|(1-\Delta)^l u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le 2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 2h^2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{3l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 2h^2\|\varphi_1;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2, \quad (2.14)$$

$$\|(1-\Delta)^{l/2} D_t u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le 3h^2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{3l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 3\|\varphi_1;\mathbf{H}_{l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 3h^2\|\varphi_1;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2. \quad (2.15)$$

Якщо $\varphi_1 = 0$, то $u_k(t) = \exp(t\widetilde{k}^l)(1-t\widetilde{k}^l)\widehat{\varphi}_0(k)$, $u'_k(t) = -t\exp(t\widetilde{k}^l)\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k)$. Звідси отримуємо такі оцінки:

$$\left|\widetilde{k}^l\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2/4 \le \exp(-2t\widetilde{k}^l)\left|u_k(t)\right|^2 \le 2t^2\left|\widetilde{k}^l\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2 + 2|\widehat{\varphi}_0(k)|^2$$

при $t\widetilde{k}^l \ge 2$ та $\exp(-2t\widetilde{k}^l)\left|u'_k(t)\right|^2 = t^2\left|\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2$, або при $h > 0$

$$\sum_{h\widetilde{k}^l<2}\Big(\left|1 - h\widetilde{k}^l\right| - \frac{1}{4}h^2\widetilde{k}^{2l}\Big)\left|\widetilde{k}^{2l}\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2 + \frac{1}{4}h^2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{3l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le$$

$$\le \|(1-\Delta)^l u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le 2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 2h^2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{3l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2, \quad (2.16)$$

$$\|(1-\Delta)^{l/2}D_t u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 = h^2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{3l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2. \quad (2.17)$$

Якщо ж $\varphi_0 = 0$, то $u_k(t) = t\exp(t\widetilde{k}^l)\widehat{\varphi}_1(k)$, $u'_k(t) = \exp(t\widetilde{k}^l)(1 + t\widetilde{k}^l)\widehat{\varphi}_1(k)$ та виконуються оцінки $\exp(-2t\widetilde{k}^l)\left|u_k(t)\right|^2 = t^2|\widehat{\varphi}_1(k)|^2$,

$$t^2\left|\widetilde{k}^l\widehat{\varphi}_1(k)\right|^2 \le \exp(-2t\widetilde{k}^l)\left|u'_k(t)\right|^2 \le 2|\widehat{\varphi}_1(k)|^2 + 2t^2\left|\widetilde{k}^l\widehat{\varphi}_1(k)\right|^2,$$

підсумовуючи які, маємо

$$\|(1-\Delta)^l u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 = h^2\|\varphi_1;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2, \quad (2.18)$$

$$h^2\|\varphi_1;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le \|(1-\Delta)^{l/2}D_t u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le$$
$$\le 2\|\varphi_1;\mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 2h^2\|\varphi_1;\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2. \quad (2.19)$$

Із оцінок (2.9) випливає існування розв'язку задачі (2.6), (2.8) у просторі $\mathbf{E}^2_{-1,l}(\mathcal{D}^p)$ для довільних функцій $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$. Це точний результат щодо гладкості функцій φ_0 та φ_1. Дійсно, із нерівностей (2.10), (2.11) випливає, що якщо $\varphi_0 \notin \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$, $\varphi_1 = 0$, то $(1-\Delta)^l u$ і $(1-\Delta)^{l/2}D_t u$ при $t = h$ не належать до простору $\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})$; така ж ситуація (див. нерівності (2.12), (2.13)) виникає при $\varphi_1 \notin \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$, $\varphi_0 = 0$.

Для належності розв'язку задачі (2.7), (2.8) до $\mathbf{E}^2_{-1,l}(\mathcal{D}^p)$ необхідно (і достатньо) накладати значно сильніші умови гладкості на праві частини φ_0, φ_1

умов (2.8), а саме $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{3l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{2l}(\Omega_{2\pi}^p)$. Необхідність цих умов випливає із нерівностей (2.16)–(2.19), а достатність із нерівностей (2.14), (2.15).

Тому розв'язність задачі Коші з умовами (2.8) для довільного лінійного диференціального рівняння другого порядку за змінною t і зведеного порядку l вигляду

$$D_t^2 u + a_1(D) D_t u + a_2(D) u = 0, \tag{2.20}$$

де $a_1(D) = \sum\limits_{|s|\le l} a_{1s} D^s$, $a_2(D) = \sum\limits_{|s|\le 2l} a_{2s} D^s$, $a_{1s} \in \mathbb{C}$, $a_{2s} \in \mathbb{C}$, $|a_{1s}| \le R$, $|a_{2s}| \le R$, у просторі $\mathbf{E}^2_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$ вимагає накладання умов на функції φ_0 і φ_1 не слабших, ніж у задачі (2.7), (2.8).

Знайдемо оцінки розв'язку задачі (2.20), (2.8), ввівши такі позначення:

Λ — число, для якого $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \le \Lambda$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, крім, можливо, скінченної множини $S = S(\Lambda)$, для якої $\operatorname{Re}\lambda_1(k) > \Lambda$, $k \in S$;

Λ_1 — число, для якого $\max(|\lambda_1(k)|, |\lambda_2(k)|) \le \Lambda_1$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, крім скінченної множини $S_1 = S_1(\Lambda_1)$, для якої $\max(|\lambda_1(k)|, |\lambda_2(k)|) > \Lambda_1$, $k \in S_1$, де $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ — корені рівняння $\lambda^2 + \widetilde{a}_1(k)\lambda + \widetilde{a}_2(k) = 0$, які впорядковані так, що $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \ge \operatorname{Re}\lambda_2(k)$.

Тут $\widetilde{a}_1(k) = a_1(k)/\widetilde{k}^l$, $\widetilde{a}_2(k) = a_2(k)/\widetilde{k}^{2l}$ є обмеженими за модулем функціями параметра $k \in \mathbb{Z}^p$, при $k \notin S_1$.

Для рівнянь (2.6) та (2.7) множини S та S_1 є порожніми, якщо вибрати $\Lambda(k) = \Lambda_1(k) = 1$, оскільки $\operatorname{Re}\lambda_1(k) = \lambda_1(k) = |\lambda_2(k)| = 1$. Коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$ розв'язку u задачі (2.20), (2.8) задовольняють такі задачі Коші:

$$u_k''(t) + a_1(k) u_k'(t) + a_2(k) u_k(t) = 0, \qquad u_k(0) = \widehat{\varphi}_0(k), \quad u_k'(0) = \widehat{\varphi}_1(k).$$

Отримуємо формули для розв'язків цих задач

$$u_k(t) = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^l) & \exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1(k)\widetilde{k}^l & \lambda_2(k)\widetilde{k}^l \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^l)}{\lambda_2(k) - \lambda_1(k)} & \dfrac{\exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^l)}{\lambda_2(k) - \lambda_1(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2(k) & -1 \\ -\lambda_1(k) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{-l}\widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Оскільки $\lambda_{1,2}(k) = \dfrac{\widetilde{a}_1(k) \pm D^{1/2}(k)}{2}$, то $\lambda_1(k) - \lambda_2(k) = D^{1/2}(k)$, де $D(k)$ є дискримінантом многочлена $\lambda^2 + \widetilde{a}_1(k)\lambda + \widetilde{a}_2(k)$, $D(k) = \widetilde{a}_1^2(k) - 4\widetilde{a}_2(k)$. Із формули (2.21) випливають рівності

$$u_k(t) = \frac{\lambda_1(k)\exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^l) - \lambda_2(k)\exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^l)}{D^{1/2}(k)}\widehat{\varphi}_0(k) + \\ + \frac{\exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^l) - \exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^l)}{D^{1/2}(k)}\widetilde{k}^{-l}\widehat{\varphi}_1(k),$$

$$u_k'(t) = \frac{\lambda_1(k)\lambda_2(k)\Big(\exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^l) - \exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^l)\Big)}{D^{1/2}(k)}\widetilde{k}^l\widehat{\varphi}_0(k) + \\ + \frac{\lambda_1(k)\exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^l) - \lambda_2(k)\exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^l)}{D^{1/2}(k)}\widehat{\varphi}_1(k),$$

на основі яких встановлюємо (при $k \notin S \cup S_1$) оцінки

$$\begin{aligned} \big|\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^l)u_k(t)\big|^2 &\le 8D^{-1}(k)\big(\Lambda_1^2|\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widetilde{k}^{-l}\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big), \\ \big|\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^l)u_k'(t)\big|^2 &\le 8\Lambda_1^2 D^{-1}(k)\big(\Lambda_1^2|\widetilde{k}^l\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Для оцінки знизу дискримінанта $D(k)$ використаємо метричний підхід, враховуючи залежність $D(k)$ від коефіцієнтів a_{1s} і a_{2s} диференціального рівняння (2.20), які є незалежними змінними в крузі $\mathcal{O}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$.

Розіб'ємо множину $\mathbb{Z}^p$ на p частин, а саме $\mathbb{Z}^p = K_1 \cup \dots \cup K_p$, покладаючи

$$K_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p : |k_1| = \max(|k_1|, \dots, |k_p|)\},$$

$$K_p = \{k \in \mathbb{Z}^p : |k_p| > \max(|k_1|, \dots, |k_{p-1}|)\},$$

$$K_j = \{k \in \mathbb{Z}^p : |k_j| = \max(|k_1|, \dots, |k_p|), |k_j| > \max(|k_1|, \dots, |k_{j-1}|)\},$$

для $j = 2, 3, \dots, p-1$, тоді для всіх $k = (k_1, \dots, k_p) \in K_j \setminus \{0\}$ справджуються нерівності $|k_j| < \widetilde{k} < (p+1)^{1/2}|k_j|$.

Якщо $b_1 = a_{2,2l,0,\dots,0}, b_2 = a_{2,0,2l,0,\dots,0}, \dots, b_p = a_{2,0,\dots,0,2l}$, то $\widetilde{a}_2(k) = \sum_{j=1}^p b_j(k_j/\widetilde{k})^{2l} + \check{a}_2(k)$, де доданок $\check{a}_2(k)$ не залежить від коефіцієнтів

$b_1, \ldots, b_p$. Вважаємо коефіцієнти рівняння (2.20) незмінними за винятком коефіцієнтів $b_1, \ldots, b_p$, тоді вектор $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_p)$ є елементом множини $\mathcal{O}_R^p$.

Зафіксуємо $0 < \varepsilon < 1$ та $r > p$ і позначимо $W_\varepsilon(k) \subset \mathcal{O}_R^p$ множину векторів $\bar{b}$, для яких при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ виконується нерівність

$$|D(k)| \leq C_1(\varepsilon/\widetilde{k}^r)^{1/2}, \quad C_1 > 0. \tag{2.23}$$

Нехай $k \in K_j$ і $k \neq 0$, тоді множина $W_\varepsilon(k, b')$ чисел $b_j \in \mathcal{O}_R$, для яких виконується (2.23) при всіх інших фіксованих (позначених b') компонентах вектора b, визначається нерівністю

$$\Big| b_j + \Big(\frac{\widetilde{k}}{k_j}\Big)^{2l}\Big(\sum_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{p} b_j\Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{2l} + \check{a}_2(k) - \frac{\widetilde{a}_1^2(k)}{4}\Big)\Big| \leq \Big(\frac{\widetilde{k}}{k_j}\Big)^{2l}\frac{C_1}{4}\Big(\frac{\varepsilon}{\widetilde{k}^r}\Big)^{1/2};$$

множина $W_\varepsilon(k, b')$ є частиною круга радіуса $(\widetilde{k}/k_j)^{2l}(\varepsilon/\widetilde{k}^r)^{1/2}C_1/4$, тому $\operatorname{mes} W_\varepsilon(k, b') \leq \varepsilon\pi\dfrac{C_1^2}{16}\Big(\dfrac{\widetilde{k}}{k_j}\Big)^{4l}\widetilde{k}^{-r} \leq \varepsilon\pi\dfrac{C_1^2}{16}(p+1)^{2l}\widetilde{k}^{-r}$. Інтегруючи останню нерівність по $\mathcal{O}_R^{p-1}$ отримуємо

$$\operatorname{mes} W_\varepsilon(k) \leq \varepsilon\pi^p\frac{C_1^2}{16}(p+1)^{2l}R^{2(p-1)}\widetilde{k}^{-r}. \tag{2.24}$$

Тоді на множині $\mathcal{O}_R^p \setminus W_\varepsilon$, де $W_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\neq 0} W_\varepsilon(k)$, виконується протилежна до (2.23) оцінка, тобто

$$|D(k)| > C_1(\varepsilon/\widetilde{k}^r)^{1/2}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}. \tag{2.25}$$

Міра множини W_ε не перевищує число ε, оскільки із нерівності (2.24) випливає $\operatorname{mes} W_\varepsilon \leq \sum\limits_{k\neq 0}\operatorname{mes} W_\varepsilon(k) \leq \varepsilon\pi^p\dfrac{C_1^2}{16}(p+1)^{2l}R^{2(p-1)}\sum\limits_{k\neq 0}\widetilde{k}^{-r} = \varepsilon$, якщо стала C_1 задовольняє рівність $\pi^p(p+1)^{2l}R^{2(p-1)}\sum\limits_{k\neq 0}\widetilde{k}^{-r}\cdot C_1^2 = 16$.

Твердження 2.2 *Нехай* $0 < \varepsilon < 1$, $r > p$, $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{2l+r/4}(\Omega_{2\pi}^p)$ *і* $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{l+r/4}(\Omega_{2\pi}^p)$, *тоді для довільного вектора* $\bar{b} \in \mathcal{O}_R^p \setminus W_\varepsilon$ *існує єдиний розв'язок задачі Коші* (2.4), (2.2) *з простору* $\mathbf{E}_{-\Lambda,l}^2(\mathcal{D}^p)$.

Доведення. Підставляючи оцінки (2.25) в нерівності (2.22) маємо для $k \notin S \cup S_1 \cup \{0\}$ такі нерівності:

$$\big|\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^l)u_k(t)\big|^2 \le \frac{8\widetilde{k}^{r/2}}{C_1\sqrt{\varepsilon}}\big(\Lambda_1^2|\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widetilde{k}^{-l}\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big),$$
$$\big|\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^l)u_k'(t)\big|^2 \le \frac{8\Lambda_1^2\widetilde{k}^{r/2}}{C_1\sqrt{\varepsilon}}\big(\Lambda_1^2|\widetilde{k}^l\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big).$$

Із рівняння (2.20) отримуємо нерівності для другої похідної

$$|u_k''(t)|^2 \le 2\big(4\Lambda_1^2|\widetilde{k}^l u_k'(t)|^2 + \Lambda_1^4|\widetilde{k}^{2l}u_k(t)|^2\big).$$

Тому справджуються оцінки

$$\big|\widetilde{k}^{2l}\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^l)u_k(t)\big|^2 \le \frac{8}{C_1\sqrt{\varepsilon}}\big(\Lambda_1^2|\widetilde{k}^{2l+r/4}\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widetilde{k}^{l+r/4}\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big),$$
$$\big|\widetilde{k}^{l}\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^l)u_k'(t)\big|^2 \le \frac{8\Lambda_1^2}{C_1\sqrt{\varepsilon}}\big(\Lambda_1^2|\widetilde{k}^{2l+r/4}\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widetilde{k}^{l+r/4}\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big),$$
$$\big|\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^l)u_k''(t)\big|^2 \le \frac{80\Lambda_1^4}{C_1\sqrt{\varepsilon}}\big(\Lambda_1^2|\widetilde{k}^{2l+r/4}\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widetilde{k}^{l+r/4}\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big),$$

із яких випливають нерівності

$$\max_{j=0,1,2}\|(1-\Delta)^{l(2-j)/2}D_t^j u(t,\cdot);\mathbf{E}_{-t\Lambda,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le C_2(b)+$$
$$+\frac{C_3}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{j=0}^{1}\Lambda_1^{2(j-1)}\|\varphi_j;\mathbf{H}_{(2-j)l+r/4}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2,$$

де $C_2(b) > 0$ — деяка стала, $C_3 = 8\max(1,\Lambda_1^2,10\Lambda_1^4)$, тобто $u \in \mathbf{E}^2_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$ при $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{2l+r/4}(\Omega_{2\pi}^p)$ та $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{l+r/4}(\Omega_{2\pi}^p)$.

Твердження доведено. ∎

2.1.4. Рівняння вищого порядку за часовою змінною. Розглянемо насамперед задачу Коші для модельних рівнянь з частинними похідними

$$D_t^n u - (1-\Delta)^{ln/2}u = 0, \tag{2.26}$$

$$(D_t - (1-\Delta)^{l/2})^n u = 0, \tag{2.27}$$

при $n \geq 3$ з початковими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_1, \ldots, \quad D_t^{n-1} u|_{t=0} = \varphi_{n-1}. \tag{2.28}$$

Тоді коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$ розв'язку задачі (2.26), (2.28) є розв'язками задач Коші

$$u_k^{(n)}(t) - \widetilde{k}^{nl} u_k(t) = 0, \quad u_k(t) = \widehat{\varphi}_0(k),\ u_k'(t) = \widehat{\varphi}_1(k), \ldots,\ u_k^{(n-1)}(t) = \widehat{\varphi}_{n-1}(k),$$

і разом зі своїми похідними до n-го порядку включно справджують рівності

$$\widetilde{k}^{(n-j)l} u_k^{(j)}(t) = \widetilde{k}^{nl} \Big(\eta_1^j \exp(\eta_1 t \widetilde{k}^l) C_{0k} + \\ + \eta_2^j \exp(\eta_2 t \widetilde{k}^l) C_{1,k} + \cdots + \eta_n^j \exp(\eta_n t \widetilde{k}^l) C_{n-1,k} \Big), \tag{2.29}$$

де $\eta_j = \eta^{j-1}$, $\eta = e^{i2\pi/n}$, $j = 1, \ldots, n$, причому $\bar{\eta} = \eta^{-1}$, а сталі $C_{0k}, C_{1k}, \ldots, C_{n-1,k}$ визначаються із відповідної системи лінійних алгебричних рівнянь за допомогою формули

$$\begin{pmatrix} C_{0k} \\ C_{1k} \\ \cdots \\ C_{n-1,k} \end{pmatrix} = \Big(W(\eta_1 \widetilde{k}^l) \ \ \ldots \ \ W(\eta_n \widetilde{k}^l) \Big)^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \\ \cdots \\ \widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix} = \\ = \Big(W(\eta_1) \ \ \ldots \ \ W(\eta_n) \Big)^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{-l} \widehat{\varphi}_1(k) \\ \cdots \\ \widetilde{k}^{-(n-1)l} \widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Вектор $W(y)$ у формулі (2.30) має вигляд

$$W(y) = \mathrm{col}(1, y, y^2, \ldots, y^{n-1}), \tag{2.31}$$

а матриця $\big(W(\eta_1), W(\eta_2), \ldots, W(\eta_n)\big)/\sqrt{n} = \big(W(1), W(\eta), \ldots, W(\eta^{n-1})\big)/\sqrt{n}$ називається матрицею дискретного перетворення Фур'є. Вона є комплексною симетричною унітарною матрицею [17, с. 123], причому

$$\Big(W(\eta_1)\ \ \ldots\ \ W(\eta_n)\Big)^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \eta_1^{-1} & \ldots & \eta_1^{-(n-1)} \\ . & . & . & . \\ 1 & \eta_n^{-1} & \ldots & \eta_n^{-(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Із рівностей (2.29) маємо

$$\widetilde{k}^{(n-j)l}u_k^{(j)}(t) = \frac{1}{n}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\sum_{\alpha=1}^{n}\eta_\alpha^{j-\sigma}\exp(\eta_\alpha t\widetilde{k}^l)\widetilde{k}^{(n-\sigma)l}\widehat{\varphi}_\sigma(k);$$

звідси отримуємо оцінки

$$\big|\exp(-t\widetilde{k}^l)\widetilde{k}^{(n-j)l}u_k^{(j)}(t)\big|^2 \le n\sum_{\sigma=0}^{n-1}\big|\widetilde{k}^{(n-\sigma)l}\widehat{\varphi}_\sigma(k)\big|^2, \quad j=0,1,\ldots,n-1,$$

та оцінку

$$\max_{j=0,1,\ldots,n}\|(1-\Delta)^{l(n-j)/2}D_t^j u(t,\cdot);\mathbf{E}_{-t,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le n\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j;\mathbf{H}_{(n-j)l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2;$$

тобто $u\in\mathbf{E}_{-1,l}^n(\mathcal{D}^p)$ при $\varphi_j\in\mathbf{H}_{(n-j)l}(\Omega_{2\pi}^p)$ і

$$\|u;\mathbf{E}_{-1,l}^n(\mathcal{D}^p)\|^2 \le n(n+1)\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j;\mathbf{H}_{(n-j)l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2.$$

Коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$ розв'язку задачі (2.27), (2.28) визначаються такими задачами Коші для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\Big(\frac{d}{dt}-\widetilde{k}^l\Big)^n u_k(t)=0, \quad u_k(t)=\widehat{\varphi}_0(k),\ u_k'(t)=\widehat{\varphi}_1(k),\ldots,\ u_k^{(n-1)}(t)=\widehat{\varphi}_{n-1}(k).$$

Розв'язки цих задач та їх похідні визначаються формулами

$$\begin{pmatrix} u_k(t) \\ u_k'(t) \\ \dots \\ u_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \exp\left(t\widetilde{k}^l\right) \begin{pmatrix} W\left(\widetilde{k}^l\right) & W'\left(\widetilde{k}^l\right) & \dots & \dfrac{W^{(n-1)}\left(\widetilde{k}^l\right)}{(n-1)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{W}(t) \\ \widetilde{W}'(t) \\ \dots \\ \widetilde{W}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} W\left(\widetilde{k}^l\right) & W'\left(\widetilde{k}^l\right) & \dots & \dfrac{W^{(n-1)}\left(\widetilde{k}^l\right)}{(n-1)!} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix},$$

де $\widetilde{W}(t) = \left(1, t, t^2/2!, \dots, t^{n-1}/(n-1)!\right)$, $W\left(\widetilde{k}^l\right)$ обчислюється за формулою (2.31). Використовуючи матричні рівності

$$Z\left(\widetilde{k}^l\right) \begin{pmatrix} \widetilde{W}(t) \\ \widetilde{W}'(t) \\ \dots \\ \widetilde{W}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} Z^{-1}\left(\widetilde{k}^l\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{W}\left(t\widetilde{k}^l\right) \\ \widetilde{W}'\left(t\widetilde{k}^l\right) \\ \dots \\ \widetilde{W}^{(n-1)}\left(t\widetilde{k}^l\right) \end{pmatrix},$$

$$Z\left(\widetilde{k}^l\right) \begin{pmatrix} W\left(\widetilde{k}^l\right) & W'\left(\widetilde{k}^l\right) & \dots & \dfrac{W^{(n-1)}\left(\widetilde{k}^l\right)}{(n-1)!} \end{pmatrix} Z^{-1}\left(\widetilde{k}^l\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} W(1) & W'(1) & \dots & \dfrac{W^{(n-1)}(1)}{(n-1)!} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} W(1) & W'(1) & \dots & \dfrac{W^{(n-1)}(1)}{(n-1)!} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} W(-1) & W'(-1) & \dots & \dfrac{W^{(n-1)}(-1)}{(n-1)!} \end{pmatrix},$$

де остання формула є однією із властивостей трикутника Паскаля, $Z(y) = (y^n, \dots, y^2, y)$, запишемо формули для розв'язку $u_k(t)$ у вигляді

$$\begin{pmatrix} \widetilde{k}^{nl} u_k(t) \\ \widetilde{k}^{(n-1)l} u'_k(t) \\ \dots \\ \widetilde{k}^{l} u_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \exp\big(t\widetilde{k}^l\big) \Big(W(1) \;\; W'(1) \;\; \dots \;\; \frac{W^{(n-1)}(1)}{(n-1)!}\Big) \begin{pmatrix} \widetilde{W}\big(t\widetilde{k}^l\big) \\ \widetilde{W}'\big(t\widetilde{k}^l\big) \\ \dots \\ \widetilde{W}^{(n-1)}\big(t\widetilde{k}^l\big) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \Big(W(-1) \;\; W'(-1) \;\; \dots \;\; \frac{W^{(n-1)}(-1)}{(n-1)!}\Big) \begin{pmatrix} \widetilde{k}^{nl} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{(n-1)l} \widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widetilde{k}^{l} \widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Права частина останньої формули зображується у вигляді суми

$$\frac{\big(t\widetilde{k}^l\big)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^\alpha C_{n-1}^\alpha \widetilde{k}^{(n-\alpha)l} \widehat{\varphi}_\alpha(k) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{\beta=0}^{n-2} \frac{\big(t\widetilde{k}^l\big)^\beta}{\beta!} \Omega_\beta \begin{pmatrix} \widetilde{k}^{nl} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{(n-1)l} \widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widetilde{k}^{l} \widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix},$$

де $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{n-2}$ — сталі матриці, C_n^α — біномні коефіцієнти, тому з рівності

$$u_k^{(n)}(t) = C_n^1 \widetilde{k}^l u_k^{(n-1)}(t) - C_n^2 \widetilde{k}^{2l} u_k^{(n-2)}(t) + \dots + (-1)^n \widetilde{k}^{nl} u_k(t)$$

та рівностей (2.32) для $j = 0, 1, \dots, n$ випливають оцінки

$$\exp\big(-2t\widetilde{k}^l\big) \big|\widetilde{k}^{(n-j)l} u_k^{(j)}(t)\big|^2 \le C_4 \sum_{\alpha=0}^{n-1} \big|\widetilde{k}^{(2n-\alpha-1)l} \widehat{\varphi}_\alpha(k)\big|^2, \; C_4 > 0, \qquad (2.33)$$

та (для досить великих значень $h\widetilde{k}^l$, де h — фіксоване додатне число)

$$\exp\big(-2h\widetilde{k}^l\big) \big|\widetilde{k}^{(n-j)l} u_k^{(j)}(h)\big|^2 \ge C_5 \big|\widetilde{k}^{(2n-\alpha-1)l} \widehat{\varphi}_\alpha(k)\big|^2, \quad C_5 > 0, \qquad (2.34)$$

при $\widehat{\varphi}_\beta(k) = 0$ для всіх $\beta \ne \alpha$. Із нерівностей (2.33), (2.34) встановлюємо умови належності розв'язку задачі (2.27), (2.28) до простору $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$: $\varphi_\alpha \in \mathbf{H}_{(2n-\alpha-1)l}(\Omega^p_{2\pi})$, $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$, а також нерівності для норм $\|u; \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le C_6 \sum\limits_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j; \mathbf{H}_{(2n-j-1)l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2$, $C_6 > 0$.

Оцінки (2.33) справедливі також для розв'язку задачі Коші для довільного диференціального рівняння порядку n, яке розв'язане щодо старшої похідної за t [24, с. 77]. Тому задача (2.27), (2.28) має найгірші властивості щодо гладкості функцій $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, а задача (2.26), (2.28) — найкращі властивості, оскільки, якщо її розв'язок $u \in \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$, то $u(0,\cdot) \in \mathbf{H}_{nl}(\Omega^p_{2\pi})$, $D_t u(0,\cdot) \in \mathbf{H}_{(n-1)l}(\Omega^p_{2\pi})$, $\ldots$, $D_t^{n-1}u(0,\cdot) \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$.

За допомогою метричного підходу встановимо на функції $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ умови гладкості, для яких задача Коші з умовами (2.28) для „майже всіх" рівнянь вигляду

$$D_t^n u + \sum_{j=1}^{n} a_j(D) D_t^{n-j} u = 0 \tag{2.35}$$

має розв'язок із простору $u \in \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$, де $a_j(D) = \sum\limits_{|s|\le jl} a_{js} D^s$, $a_{js} \in \mathbb{C}$, $|a_{js}| \le R$, число Λ, як і раніше, таке, що $\Lambda \ge \operatorname{Re}\lambda_j(k)$ при $k \in \mathbb{Z}^p \setminus S$, $S \subset \mathbb{Z}^p$ — скінченна множина, числа $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, впорядковані нерівностями $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \ge \cdots \ge \operatorname{Re}\lambda_n(k)$, є коренями алгебричного рівняння $f_k(\lambda) \equiv \lambda^n + \widetilde{a}_1(k)\lambda^{n-1} + \cdots + \widetilde{a}_n(k) = 0$, в якому $\widetilde{a}_j(k) = a_j(k)/\widetilde{k}^{jl}$, $j = 1, \ldots, n$.

Якщо $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі

$$\begin{gathered} u_k^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n} a_j(k) u_k^{(n-j)}(t) = 0, \\ u_k(0) = \widehat{\varphi}_0(k),\ u_k'(0) = \widehat{\varphi}_1(k), \ldots,\ u_k^{(n-1)}(0) = \widehat{\varphi}_{n-1}(k), \end{gathered} \tag{2.36}$$

то $u = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)}$ — розв'язок задачі (2.35), (2.28).

Нехай $\lambda_j(k) \ne \lambda_\alpha(k)$ при $j \ne \alpha$, тоді розв'язок задачі (2.36) є таким:

$$u_k(t) = \Big(\exp\big(\lambda_1(k) t \widetilde{k}^l\big) \;\; \ldots \;\; \exp\big(\lambda_n(k) t \widetilde{k}^l\big)\Big) \times$$

$$\times \Big(W\big(\lambda_1(k)\widetilde{k}^l\big) \;\; \ldots \;\; W\big(\lambda_n(k)\widetilde{k}^l\big)\Big)^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \\ \ldots \\ \widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо такі рівності:

$$\widetilde{k}^{(n-j)l}u_k^{(j)}(t)=\Big(\lambda_1^j(k)\exp\big(\lambda_1(k)t\widetilde{k}^l\big)\ \ \dots\ \ \lambda_n^j(k)\exp\big(\lambda_n(k)t\widetilde{k}^l\big)\Big)\times$$
$$\times\Big(W(\lambda_1(k))\ \ \dots\ \ W(\lambda_n(k))\Big)^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{k}^{nl}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widetilde{k}^{(n-1)l}\widehat{\varphi}_1(k)\\ \dots\\ \widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_{n-1}(k)\end{pmatrix},\quad j=0,1,\dots,n. \quad (2.37)$$

Оскільки для визначника Вандермонда $\Big(W(\lambda_1(k))\ \ \dots\ \ W(\lambda_n(k))\Big)$ справджується формула [55]

$$\Big(W(\lambda_1(k))\ \ \dots\ \ W(\lambda_n(k))\Big)^{-1}=\Big(\operatorname{diag}\big(f_k'(\lambda_1(k)),\dots,f_k'(\lambda_n(k))\big)\Big)^{-1}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}W^T(\lambda_1(k))\\ \dots\\ W^T(\lambda_n(k))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{a}_{n-1}(k) & \widetilde{a}_{n-2}(k) & \dots & \widetilde{a}_1(k) & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \widetilde{a}_1(k) & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

де $f_k'(\lambda_j(k))=\prod\limits_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{n}\big(\lambda_j(k)-\lambda_\alpha(k)\big)$, то із формул (2.37) випливає

$$\widetilde{k}^{(n-j)l}u_k^{(j)}(t)=\left(\frac{\lambda_1^j(k)\exp\big(\lambda_1(k)t\widetilde{k}^l\big)}{f_k'(\lambda_1(k))}\ \ \dots\ \ \frac{\lambda_n^j(k)\exp\big(\lambda_n(k)t\widetilde{k}^l\big)}{f_k'(\lambda_n(k))}\right)\times$$
$$\times\begin{pmatrix}W^T(\lambda_1(k))\\ \dots\\ W^T(\lambda_n(k))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{a}_{n-1}(k) & \widetilde{a}_{n-2}(k) & \dots & \widetilde{a}_1(k) & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \widetilde{a}_1(k) & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{k}^{nl}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widetilde{k}^{(n-1)l}\widehat{\varphi}_1(k)\\ \dots\\ \widetilde{k}^{l}\widehat{\varphi}_{n-1}(k)\end{pmatrix} \quad (2.38)$$

для $j=0,1,\dots,n$. Нехай $D(k)=\prod\limits_{1\le\alpha<\beta\le n}\big(\lambda_\alpha(k)-\lambda_\beta(k)\big)^2$ позначає дискримінант [111, с. 34] многочлена $f_k(\lambda)$, тоді

$$\big(f_k'(\lambda_j(k))\big)^{-2}=\prod_{1\le\alpha<\beta\le n,\alpha\neq j}\big(\lambda_\alpha(k)-\lambda_\beta(k)\big)^2/D(k).$$

Із обмеженості (стосовно $k \in \mathbb{Z}^p$) чисел $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k), \widetilde{a}_1(k), \ldots, \widetilde{a}_{n-1}(k)$ на основі рівностей (2.38) отримаємо оцінки

$$\exp\big(-2\Lambda t\widetilde{k}^l\big)\big|\widetilde{k}^{(n-j)l}u_k^{(j)}(t)\big|^2 \leq \frac{C_7}{|D(k)|}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\big|\widetilde{k}^{(n-\alpha)l}\widetilde{\varphi}_\alpha(k)\big|^2, \qquad k \in \mathbb{Z}^p \setminus S, \tag{2.39}$$

де $C_7 > 0$ — деяка стала.

Зауважимо, що для рівнянь (2.26) та (2.27) дискримінант $D(k)$ не залежить від $k \in \mathbb{Z}^p$, причому $|D(k)| = \prod\limits_{1\leq\alpha<\beta\leq n} |\eta_\alpha - \eta_\beta|^2 = n^n$ у випадку рівняння (2.26) і $D(k) = 0$ у випадку рівняння (2.27).

Позначимо $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathcal{O}_R^p$ вектор, складений із коефіцієнтів b_j при похідних D_j^{nl}, $j = 1, \ldots, p$, у диференціальному виразі $a_n(D)$, тобто $a_n(D) = b_1 D_1^{nl} + \cdots + b_p D_p^{nl} + \cdots$, де три крапки означають доданки, що не залежать від $b_1, \ldots, b_p$. Таким чином, вільний член $\widetilde{a}_n(k)$ многочлена $f_k(\lambda)$ має вигляд $\widetilde{a}_n(k) = b_1(k_1/\widetilde{k})^{nl} + \cdots + b_p(k_p/\widetilde{k})^{nl} + \breve{a}_n(k)$, де многочлен $\breve{a}_n(k)$ не залежить від змінних $b_1, \ldots, b_p$.

Лема 2.1 *Нехай $r > p$ і всі коефіцієнти рівняння* (2.35)*, за винятком коефіцієнтів $b_1, \ldots, b_p$, фіксовані. Тоді для майже всіх за мірою Лебега в $\mathbb{C}^p$ векторів $\bar{b} \in \mathcal{O}_R^p \setminus W_\varepsilon$, справджується оцінка*

$$|D(k)| \geq \mathrm{const} \cdot \widetilde{k}^{(1-n)r/2}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}, \tag{2.40}$$

де стала залежить від вектора $\bar{b}$ і не залежить від вектора k. Для довільного $0 < \varepsilon < 1$ існує множина $W_\varepsilon \subset \mathcal{O}_R^p$ така, що $\operatorname{mes} W_\varepsilon \leq \varepsilon$ і для всіх векторів $\bar{b} \in \mathcal{O}^p \setminus W_\varepsilon$ справджується оцінка

$$|D(k)| \geq \varepsilon^{(n-1)/2} C_8 \widetilde{k}^{(1-n)r/2}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}, \tag{2.41}$$

де $C_8 = n^n\big(\pi^p(p+1)^{nl}\sum_{k\neq 0}\widetilde{k}^{-r}\big)^{(1-n)/2}$.

Доведення. Нехай $W_\varepsilon(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, — множина векторів $\bar{b} \in \mathcal{O}_R^p$, для яких при фіксованому k виконується протилежна до (2.41) оцінка

$$|D(k)| \geq \varepsilon^{(n-1)/2} C_8 \widetilde{k}^{(1-n)r/2}. \tag{2.42}$$

Із формули для дискримінанта $D(k)$, яка пов'язує корені і коефіцієнти многочлена $f_k(\lambda)$, а саме

$$D(k) = \det \mathrm{col}\Big(\big(\widetilde{a}_{j-i}(k)\big)_{\substack{i=1,\dots,n-1\\ j=1,\dots,2n-1}},\ \big((n-j+i)\widetilde{a}_{j-i}(k)\big)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,2n-1,}}\Big),$$

де $\widetilde{a}_j(k) = 0$ при $j < 0$ та при $j > n$, виділимо доданок із максимальним степенем коефіцієнта $\widetilde{a}_n(k)$, а саме $D(k) = n^n \widetilde{a}_n^{n-1}(k) + \cdots$.

Нехай $k \in K_j$, де $1 \le j \le p$, тоді $|D(k)| = n^n \big(|k_j|/\widetilde{k}\big)^{(n-1)nl} |b_j^{n-1} + Q_k(b_j)|$, де $Q_k(b_j)$ є многочленом степеня не вище $n-2$ змінної b_j із коефіцієнтами, що залежать від вектора k та від змінних $b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_p$. За лемою А. Картана [6, с. 267] міра множини $W'_\varepsilon(k)$ тих $\bar{b} \in \mathcal{O}_R$, для яких виконується нерівність (2.42) при фіксованому векторі $(b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_p) \in \mathcal{O}_R^{p-1}$, справджує оцінку

$$\mathrm{mes}\, W'_\varepsilon(k) \le \varepsilon\pi C_8^{2/(n-1)} \widetilde{k}^{-r} n^{2n/(1-n)} (\widetilde{k}/|k_j|)^{2nl} \le \varepsilon\pi C_8^{2/(n-1)} n^{2n/(1-n)} (p+1)^{nl} \widetilde{k}^{-r}.$$

Після інтегрування за змінними $b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_p$ по області $\mathcal{O}_R^{p-1}$ маємо

$$\mathrm{mes}\, W_\varepsilon(k) \le \varepsilon\pi^p C_8^{2/(n-1)} n^{2n/(1-n)} (p+1)^{nl} \widetilde{k}^{-r}.$$

Якщо $W_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} W_\varepsilon(k)$, то для кожного вектора $\bar{b} \in W_\varepsilon$ хоча б для одного вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ виконується нерівність (2.42); для всіх векторів $\bar{b} \in \mathcal{O}_R^p \setminus W_\varepsilon$, справджується нерівність (2.41). Оскільки $\mathrm{mes}\, W_\varepsilon \le \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \mathrm{mes}\, W_\varepsilon(k)$, то, враховуючи вибір сталої C_8, маємо $\mathrm{mes}\, W_\varepsilon \le \varepsilon$. Тобто ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} W_\varepsilon(k)$ — збіжний і за лемою Бореля-Кантеллі міра множини векторів $\bar{b}$, для яких безліч разів виконається нерівність $|D(k)| < \widetilde{k}^{(1-n)r/2}$ має нульову міру. Лему доведено. ∎

Зауваження 2.1 *У випадку дійсних коефіцієнтів* $b_1, \dots, b_p$ *у лемі* 2.1 *та в інших подібних твердженнях замість леми Картана треба використовувати теорему* А.1 *(с.* 151*) з додатку дисертації.*

Теорема 2.1 *Нехай* $r > p$ *і* $\varphi_\alpha \in \mathbf{H}_{(n-\alpha)l+(n-1)r/4}(\Omega_{2\pi}^p)$*, де* $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$*, тоді для майже всіх векторів* $\bar{b} \in \mathcal{O}_R^p$ *існує єдиний розв'язок* $u = u(t, x)$

задачі (2.35), (2.28) *із простору* $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$. *Для довільного* $0 < \varepsilon < 1$ *і довільного вектора* $\bar{b} \in \mathcal{O}^p_R \setminus W_\varepsilon$, *де* W_ε *– множина з леми* 2.1, *справджується оцінка*

$$\|u; \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \left(C_9\varepsilon^{-(n-1)/2} + C_{10}\right) \sum_{\alpha=0}^{n-1} \|\varphi_\alpha; \mathbf{H}_{(n-\alpha)l+(n-1)r/4}(\Omega^p_{2\pi})\|^2,$$

причому стала $C_9 = C_9(n, m, p, r, R)$ *не залежить від* $\bar{b}$, $C_{10} = C_{10}(n, R, b)$.

Доведення. Підставивши нерівність (2.41) в оцінку (2.39), отримуємо

$$\exp(-2\Lambda t\widetilde{k}^l)|\widetilde{k}^{(n-j)l}u_k^{(j)}(t)|^2 \leq C_7C_8^{-1}\varepsilon^{-(n-1)/2}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left|\widetilde{k}^{(n-\alpha)l+(n-1)r/4}\widehat{\varphi}_\alpha(k)\right|^2,$$

де $k \in \mathbb{Z}^p \setminus S$. Підсумовуючи по векторах $k \in \mathbb{Z}^p$ з урахуванням скінченності множини S отримуємо шукану нерівність. Якщо в нерівність (2.39) підставимо (2.40), то отримаємо твердження першої частини теореми. ∎

Нехай $\rho = r/4$, якщо $p/l < 4$ і $\bar{b} \in \mathcal{O}^p_R \setminus W_\varepsilon$, інакше $\rho = l$, тоді належність функцій φ_α до просторів $\mathbf{H}_{(n-\alpha)l+(n-1)\rho}(\Omega^p_{2\pi})$, де $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$, є достатньою умовою існування розв'язку задачі (2.35), (2.28) у просторі $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$. Отже, ця умова залежить як від порядку n диференціального рівняння (2.35), від його зведеного порядку l, так і від кількості просторових змінних p.

2.2. Задача Коші для систем рівнянь з частинними похідними

Підрозділ присвячений дослідженню задачі Коші для безтипної системи двох рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у шкалах просторів 2π-періодичних за просторовими змінними функцій. Отримано умови існування розв'язку заданої гладкості та встановлено залежність гладкості правих частин задачі від коефіцієнтів системи. Використано метричний підхід для оцінки знизу малих знаменників, які характерні для задачі Коші.

Задача Коші для різних типів систем диференціальних рівнянь з частинними похідними була і є предметом дослідження у різних аспектах багатьох вчених.

Зокрема у випадку рівнянь зі сталими коефіцієнтами для задачі Коші встановлено [24] класи існування та єдиності розв'язку. Ці класи є точними і не залежать від коефіцієнтів рівнянь. Якщо ж враховувати таку залежність, то можна уточнити та доповнити згадані результати. Для одного (анізотропного за порядками диференціювання) диференціального рівняння це зроблено у роботі [74] за допомогою метричного підходу (див. попередній підпункт). У даному підрозділі результати роботи [74] перенесено на випадок задачі Коші для системи двох анізотропних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Досліджено проблему малих знаменників, які визначають співвідношення між гладкістю розв'язку і гладкістю даних задачі.

2.2.1. Основні позначення. В цьому підрозділі використовуємо простори $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$ і оператор $F(D)$, які введені в підрозділі 2.1. Оператор $\widetilde{D} = \sqrt{1-\Delta}$, діє неперервно із простору $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$ у простір $\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_{2\pi}^p)$ за формулою $\sqrt{1-\Delta}v(x) = \sum\limits_k \widetilde{k}\widehat{v}_k e^{i(k,x)}$.

Функції $u \in \mathbf{E}_{\Lambda,l}^n(\mathcal{D}^p)$ мають такі властивості: $D_t^j u(0,\cdot) \in \mathbf{H}_{(n-j)l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $D_t^j u(t,\cdot) \in \mathbf{E}_{\Lambda\widetilde{t},l}(\Omega_{2\pi}^p)$, якщо виконуються такі умови $0 < \widetilde{t} < t \leq T$ та $j = 0, 1, \ldots, n$. Далі вважаємо, що квадрат норми у декартовому добутку просторів дорівнює сумі квадратів норм у відповідних просторах заданого декартового добутку.

2.2.2. Постановка задачі. Розглянемо задачу Коші для безтипної системи двох рівнянь високого порядку з частинними похідними і сталими коефіцієнтами

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(D) D_t^{n-j} u = 0, \tag{2.43}$$

де

$$a_j(D) = \sum_{|s| \leq jl} a_{js} D^s = \begin{pmatrix} a_j^{11}(D) & a_j^{12}(D) \\ a_j^{21}(D) & a_j^{22}(D) \end{pmatrix}, \tag{2.44}$$

$$a_{js}=\begin{pmatrix} a_{js}^{11} & a_{js}^{12} \\ \\ a_{js}^{21} & a_{js}^{22} \end{pmatrix},\ a_j^{j_1j_2}(D)=\sum_{|s|\le jl} a_{js}^{j_1j_2}D^s, \tag{2.45}$$

$a_0(D) = a_{00} = a_0 = \begin{pmatrix} a_0^{11} & a_0^{12} \\ a_0^{21} & a_0^{22} \end{pmatrix}$, $\det a_0 \neq 0$, числа $a_{js}^{j_1j_2}$ належать множині $\mathcal{O}_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le R\}$ — кругу радіуса R комплексної площини, натуральне число l є показником анізотропності системи (2.43) стосовно порядків за просторовими змінними $x_1, \dots, x_p$ та часовою змінною t.

Початкові умови задано при $t = 0$, а саме

$$D_t^j u\Big|_{t=0} = \varphi_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2.46}$$

де $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ — задані функції.

Розв'язок $u = \mathrm{col}\,(u_1, u_2)$ задачі (2.43), (2.46) шукаємо у декартовому добутку просторів $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\times\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$, що є класом розв'язності задачі, причому

$$\|u; \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p) \times \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 = \|u_1; \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 + \|u_2; \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2.$$

Число Λ залежить від коефіцієнтів $a_{js}^{j_1j_2}$ системи (2.43) і вибирається таким способом. Позначимо через $\tilde{a}_j(k)$ обмежену матричну послідовність

$$\widetilde{k}^{-jl} a_j(k) \equiv \sum_{|s|\le jl} a_{js}\Big(\frac{k}{\widetilde{k}}\Big)^s \cdot \widetilde{k}^{|s|-jl}.$$

Очевидно, що $\tilde{a}_j^{j_1j_2}(k) = \widetilde{k}^{-jl} a_j^{j_1j_2}(k)$ та $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} |\tilde{a}_j^{j_1j_2}(k)| \le \sum\limits_{|s|\le jl} |a_{js}^{j_1j_2}| \le C^p_{jl+p}R$, $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \|\tilde{a}_j(k)\| \le 2C^p_{jl+p}R$, де $\|\cdot\|$ позначає евклідову норму матриці, C^β_α — біномні коефіцієнти.

Нехай $\lambda_j(k)$ — корінь характеристичного рівняння

$$f(\lambda, k) = \det\Big(\sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_j(k)\lambda^{n-j}\Big) = 0. \tag{2.47}$$

Впорядкувавши для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ всі $2n$ коренів многочлена f за спаданням дійсної частини $\mathrm{Re}\,\lambda_1(k) \ge \dots \ge \mathrm{Re}\,\lambda_{2n}(k)$, покладемо

$$\Lambda > \limsup_{k\in\mathbb{Z}^p} \mathrm{Re}\,\lambda_1(k). \tag{2.48}$$

Оскільки $f(\lambda,k)$ — визначник другого порядку, то

$$f(\lambda,k)=\Big(\sum_{j=0}^{n}\tilde a_j^{11}(k)\lambda^{n-j}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n}\tilde a_j^{22}(k)\lambda^{n-j}\Big)-\\ -\Big(\sum_{j=0}^{n}\tilde a_j^{12}(k)\lambda^{n-j}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n}\tilde a_j^{21}(k)\lambda^{n-j}\Big),\quad (2.49)$$

а саме

$$f(\lambda,k)=\sum_{j=0}^{2n}f_j(k)\lambda^{2n-j}=f_0(k)\lambda^{2n}+f_1(k)\lambda^{2n-1}+\cdots+f_{2n}(k),\qquad (2.50)$$

де $f_j(k)=\sum\limits_{\alpha=0}^{j}\Big(\tilde a_{j-\alpha}^{11}(k)\tilde a_{\alpha}^{22}(k)-\tilde a_{j-\alpha}^{12}(k)\tilde a_{\alpha}^{21}(k)\Big)$ при $0\le j\le n$ і при $n\le j\le 2n$ $f_j(k)=\sum\limits_{\alpha=0}^{2n-j}\Big(\tilde a_{n-\alpha}^{11}(k)\tilde a_{j-n+\alpha}^{22}(k)-\tilde a_{n-\alpha}^{12}(k)\tilde a_{j-n+\alpha}^{21}(k)\Big)$, зокрема $f_0(k)=\det a_0$, $f_{2n}(k)=\det\tilde a_n(k)$. З оцінки Коші [135, с. 381] для коренів многочлена $|\lambda_j(k)|\le\big(1+\max\big(|f_1(k)|,\ldots,|f_{2n}(k)|\big)\big)/|\det a_0|$ випливає, що вони є рівномірно обмеженими за змінною k разом із коефіцієнтами многочлена $f(\lambda,k)$, тому границя Λ існує і $|\Lambda|$ обмежене тим самим числом, що й $|\lambda_j(k)|$.

2.2.3. Побудова та попереднє оцінювання розв'язку. Введемо нові невідомі функції $v^1,\ldots,v^{2n}$ за формулою $\begin{pmatrix}v^{2j-1}\\ v^{2j}\end{pmatrix}=\widetilde D^{(n+1-j)l}D_t^{j-1}u$, а функції $\varphi^1,\ldots,\varphi^{2n}$ за формулою $\begin{pmatrix}\varphi^{2j-1}\\ \varphi^{2j}\end{pmatrix}=\widetilde D^{(n+1-j)l}\varphi_{j-1}$, тоді

$$D_t\begin{pmatrix}v^{2j-1}\\ v^{2j}\end{pmatrix}=\widetilde D^{l}\begin{pmatrix}v^{2j+1}\\ v^{2j+2}\end{pmatrix},\ D_t\begin{pmatrix}v^{2n-1}\\ v^{2n}\end{pmatrix}=-\widetilde D^{l}a_0^{-1}\big(\tilde a_n(D),\ldots,\tilde a_1(D)\big)v,$$

де $v=\mathrm{col}\,(v^1,\ldots,v^{2n})$, $j=1,\ldots,n-1$.

Нехай $A_{j\cdot}(k)$ — j-тий рядок квадратної $2n$-матриці $A(k)$, причому рядки $A_{1\cdot}(k),\ldots,A_{2n-2\cdot}(k)$ є рядками одиничної матриці E_{2n} з номерами $3,\ldots,2n$,

$$\begin{pmatrix}A_{2n-1\cdot}(k)\\ A_{2n\cdot}(k)\end{pmatrix}=-a_0^{-1}\big(\tilde a_n(k),\ldots,\tilde a_1(k)\big),$$

а $\varphi = \operatorname{col}(\varphi^1, \dots, \varphi^{2n})$, тоді задачу (2.43), (2.46) можна записати так:

$$D_t v = \widetilde{D}^l A(D) v, \tag{2.51}$$

$$v\big|_{t=0} = \varphi. \tag{2.52}$$

Якщо $v(t,x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k(t) e^{i(k,x)}$, то вектор-функції $v_k(t)$ є розв'язками задач $v_k' = \widetilde{k}^l A(k) v_k$, $v_k(0) = \varphi_k$, де $\varphi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_k e^{i(k,x)}$. Ці розв'язки подаються в явному вигляді

$$v_k(t) = e^{\widetilde{k}^l A(k) t} \varphi_k. \tag{2.53}$$

Для оцінювання норми $v_k(t)$ у випадку простих коренів многочлена $f(\lambda, k)$ запишемо формулу [113]

$$v_k(t) = \Big(\varphi_k, A(k)\varphi_k, \dots, \big(A(k)\big)^{2n-1}\varphi_k\Big) W_k^{-\mathsf{T}} \cdot \begin{pmatrix} \exp\big(\widetilde{k}^l \lambda_1(k) t\big) \\ \dots\dots\dots \\ \exp\big(\widetilde{k}^l \lambda_{2n}(k) t\big) \end{pmatrix}, \tag{2.54}$$

де $W_k = \big(\lambda_j^{i-1}(k)\big)_{i,j=1}^{2n}$ — матриця Вандермонда, $W_k^{-\mathsf{T}}$ — обернена до транспонованої матриці Вандермонда W_k^{T}.

Для обчислення матриці $W_k^{-\mathsf{T}}$ використовуємо формулу [55]

$$W_k^{-\mathsf{T}} = \big(f_{2n+1-i-j}(k)\big)_{i,j=1}^{2n} \cdot W_k \Big(\operatorname{diag}\big(f'\big(\lambda_j(k), k\big)\big)_{j=1}^{2n}\Big)^{-1}, \tag{2.55}$$

де $f_j(k) = 0$ при $j < 0$, $f' = \partial f / \partial \lambda$.

Перетворимо $\big(f'\big(\lambda_j(k), k\big)\big)^{-2}$ до дробів [111]

$$\frac{(\det a_0)^{2n-1}}{\operatorname{Res}(f, f')} \prod_{\substack{1\le\alpha<\beta\le 2n \\ \alpha\ne j,\ \beta\ne j}} \big(\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)\big)^2,$$

де $\operatorname{Res}(f, g)$ — результант многочленів f та g.

Оскільки $\big\|A(k)\big\| \le \dfrac{\text{const}}{\det a_0}$, $\big|e^{\widetilde{k}^l \lambda_j(k) t}\big| \le \text{const} \cdot e^{\widetilde{k}^l \Lambda t}$, то

$$\big\|e^{-\widetilde{k}^l \Lambda t} v_k(t)\big\|^2 \le \text{const} \cdot \frac{\|\varphi_k\|^2}{|\det S(f)|}, \tag{2.56}$$

причому $\det S(f) = \mathrm{Res}\,(f, f')$, де $S(f)$ — матриця Сильвестра многочлена $f = f(\lambda, k)$, яка є блочною матрицею і складається з двох тепліцевих матриць з $2n-1$ і $2n$ рядками відповідно,

$$S(f)=\begin{pmatrix} \Big(f_{j-i}(k)\Big)_{\substack{i=1,\dots,2n-1\\ j=1,\dots,4n-1}} \\ \Big((2n-j+i)f_{j-i}(k)\Big)_{\substack{i=1,\dots,2n\\ j=1,\dots,4n-1}} \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Число $\dfrac{\det S(f)}{\det a_0}$ є дискримінантом многочлена f і приймає малі значення у випадку наявності близьких коренів цього многочлена, тому нерівність (2.56) потребує уточнення.

Використовуючи оцінку матричної експоненти [24] отримуємо нерівність для норми вектора $e^{-\widetilde{k}^l \Lambda t} v_k(t) = e^{\widetilde{k}^l (A(k)-\Lambda)t} \varphi_k$:

$$\left\| e^{-\widetilde{k}^l \Lambda t} v_k(t) \right\|^2 \le \mathrm{const} \cdot \widetilde{k}^{(4n-2)l} \cdot \|\varphi_k\|^2, \tag{2.58}$$

В останній оцінці показник степеня $(4n-2)l$ не можна зменшити (зокрема, у випадку одного $2n$-кратного власного значення матриць $A(k)$ такої ж геометричної кратності). Для отримання кращої оцінки, ніж (2.58), встановимо деякі спеціальні властивості матриць Сильвестра.

2.2.4. Властивості матриць Сильвестра. Оскільки матриця Сильвестра многочлена $f = f(\lambda, k)$ — форма степеня $4n-1$ його коефіцієнтів $f_0(k), f_1(k), \dots, f_{2n}(k)$, то важливим для подальших оцінок є вигляд її доданків, що містять найвищі степені окремих змінних $f_0(k), f_1(k), \dots, f_{2n}(k)$. При відповідних обчисленнях враховуємо формулу (2.47), що задає структуру многочлена f.

Лема 2.2 *Якщо $f(\lambda) = h(\lambda) + a\lambda^r g(\lambda)$, де $f(\lambda)$, $h(\lambda)$ та $g(\lambda)$ — многочлени,*

$$f(\lambda) = f_0\lambda^{2n} + f_1\lambda^{2n-1} + \cdots + f_{2n}, \tag{2.59}$$

$$h(\lambda) = h_0\lambda^{2n} + h_1\lambda^{2n-1} + \cdots + h_{2n}, \tag{2.60}$$

$$g(\lambda) = g_0\lambda^{n} + g_1\lambda^{n-1} + \cdots + g_n, , \tag{2.61}$$

r — ціле число, $0 \le r \le n-1$, $S(f)$, $S(h)$ та $S(g)$ — матриці Сильвестра цих многочленів, то визначник $\det S(f)$ матриці $S(f)$ є многочленом за змінною a степеня не вище $3n-1$ для $r=0$, причому

$$\det S(f) = \pm (nh_0g_0)^n \det S(g) a^{3n-1} + \dots + \det S(h), \tag{2.62}$$

і степеня не вище $3n$ для $r \ge 1$, причому

$$\det S(f) = \pm \big((n-r)h_0g_0\big)^{n-r} \big(rh_{2n}\big)^{r-1} g_n^{r+1} \det S(g) a^{3n} + \dots + \det S(h), \tag{2.63}$$

а знак визначається числом $(-1)^{nr+n+r}$.

Доведення. Оскільки $f_i = h_i + ag_{r-n+i}$ для $i \in \{n-r, \dots, 2n-r\}$, $f_i = h_i$ для $i \in \{0, 1, \dots, n-r-1, 2n-r+1, \dots, 2n\}$ і матриця Сильвестра $S(f)$ має такий блочний вигляд: $S(f) = \begin{array}{r c} & 4n-1 \\ 2n-1 & \left(\begin{matrix} (f_{j-i}) \\ ((\omega+n)f_{j-i}) \end{matrix}\right) \\ 2n & \end{array}$, де i — номер рядка, j — номер стовпця, то для $r=0$ або $r=1$ маємо

$$S(f) = \begin{array}{r c} & 4n{-}1 \\ \begin{matrix} 2n{-}1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{pmatrix} (h_{j-i}) \\ ((\omega+n)h_{j-i}) \end{pmatrix} \end{array} + a \cdot \begin{array}{r c} & \begin{matrix} n-r & \quad 3n+r-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n{-}1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & (g_{j-i}) \\ 0 & ((\omega+r)g_{j-i}) \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2.64}$$

де $\omega = n - j + i$, $h_j = 0$ для $j < 0$ та $j > 2n$ і $g_j = 0$ для $j < 0$ та $j > n$.

Для $r > 1$

$$S(f) = S(h) + a \begin{array}{r c} & \begin{matrix} n{-}r & \qquad 3n & \qquad r{-}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n{-}1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & (g_{j-i}) & 0 \\ 0 & ((\omega+r)g_{j-i}) & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{2.65}$$

З формул (2.64) та (2.65) відповідно отримуємо

$$S(f) = \begin{array}{r c} & \begin{matrix} 4n{-}1 & \qquad 3n{+}r{-}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n{-}1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{pmatrix} (h_{j-i}) & (g_{j-i}) \\ ((\omega+n)h_{j-i}) & ((\omega+r)g_{j-i}) \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} E_{n-r} & 0 \\ 0 & E_{3n+r-1} \\ 0 & aE_{3n+r-1} \end{pmatrix},$$

$$S(f) = \begin{array}{r} \\ 2n-1 \\ 2n \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad 4n-1 & \qquad\quad 3n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \big(h_{j-i}\big) & \big(g_{j-i}\big) \\ \big((\omega+n)h_{j-i}\big) & \big((\omega+r)g_{j-i}\big) \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} E_{n-r} & 0 & 0 \\ 0 & E_{3n} & 0 \\ 0 & 0 & E_{r-1} \\ 0 & aE_{3n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу Біне–Коші [17] маємо при $r=0$ і $r=1$ рівність

$$\det S(f) = a^{3n+r-1} \det \begin{array}{r} \\ \\ 2n \end{array}\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad n-r & \qquad\quad 3n+r-1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \big(h_{j-i}\big) & \big(g_{j-i}\big) \\ \big((\omega+n)h_{j-i}\big) & \big((\omega+r)g_{j-i}\big) \end{pmatrix} \end{array} + \cdots + \det S(h), \qquad (2.66)$$

а при $r>1$ іншу рівність

$$\det S(f) = a^{3n} \det \begin{array}{r} \\ 2n-1 \\ 2n \end{array}\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n-r & \qquad 3n & \qquad r-1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} H_1 & \big(g_{j-i}\big) & H_3 \\ H_2 & \big((\omega+r)g_{j-i}\big) & H_4 \end{pmatrix} \end{array} + \cdots + \det S(h),$$

де $H_1 = h_{j-i}$, $H_2 = (\omega+n)h_{j-i}$, $H_3 = h_{\omega+3n-r}$, $H_4 = (r-n-\omega)h_{\omega+3n-r}$.

Коефіцієнт при a^{3n+r-1} у формулі (2.66) перепишемо так:

$$\det \begin{array}{r} \\ n-r \\ \\ n-r \\ n+r \end{array}\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n-r & n-r & \quad 2n+2r-1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} S_3 & S_4 & \bigstar_2 \\ 0 & 0 & \big(g_{j-i}\big) \\ S_1 & S_2 & \bigstar_1 \\ 0 & 0 & \big((\omega+r)g_{j-i}\big) \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \pm \det \begin{array}{r} \\ n-r \\ n-r \\ \\ n+r \end{array}\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n-r & n-r & \quad 2n+2r-1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \bigstar_1 \\ S_3 & S_4 & \bigstar_2 \\ 0 & 0 & \big(g_{j-i}\big) \\ 0 & 0 & \big((\omega+r)g_{j-i}\big) \end{pmatrix} \end{array},$$

де $\pm = (-1)^{n+r}$, $S_1 = (\omega + n)h_{j-i}$, $S_3 = h_{j-i}$, $S_2 = (\omega + r)g_{j-i}$, $S_4 = g_{j-i}$,

$$\det \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} = \left(\det \begin{pmatrix} 2nh_0 & (n+r)g_0 \\ h_0 & g_0 \end{pmatrix} \right)^{n-r} = \big((n-r)h_0 g_0\big)^{n-r}.$$

Отже,

$$\det S(f) = (-1)^{n+r}\big((n-r)h_0g_0\big)^{n-r} a^{3n+r-1} \times$$

$$\times \det \begin{array}{r} \\ n+r-1 \\ n+r \end{array} \!\!\begin{array}{c} 2n+2r-1 \\ \begin{pmatrix} (g_{j-i}) \\ ((\omega+r)g_{j-i}) \end{pmatrix} \end{array} + \cdots + \det S(h),$$

і формулу (2.62) доведено.

Формула (2.63) для $r = 1$ випливає з таких обчислень:

$$\det \begin{array}{r} \\ n \\ n+1 \end{array} \!\!\begin{array}{c} 2n+1 \\ \begin{pmatrix} (g_{j-i}) \\ ((\omega+1)g_{j-i}) \end{pmatrix} \end{array} = \det \begin{array}{r} \\ n \\ n \\ 1 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2n & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (g_{j-i}) & 0 \\ ((\omega+1)g_{j-i}) & 0 \\ \bigstar & g_n \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \det \begin{array}{r} \\ n-1 \\ 1 \\ n \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2n-1 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (g_{j-i}) & 0 \\ \bigstar & g_n^2 \\ (\omega g_{j-i}) & 0 \end{pmatrix} \end{array} = (-1)^n g_n^2 S(g).$$

Для $r > 1$ подамо коефіцієнт при a^{3n} у вигляді

$$\det \begin{array}{c} \\ n{-}r \\ n \\ r{-}1 \\ n{-}r \\ n{+}1 \\ r{-}1 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} n{-}r & n{-}r & & r{-}1 & r{-}1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} S_3 & S_4 & \bigstar_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bigstar_4 & S_7 & S_8 \\ S_1 & S_2 & \bigstar_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bigstar_3 & S_5 & S_6 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \pm \det \begin{array}{c} \\ n{-}r \\ n{-}r \\ n \\ n{+}1 \\ r{-}1 \\ r{-}1 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} n{-}r & n{-}r & & r{-}1 & r{-}1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \bigstar_1 & 0 & 0 \\ S_3 & S_4 & \bigstar_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bigstar_3 & S_5 & S_6 \\ 0 & 0 & \bigstar_4 & S_7 & S_8 \end{pmatrix} \end{array},$$

де $\pm = (-1)^{(n-r)r}$, $S_5 = (\omega{+}r{-}n)g_{2n-\omega}$, $S_6 = (\omega{+}1{-}n)h_{3n-1-\omega}$, $S_7 = g_{2n+1-\omega}$, $S_8 = h_{3n-\omega}$, $\det \begin{pmatrix} S_5 & S_6 \\ S_7 & S_8 \end{pmatrix} = \left(\det \begin{pmatrix} rg_n & h_{2n-1} \\ 0 & h_{2n} \end{pmatrix} \right)^{r-1} = \big(rh_{2n}g_n\big)^{r-1}$.

Звідси отримуємо формулу (2.63) для $r > 1$. Лему доведено. ∎

Зауважимо, що у доведенні леми 2.2 і далі зірочки ($\bigstar$) позначають матриці, від яких не залежать відповідні визначники.

Лема 2.3 *Якщо в умовах леми 2.2 многочлен $g(\lambda)$ має степінь $n{-}1$, а саме $g(\lambda) = g_0\lambda^{n-1} + g_1\lambda^{n-2} + \cdots + g_{n-1}$, то*

$$\det S(f) = \pm\big((n+1)h_0g_0\big)^{n+1} \det S(g)a^{3n-2} + \cdots + \det S(h), \qquad (2.67)$$

для $r=0$, *а для* $r\ge 1$

$$\det S(f)=\pm\big((n-r+1)h_0g_0\big)^{n-r+1}\times \\ \times\big(rh_{2n}\big)^{r-1}g_{n-1}^{r+1}\det S(g)a^{3n-1}+\dots+\det S(h), \quad (2.68)$$

причому знак є знаком числа $(-1)^{nr+n+1}$.

Доведення. Матрицю Сильвестра можна подати у вигляді

$$S(f)=\begin{array}{r} \\ 2n{-}1 \\ 2n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad 4n{-}1 \quad & \quad 3n{+}r{-}2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (h_{j-i}) & (g_{j-i}) \\ ((\omega+n)h_{j-i}) & ((\omega+r-1)g_{j-i}) \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} E_{n-r+1} & 0 \\ 0 & E_{3n+r-2} \\ 0 & aE_{3n+r-2} \end{pmatrix}$$

при $r\in\{0,1\}$ та у вигляді

$$S(f)=\begin{array}{r} \\ 2n{-}1 \\ 2n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad 4n{-}1 \quad & \quad 3n{-}1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (h_{j-i}) & (g_{j-i}) \\ ((\omega+n)h_{j-i}) & ((\omega+r-1)g_{j-i}) \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} E_{n-r+1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{3n-1} & 0 \\ 0 & 0 & E_{r-1} \\ 0 & aE_{3n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

при $r\in\{2,\dots,n-1\}$, де $\omega=n-j+i$, $h_j=0$ при $j<0$ та $j>2n$ і $q_j=0$ для $j<0$ та $j>n-1$.

За формулою Біне–Коші знаходимо многочлен $\det S(f)$, степінь якого при $r\in\{0,1\}$ не перевищує числа $3n+r-2$, а при $r\in\{2,\dots,n-1\}$ — числа $3n-1$, причому відповідно справджуються рівності

$$\det S(f){=}a^{3n+r-2}\det \begin{array}{r} \\ \\ 2n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad n{-}r+1 \quad & \quad 3n{+}r{-}2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (h_{j-i}) & (g_{j-i}) \\ ((\omega+n)h_{j-i}) & ((\omega+r-1)g_{j-i}) \end{pmatrix} \end{array} +\dots+\det S(h),$$

$$\det S(f)=a^{3n-1}\det \begin{array}{r} \\ 2n{-}1 \\ 2n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n{-}r{+}1 & \quad 3n{-}1 \quad & r{-}1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} H_1 & (g_{j-i}) & H_3 \\ H_2 & ((\omega{+}r{-}1)g_{j-i}) & H_4 \end{pmatrix} \end{array} +\dots+\det S(h),$$

де $H_1 = h_{j-i}$, $H_2 = (\omega+n)h_{j-i}$, $H_3 = h_{\omega+3n-r}$, $H_4 = (r-n-\omega)h_{\omega+3n-r}$.

Аналогічно до доведення леми 2.2 маємо

$$\det \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n+1 & 3n-2 \end{array} \\ 2n & \begin{pmatrix} (h_{j-i}) & (g_{j-i}) \\ ((\omega+n)h_{j-i}) & ((\omega-1)g_{j-i}) \end{pmatrix} \end{array} = \big(-(n+1)h_0g_0\big)^{n+1} \det S(g)$$

при $r=0$,

$$\det \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & 3n-1 \end{array} \\ 2n & \begin{pmatrix} (h_{j-i}) & (g_{j-i}) \\ ((\omega+n)h_{j-i}) & ((\omega)g_{j-i}) \end{pmatrix} \end{array} = -\big((n-1)h_0g_0\big)^{n-1} g_{n-1}^2 \det S(g)$$

при $r=1$ і

$$\det \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} n-r+1 & 3n-1 & r-1 \end{array} \\ 2n & \begin{pmatrix} (h_{j-i}) & (g_{j-i}) & (h_{\omega+3n-r}) \\ ((\omega+n)h_{j-i}) & ((\omega+r-1)g_{j-i}) & ((r-n-\omega)h_{\omega+3n-r}) \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= (-1)^{nr+n+1}\big((n-r+1)h_0g_0\big)^{n-r+1}(rh_{2n})^{r-1} g_{n-1}^{r+1} \det S(g)$$

при $r>1$. Лему доведено. ∎

Лема 2.4 *Нехай многочлен $g(\lambda)$ має вигляд* (2.61), *тобто* $g(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n} g_j\lambda^{n-j}$, *тоді*

$$\det S(g) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^{\alpha+n\alpha}\alpha^{\alpha}(n-\alpha)^{n-\alpha} g_0^{\alpha} g_n^{n-\alpha-1} \cdot g_\alpha^n + \cdots, \tag{2.69}$$

де три крапки означають доданки, що не містять n-них степенів коефіцієнтів g_α.

Доведення. Функція $S(g)$ є однорідною степеня $2n-1$ функцією щодо коефіцієнтів $g_0, g_1, \ldots, g_n$ многочлена $g(\lambda)$. Нехай $\omega = n-j+i$, $0 \le \alpha \le n-1$, тоді $\omega g_{j-i} = (\omega-n+\alpha)g_{j-i} + (n-\alpha)g_{j-i}$. З властивостей визначників отримуємо

$$\det S(g) = \det \begin{array}{r} \\ n{-}1 \\ n{-}1 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} 2n{-}1 \\ \begin{pmatrix} \big(g_{j-i}\big) \\ \big((\omega{-}n{+}\alpha)g_{j-i}\big) \\ \big((2n{-}1{+}\omega)g_{1-\omega}\big) \end{pmatrix} \end{array},$$

причому матриця $\big((\omega{-}n{+}\alpha)g_{j-i}\big)$ очевидно не залежить від коефіцієнта g_α. Звідси випливає рівність

$$\det S(g) = g_0^n \det \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 & 0 \\ \bigstar_1 & \bigstar_2 & \big(-\omega g_\omega\big) \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix} + \cdots = n g_0^n \det \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \bigstar & \big(\omega g_\omega\big) \end{pmatrix} + \cdots =$$

$$= n g_0^n \det \big(\omega g_\omega\big) + \cdots = n^n g_n^{n-1} g_0^n + \cdots,$$

де три крапки означають доданки менших степенів щодо g_0, E_n — одинична матриця. Для $\alpha = n-1$ отримуємо

$$\det S(g) = g_{n-1}^n \det \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} & 0 \\ \big((\omega{-}1)g_{j-i}\big) & \bigstar_1 & \bigstar_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots =$$

$$= (-1)^{n-1} g_{n-1}^n \det \begin{pmatrix} \big((\omega{-}1)g_{j-i}\big) & \bigstar \\ 0 & E_n \end{pmatrix} + \cdots = (-1)^{n-1}(n{-}1)^{n-1} g_0^{n-1} g_{n-1}^n + \cdots,$$

де три крапки означають доданки менших степенів щодо g_{n-1}.

Для $0 < \alpha < n-1$ аналогічно отримаємо низку рівностей:

$$\det S(g) = g_\alpha^n \det \begin{array}{r} \\ n{-}1 \\ n{-}1 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \alpha \qquad\qquad\qquad 1 \qquad\quad \\ \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} & 0 & 0 \\ G_1 & \bigstar_1 & \bigstar_2 & G_2 \\ 0 & 0 & n-\alpha & 0 \end{pmatrix} \end{array} + \cdots =$$

$$= (-1)^{n-1+n\alpha}(n{-}\alpha) g_\alpha^n \det \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \bigstar & G \end{pmatrix} + \cdots = (-1)^{n-1+n\alpha}(n{-}\alpha) g_\alpha^n \det G + \cdots,$$

де матриці $G_1 = \big((\omega - n + \alpha)g_{j-i}\big)$ та $G_2 = \big((\alpha - 2n - \omega)g_\omega\big)$ мають $n-1$ рядок і α та $n-\alpha-1$ стовпців, матриця $G = \big(G_1\ G_2\big)$.

Оскільки справджується рівність $\det G = \alpha^\alpha(\alpha - n)^{n-\alpha-1}g_0^\alpha g_n^{n-\alpha-1}$, то отримуємо формулу (2.69) у загальному випадку при $0 < \alpha < n-1$.

Лему доведено. ∎

2.2.5. Оцінювання малих знаменників. Коефіцієнти многочлена f є многочленами від змінних $a_{js}^{j_1 j_2}$ — коефіцієнтів системи (2.43), тому функція $\det S(f)$ також є многочленом від цих змінних. Позначимо $b_1, \ldots, b_p$ коефіцієнти при похідних $D_1^{nl}, \ldots, D_p^{nl}$ оператора $\tilde{a}_n^{11}(D)$, а відповідні коефіцієнти оператора $\tilde{a}_n^{22}(D)$ — $b_{p+1}, \ldots, b_{2p}$; нехай $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_{2p})$.

Із формули (2.49) випливає рівність $f(\lambda, k) = b_j \cdot \left(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\right)^{nl} g(\lambda, k) + h(\lambda, k)$, де многочлени $g(\lambda, k)$ та $h(\lambda, k)$ не залежать від b_j і визначаються формулами

$$g(\lambda, k) = \sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_j^{22}(k)\lambda^{n-j}, \qquad h(\lambda, k) = \det a_0 \cdot \lambda^{2n} + \cdots ,$$

де три крапки — доданки меншого степеня. Використаємо лему 2.2 при $r = 0$, $h_0 = \det a_0$, $g_0 = a_0^{22}$, $a = b_j \cdot \big(k_j/\widetilde{k}\big)^{nl}$, тоді

$$\det S(f) = (-n \det a_0 \cdot a_0^{22})^n \cdot \left(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\right)^{nl(3n-1)} \det S(g) \cdot b_j^{3n-1} + \cdots , \tag{2.70}$$

де три крапки означають доданки зі степенями b_j^α, $0 \le \alpha \le 3n-2$. З леми 2.4 при $\alpha = 0$, $g_0 = a_0^{22}$, $g_n = b_{p+j} \cdot \big(k_j/\widetilde{k}\big)^{nl}$ випливає, що

$$\det S(g) {=} (n a_0^{22})^n \left(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\right)^{nl(n-1)} \cdot b_{p+j}^{n-1} + \cdots , \tag{2.71}$$

де три крапки означають доданки зі степенями b_{p+j}^α, $0 \le \alpha \le n-2$.

Позначимо $\zeta(r)$ функцію $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \widetilde{k}^{-r}$. Вона існує при $r > p$ і є багатовимірним аналогом дзета-функції Рімана.

Лема 2.5 *Вважаємо, що $0 < \varepsilon < 1$, $r > p$, коефіцієнти системи (2.43) — фіксовані (за винятком коефіцієнтів $b_1, \ldots, b_{2p}$) та задовольняють умови:*

$$\det a_0 \ne 0, \qquad a_0^{22} \ne 0. \tag{2.72}$$

Тоді існує множина $W_\varepsilon \subset \mathcal{O}_R^{2p}$ *така, що* $\operatorname{meas} W_\varepsilon \le \varepsilon$ *і для всіх векторів* $\bar b \in \mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ *та для всіх* $k \neq 0$ *справджується оцінка знизу*

$$|\det S(f)| \ge \varepsilon^{2n-1} C_1^{-1} \widetilde{k}^{-(2n-1)r}, \tag{2.73}$$

де $C_1 = \big(2\zeta(r)(p+1)^{nl}\pi^{2p}R^{4p-2}\big)^{2n-1} / \big(na_0^{22}\big)^{2n} (\det a_0)^n$.

Доведення. Формули (2.70) і (2.71) дають рівність

$$\det S(f) = (-\det a_0)^n \big(na_0^{22}\big)^{2n} \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{nl(4n-2)} B_{p+j}(k) B_j(k), \tag{2.74}$$

у випадку $B_{p+j}(k) \neq 0$, де $B_{p+j}(k)$ — унітальний (з одиничним старшим коефіцієнтом) степені $n-1$ многочлен змінної b_{p+j}, коефіцієнти якого не залежать від змінної b_j, $B_j(k)$ — унітальний степені $3n-1$ многочлен змінної b_j.

Нехай $W_\varepsilon^1(k)$ — множина таких векторів $\bar b \in \mathcal{O}_R^{2p}$, для яких при фіксованому k виконується оцінка

$$|B_{p+j}(k)| < \Big(\frac{\varepsilon \widetilde{k}^{-r}}{2\zeta(r)\pi^{2p}R^{4p-2}}\Big)^{(n-1)/2}. \tag{2.75}$$

Множина $\tilde W_\varepsilon^1(k)$ тих комплексних чисел b_{p+j} із круга $\mathcal{O}_R$, для яких виконується нерівність (2.75) з довільним (але фіксованим) комплексним вектором $(b_1, \dots, b_{p+j-1}, b_{p+j+1}, \dots, b_{2p}) \in \mathcal{O}_R^{2p-1}$ за лемою Картана [6, с. 267] має оцінку $\operatorname{meas} \tilde W_\varepsilon^1(k) \le \dfrac{\varepsilon \widetilde{k}^{-r}}{2\zeta(r)(\pi R^2)^{2p-1}}$. Після інтегрування по області $\mathcal{O}_R^{2p-1}$ отримуємо $\operatorname{meas} W_\varepsilon^1(k) \le \dfrac{\varepsilon}{2\zeta(r)} \cdot \widetilde{k}^{-r}$. Аналогічну оцінку справджує міра множини $W_\varepsilon^2(k)$ тих $b \in \mathcal{O}_R^{2p}$, для яких при даному k виконується оцінка

$$|B_j(k)| < \Big(\frac{\varepsilon \widetilde{k}^{-r}}{2\zeta(r)\pi^{2p}R^{4p-2}}\Big)^{(3n-1)/2}.$$

Тому на множині $\mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon(k)$, де множина $W_\varepsilon(k) = W_\varepsilon^1(k) \cup W_\varepsilon^2(k)$, а $\operatorname{meas} W_\varepsilon(k) \le \varepsilon/\zeta(r)\widetilde{k}^r$, із рівності (2.74) випливає нерівність

$$|\det S(f)| \ge \big|na_0^{22}\big|^{2n} |\det a_0|^n \Big(\frac{\varepsilon \widetilde{k}^{-r}}{2\zeta(r)(p+1)^{nl}\pi^{2p}R^{4p-2}}\Big)^{2n-1} \widetilde{k}^{-(2n-1)r}$$

для фіксованого вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$.

Отже, нерівність (2.73) виконується на множині $W \setminus W_\varepsilon$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, де $W_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} W_\varepsilon(k)$, $\operatorname{meas} W_\varepsilon \le \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \operatorname{meas} W_\varepsilon(k) = \varepsilon$.

Лему доведено. ■

Аналогічна нерівність справджується і при $a_0^{22} = 0$, якщо ненульовим є коефіцієнт a_0^{11} при похідній $D_t^n u_1$ у першому диференціальному рівнянні.

Якщо ж обидва коефіцієнти дорівнюють нулеві, тобто $a_0^{11} = a_0^{22} = 0$, то аналогічну до леми 2.5 лему можна довести для векторів утворених з відповідних коефіцієнтів операторів $\tilde{a}_n^{12}(D)$ та $\tilde{a}_n^{21}(D)$.

У випадку використання введеного перед лемою 2.5 вектора $\bar{b}$, згідно з лемою 2.3 (при $r = 0$, $h_0 = \det a_0$, $g_0 = \tilde{a}_1^{22}$, $a = b_j \cdot \big(k_j/\widetilde{k}\big)^{nl}$) і лемою 2.4 для $n-1$ на місце n (при $\alpha = 0$, $h_0 = \det a_0$, $g_{n-1} = b_{n+j} \cdot \big(k_j/\widetilde{k}\big)^{nl}$) замість рівностей (2.70) та (2.71) маємо рівності

$$\det S(f) = \big(-(n+1)\det a_0 \cdot \tilde{a}_1^{22}\big)^{n+1} \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{nl(3n-2)} \cdot \det S(g) \cdot b_j^{3n-2} + \cdots,$$
$$\det S(g) = \big((n-1)\, \tilde{a}_1^{22}\big)^{n-1} \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{nl(n-2)} b_{p+j}^{n-2} + \cdots,$$

де $g(\lambda, k) = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_j^{22}(k)\lambda^{n-j}$.

За обмеженості знизу модуля функції $\tilde{a}_1^{22}(k) \equiv \sum\limits_{|s|\le l} a_{1s}^{22} \Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{s} \widetilde{k}^{|s|-l}$ з цих рівностей випливає оцінка знизу для функції $|\det S(f)|$.

Лема 2.6 *Нехай виконуються умови (крім другої нерівності* (2.72)*) леми* 2.5 *і умова* $\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \widetilde{k}^{\theta} \cdot \big|\tilde{a}_1^{22}(k)\big| > 0$ *для деякого* $\theta \in \mathbb{R}$. *Тоді існує така множина* W_ε *з мірою* $\operatorname{meas} W_\varepsilon$, *яка не перевищує* ε, *що для всіх векторів* $\bar{b} \in \mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ *та для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ *справджується нерівність*

$$|\det S(f)| \ge \text{const } \cdot \varepsilon^{2n-2} \widetilde{k}^{-(2n-2)r-2n\theta}. \tag{2.76}$$

Доведення. Для $\det S(f)$ маємо подібну до (2.74) факторизацію

$$\det S(f) = (-(n+1)\det a_0)^{n+1}(n-1)^{n-1}\big(\tilde{a}_1^{22}\big)^{2n}\Big(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\Big)^{4nl(n-1)} B_{p+j}(k)B_j(k),$$

де $B_{p+j}(k)$ — унітальний степеня $n-2$ многочлен від b_{p+j}, коефіцієнти якого не залежать від змінної b_j, $B_j(k)$ — унітальний степеня $3n-2$ многочлен змінної b_j, тому

$$|\det S(f)| \geq C^{2n} \frac{(n+1)^{n+1}}{(p+1)^{2nl(n+1)}} (n-1)^{n-1} |\det a_0|^{n+1} \widetilde{k}^{-2n\theta} |B_{p+j}(k)||B_j(k)|,$$

де $C = \inf\limits_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \widetilde{k}^{\theta} \cdot \left|\tilde{a}_1^{22}(k)\right| > 0$.

Із леми Картана випливає, що існує множина W_ε, яка є об'єднанням зліченної кількості кругів, як і в лемі 2.5, $\operatorname{meas} W_\varepsilon \leq \varepsilon$, а на множині $\mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ виконуються нерівності

$$|B_{p+j}(k)| \geq \left(\frac{\varepsilon \widetilde{k}^{-r}}{2\zeta(r)\pi^{2p} R^{4p-2}}\right)^{(n-2)/2}, \ |B_j(k)| \geq \left(\frac{\varepsilon \widetilde{k}^{-r}}{2\zeta(r)\pi^{2p} R^{4p-2}}\right)^{(3n-2)/2}.$$

З цих нерівностей отримаємо оцінку (2.76) зі сталою

$$\varepsilon^{2n-2} C^{2n} (n+1)^{n+1} (n-1)^{n-1} |\det a_0|^{n+1} / (2\zeta(r)(p+1)^{nl} \pi^{2p} R^{4p-2})^{2n+2}.$$

Лему доведено. ■

Очевидно, що оцінка (2.76) краща від оцінки (2.73), якщо $\theta \leq p/2n$.

Якщо неможливо вважати незалежними параметрами коефіцієнти при старших похідних оператора $\tilde{a}_n(D)$, то використаємо коефіцієнти при молодших похідних цього оператора.

Сформуємо такий $2p$-вимірний вектор $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_{2p})$ з коефіцієнтів системи: $b_1, \ldots, b_p$ — коефіцієнти при похідних $D_1^{nl-\theta_1}, \ldots, D_p^{nl-\theta_1}$ оператора $\tilde{a}_n^{11}(D)$, а $b_{p+1}, \ldots, b_{2p}$ — при похідних $D_1^{nl-\theta_2}, \ldots, D_p^{nl-\theta_2}$ оператора $\tilde{a}_n^{22}(D)$.

Лема 2.7 *Нехай* $0 < \varepsilon < 1$, $r > p$, *коефіцієнти системи* (2.43), *що не є компонентами вектора* $\bar{b}$, — *фіксовані та задовольняють умови:* $\det a_0 \neq 0$, $|a_0^{11}| + |a_0^{22}| \neq 0$. *Тоді існує множина* $W_\varepsilon \subset \mathcal{O}_R^{2p}$ *така, що* $\operatorname{meas} W_\varepsilon \leq \varepsilon$ *і для всіх векторів* $\bar{b} \in \mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$ *та для всіх* $k \neq 0$ *справджується оцінка знизу*

$$|\det S(f)| \geq \varepsilon^{2n-1} C_1^{-1} \widetilde{k}^{-(2n-1)r-(3n-1)\theta_1-(n-1)\theta_2}. \tag{2.77}$$

Доведення. Використовуємо схему доведення леми 2.5 і враховуємо вибір вектора $\bar{b}$. Замість формули (2.74) маємо формулу

$$|\det S(f)| = |\det a_0|^n \big(na_0^{22}\big)^{2n} \Big(\frac{|k_j|}{\widetilde{k}}\Big)^{nl(4n-2)} \widetilde{k}^{-(3n-1)\theta_1-(n-1)\theta_2} |B_{p+j}(k)||B_j(k)|,$$

де $f(\lambda, k) = b_j\big(k_j^{nl-\theta_1}/\widetilde{k}^{nl}\big)g(\lambda, k) + h(\lambda, k)$, $g(\lambda, k) = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_j^{22}(k)\lambda^{n-j}$,
$h(\lambda, k) = \lambda^{2n} \det a_0 + \cdots$

Далі, для отримання нерівності (2.77), застосовуємо оцінки знизу многочленів $B_{p+j}(k)$ та $B_j(k)$, які отримані при доведенні леми 2.5.

Лему доведено. ■

Оцінка показує, що використання коефіцієнтів при старших похідних в якості змінних параметрів покращує оцінку дискримінанта многочлена f.

Якщо розглядати системи (2.43) з фіксованим оператором $a_n(D)$, то використовуємо лему 2.2 при $r > 0$. Для отримання відповідних оцінок достатньо вимагати степеневих оцінок знизу функцій $|\det \tilde{a}_n(k)|$ і $|\tilde{a}_n^{j_1 j_2}(k)|$.

2.2.6. Розв'язність задачі Коші. Наступна теорема про розв'язність задачі (2.43), (2.46) базується на лемі 2.5 і нерівності (2.56).

Позначимо $\mathbf{Y}_j = \mathbf{H}_{(n-j)l+(2n-1)r/2}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\mathbf{X}_n = \mathbf{E}_{-\Lambda,l}^n(\mathcal{D}^p)$, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{E}_{-\Lambda,l}^0(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 2.2 *Нехай виконуються умови леми* 2.5 *і* $\varphi_j \in Y_j^2$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *тоді для майже всіх векторів* $\bar{b} \in \mathcal{O}_R^{2p}$ *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (2.43), (2.46) *із простору* X_n^2. *Для довільного* $0 < \varepsilon < 1$ *і для всіх векторів* $\bar{b} \in \mathcal{O}_R^{2p} \setminus W_\varepsilon$, *де* W_ε *— множина з леми* 2.5, виконується нерівність

$$\|u; X_n^2\|^2 \leq \big(C_2\varepsilon^{-(2n-1)} + C_3\big) \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j; Y_j^2\|^2, \tag{2.78}$$

причому стала C_2 не залежить від коефіцієнтів системи (2.43).

Доведення. Розв'язок задачі (2.43), (2.46) та його похідні до $n-1$-го порядку включно визначаються формулою (2.53), тому

$$\|u;X_n^2\|^2 = \sum_{j=1}^{2n} \|v^j;X_0\|^2 + \|A_{2n-1\cdot}(D)v;X_0\|^2 + \|A_{2n\cdot}(D)v;X_0\|^2 \leq$$

$$\leq \mathrm{const}\cdot\|v;X_0^{2n}\|^2,$$

де стала залежить від коефіцієнтів системи.

Нехай S — множина, що складається з нульового вектора і тих векторів k, для яких $\operatorname{Re}\lambda_1(k) > \Lambda$. Ця множина за побудовою є скінченною, тому можна записати нерівність $\|u;X_n^2\|^2 \leq \mathrm{const}\sum_{j=1}^{2n}\sup_{t\in[0,T]}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus S} e^{-2\widetilde{k}^l\Lambda t}|v_k^j(t)|^2 + C_3$. Далі використовуємо оцінку (2.56), нерівність (2.73) з леми 2.5 і формулу для норми $\|\varphi_k\|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{k}^{2(n+1-j)l}\|\varphi_{kj}\|^2$, де φ_{kj} — коефіцієнти Фур'є векторфункції φ_j, та отримуємо нерівність (2.78).

За лемою Бореля-Кантеллі оцінка (2.73) виконується для майже всіх векторів $\bar{b}\in\mathcal{O}_R^{2p}$ для всіх (за винятком скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, звідки випливає розв'язність задачі у просторі X_n^2.

Теорему доведено. ∎

В умовах леми 2.6 достатньою умовою існування та єдиності розв'язку у просторі X_n^2 для всіх $\bar{b}\in\mathcal{O}_R^{2p}\backslash W_\varepsilon$ є належність функцій $\widetilde{D}^{n\theta-r/2}\varphi_j$ до простору Y_j, $j=0,1,\ldots,n-1$. Для отримання розв'язку задачі Коші з простору X_n^2 у випадку виконання умов леми 2.7, потрібно накладати сильніші умови гладкості, ніж у теоремі 2.2.

Теорема 2.3 *Нехай виконуються умови леми* 2.7 *і* $\widetilde{D}^{n\theta_1+(n-1)(\theta_1+\theta_2)/2}\varphi_j\in Y_j$, *тоді для всіх векторів* $\bar{b}\in\mathcal{O}_R^{2p}\setminus W_\varepsilon$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2.43), (2.46) *із простору* X_n^2 *і виконується нерівність*

$$\|u;X_n^2\|^2 \leq \left(C_4\varepsilon^{-(2n-1)} + C_5\right)\sum_{j=0}^{n-1}\|\widetilde{D}^{n\theta_1+(n-1)(\theta_1+\theta_2)/2}\varphi_j;Y_j^2\|^2,$$

де W_ε *— множина з леми* 2.7, *стала* C_4 *не залежить від коефіцієнтів системи* (2.43).

Доведення. З нерівностей (2.56) і (2.77) отримуємо оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|e^{-\widetilde{k}^l \Lambda t} v_k(t)\right\|^2 \leq \text{const}\cdot\varepsilon^{1-2n}\widetilde{k}^{(2n-1)r+(3n-1)\theta_1+(n-1)\theta_2}\|\varphi_k\|^2,$$

з якої випливає шукана нерівність для норми розв'язку задачі (2.43), (2.46).

Теорему доведено. ■

Для порівняння результатів: якщо використовувати оцінку (2.58), яка виконується для всіх систем (2.43), то для розв'язності задачі (2.43), (2.46) у просторі X_n^2 достатньо, щоб $\widetilde{D}^{(2n-1)(l-r/2)}\varphi_j \in Y_j^2$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, а якщо розглядати системи строго гіперболічного чи строго еліптичного типу ($|\det S(f)| \geq \text{const} > 0$), то достатньо виконання умови

$$\widetilde{D}^{-(2n-1)r/2}\varphi_j \in Y_j^2 \quad \big(\varphi_j \in \big(\mathbf{H}_{(n-j)l}(\Omega_{2\pi}^p)\big)^2\big).$$

Остання умова є найслабшою [74], а умова $\widetilde{D}^{(2n-1)(l-r/2)}\varphi_j \in Y_j^2$ є сильнішою чи слабшою за умову в теоремі 2.2 в залежності від того, чи $l>r/2$ чи $l<r/2$.

2.3. Висновки

Встановлено умови розв'язності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у просторах 2π-періодичних за змінною x функцій. Питання існування розв'язку пов'язано з проблемою малих знаменників — дискримінантів $D(k)$. Відмінність малих знаменників у задачі Коші від малих знаменників у багатьох інших крайових задачах полягає в тому, що вони обертаються в нуль разом із відповідними чисельниками дробів і тому ці дроби завжди мають оцінку зверху.

Використання метричного підходу до оцінки малих знаменників дозволяє покращити вказані оцінки дробів та встановити вищу гладкість розв'язку для майже всіх диференціальних рівнянь. Гладкість розв'язку підвищується (або послаблюються умови на праві частини задачі при фіксованій гладкості розв'язку), якщо кількість просторових змінних p та зведений порядок рівняння l задовольняють нерівність $p/l < 4$. Коли кількість просторових змінних в чотири або більше разів перевищує зведений порядок рівняння, то використання метричного підходу не дає підвищення гладкості розв'язку, яка в цьому випадку не залежить від кількості просторових змінних.

У підрозділі 2 розглянуто задачу Коші (2.43), (2.46) для безтипної системи двох рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у просторах 2π-періодичних за просторовими змінними і достатньо гладкими за часовою змінною функцій. Встановлено, що для всіх векторів (за винятком множини як завгодно малої міри), певним способом складених з коефіцієнтів системи (2.43), задача Коші є розв'язною.

Визначено залежність між гладкістю правих частин початкових умов та складом векторів, утворених з коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь (2.43).

Доведено за допомогою метричного підходу теоретико-числові нерівності для малих знаменників, які характерні для задачі Коші.

РОЗДІЛ 3
ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

3.1. Крайова задача з нелокальними багатоточковими умовами для гіперболічного рівняння

В області, що є декартовим добутком відрізка і p-вимірного тора, досліджено нелокальну задачу із загальними лінійними багатоточковими умовами для строго гіперболічного (хвильового) рівняння $u_{tt} = a^2(t)\,\Delta u$. Задача є некоректною за Адамаром і пов'язана з проблемою малих знаменників. За допомогою метричного підходу доведено теорему про оцінки знизу малих знаменників. На основі таких оцінок отримано умови існування і єдиності розв'язку задачі у просторах Соболєва функцій, періодичних за змінними $x_1, \ldots, x_p$.

Вступ. Задачі з двоточковими та багатоточковими нелокальними умовами для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними досліджувалися багатьма авторами [14, 29, 44, 54, 59, 66, 68, 76, 84, 93, 107, 121]. У роботах [44, 54, 59, 66, 68, 76, 107] вивчено такі задачі для систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у шкалах просторів Соболєва періодичних за просторовими змінними функцій. Ці задачі є некоректними за Адамаром, а умови їх розв'язності пов'язані з проблемою оцінювання знизу малих знаменників, які виникають в рядах Фур'є, що зображають формальні розв'язки цих задач.

Вирішення проблеми малих знаменників здійснюється на основі метричного підходу [54, 66, 68, 107, 112, 113]. У рамках цього підходу розглядається не окрема задача, а множина задач. Елементами цієї множини є задачі із фіксованими даними (коефіцієнтами диференціальних рівнянь, коефіцієнтами крайових умов чи іншими параметрами), які утворюють область у просторі даних. Існування і єдиність розв'язку у відповідній шкалі просторів доводиться для майже всіх (за мірою Лебеґа) точок області або для всіх точок підобласті, міра якої відрізняється від міри області на довільне мале число.

Для рівнянь і систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами встановлено розв'язність ряду нелокальних задач у шкалі просторів Соболєва $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, а для рівнянь зі змінними коефіцієнтами існують приклади нелокальних задач, які не є розв'язними у шкалі просторів Соболєва [69]. Зокрема, якщо нелокальна задача з багатоточковими умовами для одного рівняння зі змінним коефіцієнтом

$$D_t u = i\,\gamma\, Du + \cos t \cdot D^2 u,$$

$$\nu u(0,x) - \sum_{j=1}^{M} \mu_j\, u(T_j, x) = \varphi(x), \qquad x \in \Omega_{2\pi}^1, \qquad T_j \neq \pi/2,$$

де γ, ν, $\mu_1, \ldots, \mu_M$ — довільні дійсні числа, $T_1 < \cdots < T_M$, $D_t = \partial/\partial t$, $D = \partial/\partial x$, має єдиний розв'язок $u = u(t,x)$, то $u(\pi/2, \cdot) \notin \mathbf{L}_2(\Omega_{2\pi}^1)$ для довільних $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k) e^{ikx}$, $\varphi(x) \notin \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^1)$, і $q \in \mathbb{R}$, оскільки

$$\left\| u\left(\frac{\pi}{2}, \cdot\right); \mathbf{L}_2(\Omega_{2\pi}^1) \right\|^2 \geq \mathrm{const} \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(\left(1 - \max(\sin T_1, \ldots, \sin T_M)\right) k^2\right) |\hat{\varphi}(k)|^2 \geq$$

$$\geq \mathrm{const} \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q} |\hat{\varphi}(k)|^2 = \|\varphi(x); \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^1)\|^2 = \propto .$$

У цьому підрозділі показано, що для строго гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами нелокальна задача розв'язна у просторах Соболєва, подібно до нелокальних задач для рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розглянуто нелокальну задачу для рівняння типу коливань струни $\partial^2 u/\partial t^2 = a^2(t)\Delta u$ із загальними нелокальними багатоточковими умовами. Встановлено оцінки знизу для малих знаменників, які виникли при дослідженні задачі, а також гладкість й оцінку норми розв'язку задачі у просторах Соболєва. Аналогічно досліджуються у наступних підрозділах нелокальні задачі для довільного строго гіперболічного рівняння другого порядку, а також для строго гіперболічних рівнянь вищих порядків.

3.1.1. Постановка задачі. В області D^p розглядаємо строго гіперболічне (хвильове) рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}, \tag{3.1}$$

і нелокальні багатоточкові умови

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \Bigg|_{t=0} + \sum_{j=1}^{M} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \Bigg|_{t=T_j} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

де функція $a(t) > 0$ неперервно диференційовна на відрізку $[0,T]$, коефіцієнти a, b, c, d та a_j, b_j, c_j, d_j — комплексні числа, модуль яких не перевищує одиницю. Функції $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ є заданими 2π-періодичними функціями, а функція $u = u(t,x)$ є шуканим 2π-періодичним розв'язком задачі (3.1), (3.2).

Вивчається питання розв'язності задачі (3.1), (3.2) у шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$: встановлюються умови, при яких задача (3.1), (3.2) має розв'язок u, який для всіх значень $t \in [0,T]$ разом із похідною за t належить до шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ для довільних елементів φ_1 та φ_2 із цієї шкали.

Означення 3.1 *Двічі неперервно диференційовну на інтервалі* $[0,T]$ *функцію* $u(t,x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{ikx}$ *назвемо розв'язком задачі* (3.1), (3.2) *із шкали просторів* $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, *якщо для кожного* $t \in [0,T]$ *елементи* $u(t,\cdot)$, $\partial u/\partial t(t,\cdot)$ *належать до шкали просторів* $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ *і якщо* u *задовольняє рівняння* (3.1) *та умови* (3.2) *у слабкому сенсі, тобто для всіх* $t \in [0,T]$ *і для всіх тригонометричних многочленів* $w = w(x)$ *виконуються рівності*

$$\int_{\Omega_{2\pi}^p} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u\Big) w\,dx = 0,$$

$$\int_{\Omega_{2\pi}^p} \Bigg[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \Bigg|_{t=0} + \sum_{j=1}^{M} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \Bigg|_{t=T_j} - \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \Bigg] w\,dx = 0.$$

Зауваження 3.1 *Якщо* $u(t,\cdot)\in\mathbf{H}_\sigma(\Omega^p_{2\pi})$ *— розв'язок задачі* (3.1), (3.2), *то* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega^p_{2\pi})$, *причому*

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega^p_{2\pi})\right\|^2=a(t)\big(\|u;\mathbf{H}_\sigma(\Omega^p_{2\pi})\|^2-\\ -2\|u;\mathbf{H}_{\sigma-1}(\Omega^p_{2\pi})\|^2+\|u;\mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega^p_{2\pi})\|^2\big).$$

3.1.2. Побудова та оцінка розв'язку. Введемо вектор-функції

$$U=\mathrm{col}(u,\partial u/\partial t),\qquad \varphi=\mathrm{col}(\varphi_1,\varphi_2) \tag{3.3}$$

і запишемо задачу (3.1), (3.2) у матричному вигляді

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ a^2(t)\Delta & 0\end{pmatrix}U, \tag{3.4}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}U(0,x)+\sum_{j=1}^{M}\begin{pmatrix}a_j & b_j\\ c_j & d_j\end{pmatrix}U(T_j,x)=\varphi(x). \tag{3.5}$$

Якщо вектор-функції $U(t,x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}U_k(t)e^{ikx}$ та $\varphi(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\hat{\varphi}(k)e^{ikx}$, де $U_k(t)=\mathrm{col}(U_{k1}(t),U_{k2}(t))$, $\hat{\varphi}(k)=\mathrm{col}(\hat{\varphi}_1(k),\hat{\varphi}_2(k))$, то згідно з означенням вектор-функція $U_k=U_k(t)$ є розв'язком нелокальної задачі

$$\frac{dU_k}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a^2(t)\|k\|^2 & 0\end{pmatrix}U_k, \tag{3.6}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}U_k(0)+\sum_{j=1}^{M}\begin{pmatrix}a_j & b_j\\ c_j & d_j\end{pmatrix}U_k(T_j)=\hat{\varphi}(k), \tag{3.7}$$

причому $\|k\|^2=\tilde{k}^2-1=k_1^2+\dots+k_p^2$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Оскільки виконуються рівності $u_k(t)=U_{k1}(t)$, $\dfrac{du_k}{dt}(t)=U_{k2}(t)$, то розв'язок задачі (3.1), (3.2) і його похідна мають такий вигляд: $u(t,x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}U_{k1}(t)e^{ikx}$, $\dfrac{du}{dt}(t,x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}U_{k2}(t)e^{ikx}$.

Якщо $k\neq 0$, то матриця $\begin{pmatrix}0 & 1\\ \rho_k^2(t) & 0\end{pmatrix}$ системи (3.6), де $\rho_k(t)=ia(t)\|k\|$, має два прості уявні власні значення $\rho_k(t)$ та $-\rho_k(t)$.

При $k=0$ власні значення $\pm\rho_k(t)$ збігаються і дорівнюють нулеві, а матриця системи (3.6) має вигляд $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, тому $\dfrac{dU_{k1}}{dt}=U_{k2}$, $\dfrac{dU_{k2}}{dt}=0$. Загальний розв'язок $U_k(t)=\mathrm{col}\bigl(C_{01}+C_{02}t, C_{02}\bigr)$ останньої системи диференціальних рівнянь при підстановці в умову (3.7) дає систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} a+\sum\limits_{j=1}^{M}a_j & b+\sum\limits_{j=1}^{M}a_jT_j+\sum\limits_{j=1}^{M}b_j\\ c+\sum\limits_{j=1}^{M}c_j & d+\sum\limits_{j=1}^{M}c_jT_j+\sum\limits_{j=1}^{M}d_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{01}\\ C_{02}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\varphi}_1(0)\\ \hat{\varphi}_2(0)\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

для визначення сталих C_{01} і C_{02}. Матриця системи (3.8) має визначник

$$\det\Delta(0)=\sum_{j=1}^{M}\begin{vmatrix} a+\sum\limits_{j=1}^{M}a_j & a_j\\ c+\sum\limits_{j=1}^{M}c_j & c_j\end{vmatrix}T_j+\begin{vmatrix} a+\sum\limits_{j=1}^{M}a_j & b+\sum\limits_{j=1}^{M}b_j\\ c+\sum\limits_{j=1}^{M}c_j & d+\sum\limits_{j=1}^{M}d_j\end{vmatrix}.$$

Якщо $\det\Delta(0)=0$, то система (3.8) не має розв'язку або має безліч розв'язків, якщо ж $\det\Delta(0)\neq 0$, то існує єдиний розв'язок цієї системи

$$\mathrm{col}(C_{01},C_{02})=\Delta^{-1}(0)\,\mathrm{col}\bigl(\hat{\varphi}_1(0),\hat{\varphi}_2(0)\bigr).$$

Якщо $k\neq 0$, а, отже, $\rho_k(t)\neq 0$ на $[0,T]$, то для матриці системи (3.6) маємо таку факторизацію:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \rho_k^2(t) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_k(t) & 0\\ 0 & -\rho_k(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}^{-1},$$

де

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}=-2\rho_k(t),\qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \rho_k^{-1}(t)\\ 1 & -\rho_k^{-1}(t)\end{pmatrix}.$$

Зробимо таку заміну шуканих вектор-функцій, а саме $U_k(t)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix}Z_k(t)$. Тоді вектор-функція $Z_k(t)=\begin{pmatrix}1 & \rho_k^{-1}(t)\\ 1 & -\rho_k^{-1}(t)\end{pmatrix}\dfrac{U_k(t)}{2}$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dZ_k}{dt} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{d\rho_k(t)}{dt} Z_k = \begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & -\rho_k(t) \end{pmatrix} Z_k.$$

Враховуючи, що $\dfrac{d\rho_k(t)}{dt} = ia'(t)\|k\|$, маємо таку задачу для функції Z_k:

$$\frac{dZ_k}{dt} = \rho_k(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Z_k + \frac{a'(t)}{2a(t)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Z_k, \tag{3.9}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix} Z_k(0) + \\ + \sum_{j=1}^{M} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(T_j) & -\rho_k(T_j) \end{pmatrix} Z_k(T_j) = \hat{\varphi}(k). \tag{3.10}$$

Розв'язок задачі (3.9), (3.10) існує, єдиний і має вигляд

$$Z_k(t) = Y_k(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix}^{-1} \Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k) \tag{3.11}$$

при виконанні умови

$$\det \Delta(k) \neq 0, \tag{3.12}$$

де

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{M} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(T_j) & -\rho_k(T_j) \end{pmatrix} Y_k(T_j) \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix}^{-1}, \tag{3.13}$$

а $Y_k(t)$ — нормальна в точці $t = 0$ фундаментальна матриця розв'язків системи диференціальних рівнянь (3.9).

Нехай $\|A\|$ — евклідова норма матриці A, тобто $\|\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}\|$, де A^* – матриця, ермітово спряжена з матрицею A, а $\operatorname{tr} B$ — слід матриці B. Оцінимо норму $\|Y_k\|$ фундаментальної матриці $Y_k = Y_k(t)$.

Лема 3.1 *Якщо на проміжку $[\tau', \tau''] \subset [0, T]$ функція $a'(t)$ є невід'ємною, тобто $a'(t) \geq 0$, то виконуються нерівності*

$$\frac{a(\tau')}{a(\tau'')}\big\|Y_k(\tau')\big\| \leq \big\|Y_k(\tau'')\big\| \leq \big\|Y_k(\tau')\big\|, \tag{3.14}$$

якщо ж функція $a'(t)$ є недодатною ($a'(t) \leq 0$), то виконуються нерівності

$$\big\|Y_k(\tau')\big\| \leq \big\|Y_k(\tau'')\big\| \leq \frac{a(\tau')}{a(\tau'')}\big\|Y_k(\tau')\big\|. \tag{3.15}$$

Доведення. Оскільки матриця $\rho_k(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ є косоермітовою, а матриця $\dfrac{a'(t)}{2a(t)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ — ермітовою, то для матриці Y_k^* виконується рівність

$$\frac{dY_k^*}{dt} = \rho_k(t)Y_k^*\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a'(t)}{2a(t)}\,Y_k^*\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Цю рівність разом із рівністю (3.9) для матриці Y_k використовуємо для перетворення формули $\dfrac{d\|Y_k\|^2}{dt} = \operatorname{tr}\left(\dfrac{dY_k^*}{dt}\cdot Y_k + Y_k^*\cdot\dfrac{dY_k}{dt}\right)$ до вигляду

$$\frac{d\|Y_k\|^2}{dt} = \frac{a'(t)}{a(t)}\operatorname{tr}\left(Y_k^*\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}Y_k\right). \tag{3.16}$$

Оскільки власними значеннями матриці $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ є числа -2 і 0, то слід матриці $Y_k^*\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}Y_k$ задовольняє такі умови:

$$-2\big\|Y_k\big\|^2 \leq \operatorname{tr}\left(Y_k^*\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}Y_k\right) \leq 0.$$

У точках неспадання ($a'(t) \geq 0$) функції $a(t)$ права частина рівності (3.16) недодатна і $-2\dfrac{a'(t)}{a(t)}\big\|Y_k\big\|^2 \leq \dfrac{d\|Y_k\|^2}{dt} \leq 0$, тому

$$0 \leq \frac{d}{dt}\ln\left(a(t)\big\|Y_k\big\|\right) \leq \frac{d}{dt}\ln a(t). \tag{3.17}$$

У точках незростання ($a'(t) \le 0$) функції $a(t)$ права частина рівності (3.16) невід'ємна, тому $0 \le \dfrac{d\|Y_k\|^2}{dt} \le -2\dfrac{a'(t)}{a(t)}\big\|Y_k\big\|^2$, тобто

$$\frac{d}{dt}\ln a(t) \le \frac{d}{dt}\ln\big(a(t)\big\|Y_k\big\|\big) \le 0. \tag{3.18}$$

Нехай на проміжку $[\tau', \tau'']$ виконуються нерівності (3.17) або (3.18), тоді після інтегрування на цьому проміжку відповідно отримуємо оцінки

$$0 \le \ln\frac{a(\tau'')\|Y_k(\tau'')\|}{a(\tau')\|Y_k(\tau')\|} \le \ln\frac{a(\tau'')}{a(\tau')}, \qquad \ln\frac{a(\tau'')}{a(\tau')} \le \ln\frac{a(\tau'')\|Y_k(\tau'')\|}{a(\tau')\|Y_k(\tau')\|} \le 0,$$

із яких отримуємо нерівності (3.14) і (3.15) для норми матриці $Y_k(t)$. ■

Наслідок 3.1 *Якщо функція $a(t)$ на проміжку $[0, T]$ є сталою, то функція $\big\|Y_k\big\|$ є також сталою на цьому проміжку, причому $\big\|Y_k\big\| = \sqrt{2}$.*

Нехай похідна $a'(t)$ змінює на проміжку $[0, T]$ свій знак $\ell-1$ раз, де $\ell \in \mathbb{N}$, і $t_0 = 0$, $t_\ell = T$.

Якщо $\ell \ge 2$, то існують числа $t_1, t_2, \ldots, t_{\ell-1}$ і числа $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\ell$ такі, що для $j = 1, \ldots, \ell$ виконуються нерівності $t_{j-1} < \tau_j < t_j$, на проміжку $[t_{j-1}, t_j]$ функція $a'(t)$ не змінює знак, а також для $j = 1, \ldots, \ell-1$ виконуються умови $a'(\tau_j)a'(\tau_{j+1}) < 0$, $a'(t_j) = 0$. Позначимо через A_j, $j = 0, 1, \ldots, \ell$, значення функції $a(t)$ в точці t_j.

Наслідок 3.2 *Якщо функція $a'(t)$ не змінює свій знак на проміжку $[0, T]$ $\big(= [t_0, t_\ell] = [t_0, t_1]\big)$, то на цьому проміжку у випадку $a'(\tau_1) > 0$ виконуються нерівності*

$$\frac{A_0}{a(t)} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\big\|Y_k\big\| \le 1, \tag{3.19}$$

$$\frac{A_0}{A_1} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\big\|Y_k(t_1)\big\| \le 1, \tag{3.20}$$

а у випадку $a'(\tau_1) < 0$ — нерівності

$$1 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\big\|Y_k(t)\big\| \le \frac{A_0}{a(t)}, \tag{3.21}$$

$$1 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\big\|Y_k(t_1)\big\| \le \frac{A_0}{A_1}. \tag{3.22}$$

Наслідок 3.3 *Якщо функція a'(t) на проміжку* $[0, T]$ *один раз змінює свій знак, то у випадку* $a'(\tau_1) > 0$ *виконуються нерівності* (3.19) *на проміжку* $[0, t_1]$ *і нерівності* (3.20) *та нерівності*

$$\frac{A_0}{A_1} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \big\| Y_k(t) \big\| \le \frac{A_1}{a(t)}, \tag{3.23}$$

на проміжку $[t_1, t_2]$ $\big(= [t_1, t_\ell] = [t_1, T]\big)$, *зокрема*

$$\frac{A_0}{A_1} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \big\| Y_k(t_2) \big\| \le \frac{A_1}{A_2}. \tag{3.24}$$

У випадку $a'(\tau_1) < 0$ *виконуються нерівності* (3.21) *на проміжку* $[0, t_1]$ *та нерівності* (3.22) *і нерівності*

$$\frac{A_1}{a(t)} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \big\| Y_k(t) \big\| \le \frac{A_0}{A_1}, \tag{3.25}$$

на проміжку $[t_1, t_2]$ $\big(= [t_1, t_\ell] = [t_1, T]\big)$, *зокрема*

$$\frac{A_1}{A_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \big\| Y_k(t_2) \big\| \le \frac{A_0}{A_1}. \tag{3.26}$$

У загальному випадку, коли похідна $a'(t)$ змінює свій знак більше одного разу, оцінки фундаментальної матриці встановлено в наступній лемі.

Лема 3.2 *Нехай похідна* $a'(t)$ *функції* $a(t)$ *на проміжку* $[0, T]$ *змінює свій знак* $\ell - 1$ *раз, причому* $\ell \ge 3$, *і числа* $t_1, \ldots, t_{\ell-1}$ *і* $\tau_1, \ldots, \tau_\ell$ *є вибраними. Тоді на проміжках* $[t_{j-1}, t_j] \subset [0, T]$ *справджуються такі оцінки для фундаментальної матриці системи диференціальних рівнянь* (3.9).

Якщо $t \in [t_{2s-2}, t_{2s-1}]$, *то у випадку* $a'(\tau_1) > 0$ *виконуються нерівності*

$$\frac{A_{2s-2}}{a(t)} \prod_{j=0}^{s-2} \frac{A_{2j}}{A_{2j+1}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \big\| Y_k(t) \big\| \le \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}}, \tag{3.27}$$

у випадку $a'(\tau_1) < 0$ *— нерівності*

$$\prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \big\| Y_k(t) \big\| \le \frac{A_{2s-2}}{a(t)} \prod_{j=0}^{s-2} \frac{A_{2j}}{A_{2j+1}}. \tag{3.28}$$

Якщо $t \in [t_{2s-1}, t_{2s}]$, *то у випадку* $a'(\tau_1) > 0$ *виконуються нерівності*

$$\prod_{j=0}^{s-1} \frac{A_{2j}}{A_{2j+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|Y_k(t)\| \leq \frac{A_{2s-1}}{a(t)} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}}, \tag{3.29}$$

у випадку $a'(\tau_1) < 0$ — *нерівності*

$$\frac{A_{2s-1}}{a(t)} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|Y_k(t)\| \leq \prod_{j=0}^{s-1} \frac{A_{2j}}{A_{2j+1}}. \tag{3.30}$$

Коли $s = 1$, *нерівності* (3.27)–(3.30) *розуміємо як нерівності* (3.19), (3.21), (3.23) *і* (3.25).

Доведення. Для доведення леми використовуємо метод математичної індукції. Припустивши спочатку виконання нерівностей (3.27)–(3.30) для всіх проміжків $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\ldots$, $[t_{2s-1}, t_{2s}]$, доведемо ці нерівності для наступних двох проміжків $[t_{2s}, t_{2s+1}]$ і $[t_{2s+1}, t_{2s+2}]$.

Нехай t належить проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$. У випадку $a'(\tau_1) > 0$ маємо, що й $a'(\tau_{2s+1}) > 0$. Це означає, що на проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$ виконуються нерівності (3.14), які запишемо у вигляді $\dfrac{A_{2s}}{a(t)} \leq \dfrac{\|Y_k(t)\|}{\|Y_k(t_{2s})\|} \leq 1$, а на проміжку $[t_{2s-1}, t_{2s}]$ — нерівності (3.29) вигляду

$$\frac{A_0 A_2 \cdots A_{2s-2}}{A_1 A_3 \cdots A_{2s-1}} \leq \frac{\|Y_k(t_{2s})\|}{\sqrt{2}} \leq \frac{A_1 A_3 \cdots A_{2s-3} A_{2s-1}}{A_2 A_4 \cdots A_{2s-2} A_{2s}}.$$

Перемноживши їх отримаємо формулу (3.27) для проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$.

У випадку $a'(\tau_1) < 0$ отримуємо формулу (3.28) для проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$, перемноживши нерівності (3.15) для проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$ і нерівності (3.30) для проміжку $[t_{2s-1}, t_{2s}]$. На підставі формул (3.27) і (3.28) для проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$ і формул (3.14) і (3.15) для проміжку $[t_{2s+1}, t_{2s+2}]$ аналогічно одержуємо формули (3.29) і (3.30) для проміжку $[t_{2s+1}, t_{2s+2}]$. ∎

Із леми 3.2 отримуємо незалежні від k оцінки фундаментальної матриці $Y_k(t)$, використовуючи число $\tilde{A} = \dfrac{A_{\max}}{A_{\min}}$, яке визначає розмах коливань функції $a(t)$ (тут $A_{\max}$ та $A_{\min}$ — максимальне та мінімальне значення функції $a(t)$ на відрізку $[0, T]$). Очевидно, що $\tilde{A} \geq 1$.

Наслідок 3.4 *На проміжку $[0, t_{2j}] \subset [0, T]$ справджуються оцінки*

$$\tilde{A}^{-j} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \big\|Y_k(t)\big\| \frac{a(t)}{A_0} \leq \tilde{A}^{j}, \tag{3.31}$$

а на проміжку $[0, T]$ — оцінки

$$\tilde{A}^{-J} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \big\|Y_k(t)\big\| \frac{a(t)}{A_0} \leq \tilde{A}^{J}, \tag{3.32}$$

де J — ціла частина числа $(\ell + 1)/2$.

3.1.3. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі (3.1), (3.2).

За допомогою оцінок (3.31) і (3.32) встановимо достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі (3.1), (3.2) у шкалі просторів Соболєва.

Теорема 3.1 *Якщо коефіцієнти Фур'є $\hat{\varphi}(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, вектор-функції φ, задовольняють умову*

$$\left\| \begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(k) \hat{\varphi}(k) \right\| \leq C \tilde{k}^{\sigma}, \tag{3.33}$$

де C, σ — деякі сталі, $C > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, які не залежить від вектора k, то у шкалі просторів Соболєва існує єдиний розв'язок $u = u(t, x)$ задачі (3.1), (3.2) такий, що для всіх $t \in [0, T]$

$$u(t, \cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_{2\pi}^p), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1 - 1}(\Omega_{2\pi}^p), \tag{3.34}$$

де $\sigma_1 < 1 - \sigma - p/2$.

Доведення. Із формули (3.11) отримуємо рівність

$$\begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_k(t) = \begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix} \times$$

$$\times\, Y_k(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix}^{-1} \Delta^{-1}(k) \hat{\varphi}(k) =$$

$$= \frac{a(t)}{A_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y_k(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(k) \hat{\varphi}(k),$$

з якої, переходячи до норм, маємо скалярну рівність

$$\big(a^2(t)\|k\|^2\big|U_{k1}(t)\big|^2+\big|U_{k2}(t)\big|^2\big)^{1/2}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}a(t)}{A_0}\left\|Y_k(t)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\rho_k(0) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k)\right\|.$$

Оцінюючи норму справа, переходимо до нерівності

$$\big(a^2(t)\|k\|^2\big|U_{k1}(t)\big|^2+\big|U_{k2}(t)\big|^2\big)^{1/2}\leq\frac{a(t)}{A_0}\|Y_k(t)\|\left\|\begin{pmatrix}\rho_k(0) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k)\right\|.$$

Використовуючи формулу (3.32), отримуємо для всіх $t\in[0,T]$ нерівність

$$\big(a^2(t)\|k\|^2\big|U_{k1}(t)\big|^2+\big|U_{k2}(t)\big|^2\big)^{1/2}\leq\sqrt{2}\tilde{A}^J\left\|\begin{pmatrix}\rho_k(0) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k)\right\|,\quad (3.35)$$

або, враховуючи формулу (3.33), — нерівність

$$\big(a^2(t)\|k\|^2\big|U_{k1}(t)\big|^2+\big|U_{k2}(t)\big|^2\big)^{1/2}\leq\sqrt{2}C\tilde{A}^J\tilde{k}^{\sigma}.\quad (3.36)$$

Оскільки для всіх векторів $k\neq 0$ виконується нерівність $\tilde{k}^2\leq 2\|k\|^2$ і нерівності

$$\tilde{k}^2|u_k(t)|^2\leq\frac{2}{A_{\min}^2}\big(a^2(t)\|k\|^2\big|U_{k1}(t)\big|^2+\big|U_{k2}(t)\big|^2\big),\quad (3.37)$$

$$\Big|\frac{du_k}{dt}(t)\Big|^2\leq a^2(t)\|k\|^2\big|U_{k1}(t)\big|^2+\big|U_{k2}(t)\big|^2,\quad (3.38)$$

то з нерівностей (3.36)–(3.38) випливають нерівності

$$\tilde{k}^{2\sigma_1}\big|u_k(t)\big|^2\leq\frac{1}{A_{\min}^2}4C^2\tilde{A}^{2J}\tilde{k}^{2\sigma_1-2+2\sigma}=\frac{1}{A_{\min}^2}4C^2\tilde{A}^{2J}\tilde{k}^{\sigma_2},$$

$$\tilde{k}^{2\sigma_1-2}\Big|\frac{du_k}{dt}(t)\Big|^2\leq 2C^2\tilde{A}^{2J}\tilde{k}^{2\sigma_1-2+2\sigma}=2C^2\tilde{A}^{2J}\tilde{k}^{\sigma_2}.$$

Обчислюючи норми розв'язку u та його похідної $\partial u/\partial t$, отримуємо незалежні від t оцінки:

$$\big\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma_1(\Omega_{2\pi}^p)}\big\|^2-\big|u_0(t)\big|^2\leq\frac{1}{A_{\min}^2}4C^2\tilde{A}^{2J}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\tilde{k}^{\sigma_2},$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma_1-1}(\Omega^p_{2\pi})\right\|^2-\left|\frac{du_0}{dt}(t)\right|^2\le 2C^2\tilde{A}^{2J}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\tilde{k}^{\sigma_2}.$$

Зі збіжності при $\sigma_2<-p$ ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\tilde{k}^{\sigma_2}$ випливають включення (3.34). ■

Умови (3.33) теореми 3.1 пов'язані з правими частинами φ_1 і φ_2 нелокальних умов (3.2), тому для одних правих частин вони виконуються, а для інших не виконуються. Крім того, в умовах немає прямої залежності числа σ від гладкості цих правих частин. Далі для встановлення розв'язності задачі (3.1), (3.2) у шкалі просторів $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ досліджуємо, коли виконуються нерівності (3.33) відразу для всіх функцій із певного простору шкали $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$.

Позначимо через $\Psi_j(k)$, $j=1,2,3,4$, елементи матриці $\Delta(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$:

$$\Delta(k)=\begin{pmatrix}\Psi_1(k) & \Psi_2(k)\\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k)\end{pmatrix},\qquad \det\Delta(k)=\Psi_1(k)\Psi_4(k)-\Psi_2(k)\Psi_3(k),\quad (3.39)$$

і нехай

$$\begin{pmatrix}\Phi_{1m}(k) & \Phi_{2m}(k)\\ \Phi_{3m}(k) & \Phi_{4m}(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho(T_m) & -\rho(T_m)\end{pmatrix}Y_k(T_m)\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho(0) & -\rho(0)\end{pmatrix}^{-1},$$

тоді виконуються рівності

$$\Delta(k)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\sum_{m=1}^{M}\begin{pmatrix}a_m & b_m\\ c_m & d_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{1m}(k) & \Phi_{2m}(k)\\ \Phi_{3m}(k) & \Phi_{4m}(k)\end{pmatrix},$$

тобто

$$\Psi_1(k)=a+\sum_{m=1}^{M}a_m\Phi_{1m}(k)+\sum_{m=1}^{M}b_m\Phi_{3m}(k),$$

$$\Psi_2(k)=b+\sum_{m=1}^{M}a_m\Phi_{2m}(k)+\sum_{m=1}^{M}b_m\Phi_{4m}(k),$$

$$\Psi_3(k)=c+\sum_{m=1}^{M}c_m\Phi_{1m}(k)+\sum_{m=1}^{M}d_m\Phi_{3m}(k),$$

$$\Psi_4(k)=d+\sum_{m=1}^{M}c_m\Phi_{2m}(k)+\sum_{m=1}^{M}d_m\Phi_{4m}(k).$$

Якщо позначити

$$\Phi(k) = \max_{m=1,\ldots,M} \bigl\{1, \bigl|\Phi_{1m}(k)\bigr|, \bigl|\Phi_{2m}(k)\bigr|, \bigl|\Phi_{3m}(k)\bigr|, \bigl|\Phi_{4m}(k)\bigr|\bigr\}, \qquad (3.40)$$

то для кожного $j = 1, 2, 3, 4$ справджуються нерівності

$$\bigl|\Psi_j(k)\bigr| \le (2M+1)\Phi(k).$$

На підставі цих нерівностей встановлюємо, що модуль кожного елемента вектора

$$\Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k) = \mathrm{col}\Bigl(\frac{\Psi_4(k)\hat{\varphi}_1(k) - \Psi_2(k)\hat{\varphi}_2(k)}{\det\Delta(k)}, \frac{\Psi_1(k)\hat{\varphi}_2(k) - \Psi_3(k)\hat{\varphi}_1(k)}{\det\Delta(k)}\Bigr),$$

оцінюється зверху числом

$$\frac{(2M+1)\Phi(k)\bigl(|\hat{\varphi}_1(k)| + |\hat{\varphi}_2(k)|\bigr)}{|\det\Delta(k)|} \le \frac{(2M+1)\sqrt{2}\Phi(k)\|\hat{\varphi}(k)\|}{|\det\Delta(k)|}.$$

Звідси випливає така оцінка для лівої частини нерівності (3.33) через норму правої частини $\hat{\varphi}(k)$ умов (3.7):

$$\left\| \begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k) \right\| \le (2M+1)\sqrt{2}\frac{\max\{A_0, 1\}\tilde{k}}{\frac{1}{\Phi(k)}|\det\Delta(k)|}\bigl\|\hat{\varphi}(k)\bigr\|. \qquad (3.41)$$

3.1.4. Дослідження малих знаменників. Наступним кроком буде встановлення оцінок знизу дробів $\frac{1}{\Phi(k)}\bigl|\det\Delta(k)\bigr|$, $k \in \mathbb{Z}^p$, які є функціями параметрів a, b, c, d, a_m, b_m, c_m, d_m, де $m = 1, \ldots, M$. Для довільного вектора $\alpha = \bigl(a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots, a_M, b_M, c_M, d_M\bigr) \in \mathcal{O}^{4(M+1)}$ параметрів вихідної задачі, де $\mathcal{O}$ – одиничний круг з центром у початку координат комплексної площини, такої оцінки, взагалі, не існує. Якою б малою не була (наперед задана) функція $\chi(k)$, знайдеться такий вектор $\alpha \in \mathcal{O}^{4(M+1)}$, що безліч разів виконується нерівність $\frac{1}{\Phi(k)}\bigl|\det\Delta(k)\bigr| < \chi(k)$. Такі знаменники мають назву малих знаменників. Вирішення проблеми малих знаменників, тобто встановлення для них оцінки знизу, є задачею метричної теорії діофантових наближень, в основі якої закладено метричний підхід до розглядуваних задач.

Малі знаменники виникають при дослідженні різних задач для диференціальних і диференціально-операторних рівнянь, а також задач в інших галузях математики [38]. Такі задачі, зазвичай, є некоректними (умовно коректними). Для встановлення оцінок знизу знаменників у формулі (3.41) також використаємо метричний підхід. При цьому на підмножині Λ із $\mathcal{O}^{4(M+1)}$ задаємо міру $\operatorname{meas}\Lambda$, яка індукується мірою Лебеґа у просторі $\mathbb{R}^{8(M+1)}$.

Теорема 3.2 *Нехай* $\det\Delta(k)$ *і* $\Phi(k)$ *визначаються відповідно формулами* (3.39) *і* (3.40)*. Тоді для довільних чисел* $r > p$ *і* $0 < \varepsilon < 1$ *для всіх векторів* $\alpha \in \mathcal{O}^{4(M+1)} \setminus B_\varepsilon$ *виконується нерівність*

$$\left|\det\Delta(0)\right| \geq \varepsilon\,\frac{\max\{\sqrt{2},(2+T)A_{\min}\}}{6\pi\tilde{A}^J C_1 \max\{A_0,1\}},$$

і для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ *— нерівність*

$$\frac{1}{\Phi(k)}\left|\det\Delta(k)\right| \geq \frac{\varepsilon}{C_1}\,\tilde{k}^{-r}. \tag{3.42}$$

Тут B_ε *— деяка множина з мірою Лебеґа* $\operatorname{meas} B_\varepsilon \leq \varepsilon$*, стала* C_1*, що залежить від* r*, визначається формулою*

$$C_1 = 2\pi^8\left(\frac{\max\{\sqrt{2},(2+T)A_{\min}\}}{6\pi\tilde{A}^J \max\{A_0,1\}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \tilde{k}^{-r}\right).$$

Доведення. Позначимо через $B(k)$ множину тих векторів $\alpha \in \mathcal{O}^{4(M+1)}$, які при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$ задовольняють оцінку, протилежну до (3.42):

$$\frac{1}{\Phi(k)}\left|\det\Delta(k)\right| < \zeta^2(k), \tag{3.43}$$

де $\zeta(k) = \sqrt{\varepsilon/C_1\tilde{k}^r}$. Розглянемо спочатку такі вектори $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, для яких виконується рівність $\Phi(k) = 1$. Тоді згідно з формулою (3.39) отримаємо таку факторизацію:

$$\frac{1}{\Phi(k)}\left|\det\Delta(k)\right| = \left|\Psi_4(k)\right|\left|\Psi_1(k) - \Psi_2(k)\Psi_3(k)\frac{1}{\Psi_4(k)}\right|. \tag{3.44}$$

Розглянемо множину чисел $d \in \mathcal{O}$, для яких виконується нерівність

$$\left| d + \sum_{m=1}^{M} c_m \Phi_{2m}(k) + \sum_{m=1}^{M} d_m \Phi_{4m}(k) \right| < \zeta(k) \tag{3.45}$$

при інших фіксованих елементах вектора $\alpha \in \mathcal{O}^{4(M+1)}$. Ця множина є частиною круга радіуса $\zeta(k)$, тому її міра менша, ніж площа $\pi\zeta^2(k)$ цього круга. Інтегруючи за всіма іншими змінними α' на множині $\mathcal{O}^{4M+3}$, отримуємо оцінку

$$\operatorname{meas} B_0'(k) < \pi^{4(M+1)} \zeta^2(k),$$

де $B_0'(k)$ — множина векторів $\alpha \in \mathcal{O}^{4(M+1)}$, для яких виконується нерівність (3.45).

Розглянемо множину тих чисел α, для яких при інших фіксованих елементах вектора $\alpha \in \mathcal{O}^{4(M+1)} \setminus B_0'(k)$ виконується нерівність

$$\left| a + a_1 \Phi_1(k) + b_1 \Phi_3(k) - \Psi_2(k) \Psi_3(k) \frac{1}{\Psi_4(k)} \right| < \zeta(k). \tag{3.46}$$

Ця множина також має міру меншу, ніж число $\pi\zeta^2(k)$, тому множина $B_0''(k)$ тих $\alpha \in \mathcal{O}^{4(M+1)} \setminus B_0'(k)$, для яких виконується нерівність (3.46), має міру

$$\operatorname{meas} B_0''(k) < \pi^{4(M+1)} \zeta^2(k).$$

Якщо $\alpha \notin B_0'(k) \cup B_0''(k)$, то виконуються протилежні до нерівностей (3.45) і (3.46) нерівності, а, отже, згідно з формулою (3.44) не виконується оцінка (3.43), тому $B_0(k) \subset B_0'(k) \cup B_0''(k)$ і справджується нерівність

$$\operatorname{meas} B(k) < 2\pi^{4(M+1)} \zeta^2(k) = \frac{1}{C_1} 2\pi^{4(M+1)} \varepsilon \tilde{k}^{-r}. \tag{3.47}$$

Якщо $\Phi(k) = \left|\Phi_{jm}(k)\right|$, $m = 1, \ldots, M$, то замість (3.44) використовуємо такі факторизації матриці $\left|\dfrac{1}{\Phi_{jm}(k)}\det\Delta(k)\right|$ при $j = 1, 2, 3, 4$ відповідно:

$$\begin{aligned}
&\left|d + \det\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\Phi_{2m}(k)}{\Phi_{1m}(k)} \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) - d\end{pmatrix}\right| \cdot \left|a_m + \dfrac{\Omega_{1m}(k)}{\det\begin{pmatrix}\Phi_{1m}(k) & \Phi_{2m}(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k)\end{pmatrix}}\right|, \\
&\left|a + \det\begin{pmatrix} \Psi_1(k) - a & \Psi_2(k) \\ \dfrac{\Phi_{1m}(k)}{\Phi_{2m}(k)} & 1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|c_m + \dfrac{\Omega_{2m}(k)}{\det\begin{pmatrix}\Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ \Phi_{1m}(k) & \Phi_{2m}(k)\end{pmatrix}}\right|, \\
&\left|d + \det\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\Phi_{4m}(k)}{\Phi_{3m}(k)} \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) - d\end{pmatrix}\right| \cdot \left|b_m + \dfrac{\Omega_{3m}(k)}{\det\begin{pmatrix}\Phi_{3m}(k) & \Phi_{4m}(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k)\end{pmatrix}}\right|, \\
&\left|a + \det\begin{pmatrix} \Psi_1(k) - a & \Psi_2(k) \\ \dfrac{\Phi_{3m}(k)}{\Phi_{4m}(k)} & 1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|d_m + \dfrac{\Omega_{4m}(k)}{\det\begin{pmatrix}\Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ \Phi_{3m}(k) & \Phi_{4m}(k)\end{pmatrix}}\right|,
\end{aligned} \tag{3.48}$$

де

$$\begin{aligned}
\Omega_{1m}(k) &= \det\begin{pmatrix}\Psi_1(k) - a_m\Phi_{1m}(k) & \Psi_2(k) - a_m\Phi_{2m}(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k)\end{pmatrix}, \\
\Omega_{2m}(k) &= \det\begin{pmatrix}\Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ \Psi_3(k) - c_m\Phi_{1m}(k) & \Psi_4(k) - c_m\Phi_{2m}(k)\end{pmatrix}, \\
\Omega_{3m}(k) &= \det\begin{pmatrix}\Psi_1(k) - b_m\Phi_{3m}(k) & \Psi_2(k) - b_m\Phi_{4m}(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k)\end{pmatrix}, \\
\Omega_{4m}(k) &= \det\begin{pmatrix}\Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ \Psi_3(k) - d_m\Phi_{3m}(k) & \Psi_4(k) - d_m\Phi_{4m}(k)\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Вирази під знаком модуля у формулах (3.48) є лінійними функціями своїх перших доданків; визначники у формулах (3.49) є лінійними функціями коефіцієнтів умов (3.2).

Множини, для елементів яких вказані лінійні функції у формулах (3.48) і (3.49) менші, ніж $\zeta(k)$, мають таку ж міру, як і у випадку $\Phi(k) = 1$, тобто для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ виконується нерівність (3.47).

Якщо $k = 0$, то

$$\det \Delta(0) = \Big(d + \sum_{j=1}^{M}(c_jT_j + d_j)\Big)\left(a + \sum_{j=1}^{M} a_j - \frac{\Big(c + \sum\limits_{j=1}^{M} c_j\Big)\Big(b + \sum\limits_{j=1}^{M}(a_jT_j + b_j)\Big)}{d + \sum\limits_{j=1}^{M}(c_jT_j + d_j)}\right).$$

Нерівність

$$\Big|d + \sum_{j=1}^{M}(c_jT_j + d_j)\Big| < \zeta(0), \quad \text{де} \quad \zeta(0) = \left(\varepsilon \frac{\max\{\sqrt{2}, (2+T)A_{\min}\}}{6\pi \tilde{A}^J C_1 \max\{A_0, 1\}}\right)^{1/2},$$

виконується на підмножині $B'(0)$ множини $\mathcal{O}^{4(M+1)}$, міра якої задовольняє нерівність $\operatorname{meas} B'(0) < \pi^{4(M+1)}\zeta^2(0)$, а нерівність

$$\left|a + \sum_{j=1}^{M} a_j - \frac{\Big(c + \sum\limits_{j=1}^{M} c_j\Big)\Big(b + \sum\limits_{j=1}^{M}(a_jT_j + b_j)\Big)}{d + \sum\limits_{j=1}^{M}(c_jT_j + d_j)}\right| < \zeta(0)$$

виконується на множині $B''(0) \subset \mathcal{O}^{4(M+1)}$, міра якої справджує нерівність $\operatorname{meas} B''(0) < \pi^{4(M+1)}\zeta^2(0)$. Тобто на множині $\mathcal{O}^{4(M+1)} \setminus B(0) = \mathcal{O}^{4(M+1)} \setminus (B'(0) \cup B''(0))$, де $\operatorname{meas} B(0) < 2\pi^{4(M+1)}\zeta^2(0)$, виконується нерівність

$$\big|\det \Delta(0)\big| \geq \zeta^2(0).$$

На множині $\mathcal{O}^{4(M+1)} \setminus B(k)$ функція $\dfrac{1}{\Phi(k)}\big|\Delta(k)\big|$ вектора α задовольняє умову (3.42) для фіксованого ненульового цілочислового вектора k, а на множині $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \big(\mathcal{O}^{4(M+1)} \setminus B(k)\big) = \mathcal{O}^{4(M+1)} \setminus B_\varepsilon$, $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} B(k)$, де

$$\operatorname{meas} B_\varepsilon \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{meas} B(k) < 2\pi^8 \frac{\varepsilon}{C_1}\left(\frac{\max\{\sqrt{2}, (2+T)A_{\min}\}}{6\pi \tilde{A}^J \max\{A_0, 1\}} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \tilde{k}^{-r}\right) = \varepsilon,$$

оцінка (3.42) виконується для всіх ненульових цілочислових векторів k. ■

Тепер із отриманої нерівності (3.42) і формули (3.41) маємо нерівність

$$\left\| \begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k) \right\| \le \frac{1}{\varepsilon} 6\pi\sqrt{2} C_1 \max\{A_0, 1\} \tilde{k}^{1+r} \big\| \hat{\varphi}(k) \big\|, \qquad (3.50)$$

яку застосуємо при доведенні наступної теореми.

Теорема 3.3 *Для довільної пари чисел $r > p$ і $0 < \varepsilon < 1$ існує множина $B_\varepsilon \subset \mathcal{O}^{4(M+1)}$, міра якої $\operatorname{meas} B_\varepsilon$ менша, ніж ε, така, що для всіх функцій $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{r+1}(\Omega^p_{2\pi})$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{r+1}(\Omega^p_{2\pi})$ існує единий розв'язок $u = u(t,x)$ задачі (3.1), (3.2), причому $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_1(\Omega^p_{2\pi})$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi})$ для всіх векторів α із множини $\mathcal{O}^{4(M+1)} \setminus B_\varepsilon$ і виконуються нерівності*

$$\big\| u(t,\cdot); \mathbf{H}_1(\Omega^p_{2\pi}) \big\| \le \frac{1}{\varepsilon} C_2 \| \varphi; \mathbf{H}_{r+1}(\Omega^p_{2\pi}) \|, \qquad (3.51)$$

$$\Big\| \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot); \mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi}) \Big\| \le \frac{1}{\varepsilon} C_3 \| \varphi; \mathbf{H}_{r+1}(\Omega^p_{2\pi}) \|, \qquad (3.52)$$

де $C_2 = \sqrt{2} C_3 / A_{\min}$, $C_3 = 12\pi \tilde{A}^J C_1 \max\{A_0, 1\}$, J — ціла частина числа $(\ell+1)/2$, $\ell - 1$ — число змін знаку функції $a'(t)$ на проміжку $[0,T]$, $\tilde{A} = A_{\max}/A_{\min}$, $A_{\max} = \max\limits_{t\in[0,T]} a(t)$, $A_{\min} = \min\limits_{t\in[0,T]} a(t)$.

Доведення. Із нерівності (3.35) і нерівності (3.50), яка виконується для всіх векторів множини $\mathcal{O}^{4(M+1)} \setminus B_\varepsilon$, для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ випливає нерівність

$$\Big(a^2(t) \|k\|^2 \big| U_{k1}(t) \big|^2 + \big| U_{k2}(t) \big|^2 \Big)^{1/2} \le \frac{1}{\varepsilon} 12\pi \tilde{A}^J C_1 \max\{A_0, 1\} \tilde{k}^{1+r} \big\| \hat{\varphi}(k) \big\|.$$

Таку нерівність разом із нерівностями (3.37) і (3.38) використовуємо для отримання наступних нерівностей:

$$\tilde{k}^2 \big| u_k(t) \big|^2 \le \frac{1}{\varepsilon^2 A^2_{min}} 288\pi^2 \tilde{A}^{2J} C_1^2 \big(\max\{A_0, 1\} \big)^2 \tilde{k}^{2+2r} \big\| \hat{\varphi}(k) \big\|^2,$$

$$\Big| \frac{du_k}{dt}(t) \Big|^2 \le \frac{1}{\varepsilon^2} 144\pi^2 \tilde{A}^{2J} C_1^2 \big(\max\{A_0, 1\} \big)^2 \tilde{k}^{2+2r} \big\| \hat{\varphi}(k) \big\|^2.$$

Ці нерівності виконуються також при $k=0$. Дійсно, із системи рівнянь (3.8) отримуємо вектор

$$\Delta^{-1}(0)\hat{\varphi}(0)=\frac{1}{\det\Delta(0)}\begin{pmatrix}(d+d_1+c_1T)\hat{\varphi}_1(0)-(b+b_1+a_1T)\hat{\varphi}_2(0)\\(a+a_1)\hat{\varphi}_2(0)-(c+c_1)\hat{\varphi}_1(0)\end{pmatrix},$$

компоненти якого оцінюються зверху числом $\sqrt{2}(2+T)\dfrac{1}{|\det\Delta(0)|}\big\|\hat{\varphi}(0)\big\|$, тобто $\big\|\Delta^{-1}(0)\hat{\varphi}(0)\big\|\le 2(2+T)\dfrac{1}{|\det\Delta(0)|}\big\|\hat{\varphi}(0)\big\|=2(2+T)\dfrac{1}{|\zeta(0)|}\big\|\hat{\varphi}(0)\big\|$, а також для всіх $t\in[0,T]$ виконується оцінка

$$\max\left\{\big|u_0(t)\big|^2,\Big|\frac{du_0}{dt}(t)\Big|^2\right\}\le\big(2(2+T)\zeta(0)\big)^2(2+T^2)\big\|\hat{\varphi}(0)\big\|^2.$$

З цієї оцінки маємо шукані нерівності.

За умовами теореми функції $\varphi_1\in\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\varphi_2\in\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_{2\pi}^p)$, тому відповідні ряди для розв'язку $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^2\big|u_k(t)\big|^2$ і його похідної $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\Big|\dfrac{du_k}{dt}(t)\Big|^2$ є збіжними для всіх чисел $t\in[0,T]$ разом із рядом $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^{2r+2}\|\hat{\varphi}(k)\|^2$.

Це означає, що розв'язок задачі (3.1), (3.2) для всіх $t\in[0,T]$ приймає значення у просторі $\mathbf{H}_1(\Omega_{2\pi}^p)$, а його похідна за t — у просторі $\mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)$, і виконуються оцінки

$$\big\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_1(\Omega_{2\pi}^p)\big\|^2\le\frac{1}{\varepsilon^2A_{\min}^2}288\pi^2\tilde{A}^{2J}C_1^2\big(\max\{A_0,1)\}\big)^2;\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_{2\pi}^p)\|\varphi\|^2,$$

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot);\mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)\Big\|^2\le\frac{1}{\varepsilon^2}144\pi^2\tilde{A}^{2J}C_1^2\big(\max\{A_0,1\}\big)^2;\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_{2\pi}^p)\|\varphi\|^2,$$

які еквівалентні шуканим оцінкам (3.51), (3.52). ∎

Наслідок 3.5 *Нехай функції* $\varphi_1\in\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\varphi_2\in\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_{2\pi}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, *і виконуються всі інші умови теореми* 3.3. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u=u(t,x)$ *задачі* (3.1), (3.2), *причому* $u(t,\cdot)\in\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_{2\pi}^p)$ *для всіх векторів множини* $\mathcal{O}^{4(M+1)}\setminus B_\varepsilon$ *і виконуються нерівності*

$$\big\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\big\|\le\frac{1}{\varepsilon}C_2\|\varphi;\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_{2\pi}^p)\|,$$

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot);\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_{2\pi}^p)\Big\|\le\frac{1}{\varepsilon}C_3\|\varphi;\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_{2\pi}^p)\|.$$

Наслідок 3.6 *Для розв'язку* $u = u(t,x)$ *задачі* (3.1), (3.2) *справджується також оцінка*

$$a^2(t)\left\|\sqrt{\Delta}u(t,\cdot);\mathbf{H}_{q-1}(\Omega^p_{2\pi})\right\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot);\mathbf{H}_{q-1}(\Omega^p_{2\pi})\right\| \le \frac{C_3}{\varepsilon}\|\varphi;\mathbf{H}_{r+q}(\Omega^p_{2\pi})\|,$$

де оператор $\sqrt{\Delta}\,\eta = i\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\|k\|\hat{\eta}(k)e^{ikx}$ *для функції* $\eta = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\hat{\eta}(k)e^{ikx}$.

Зауваження 3.2 *За умов теореми* 3.3 *розв'язок задачі* (3.1), (3.2) *існує не лише в області* $\mathcal{O}^{4(M+1)}\backslash B_\varepsilon$, *але й у ширшій області* $\mathcal{O}^{4(M+1)}\backslash B$, *де* $\operatorname{meas} B = 0$, *проте для вектора* $\alpha \in B_\varepsilon \setminus B$ *взагалі не виконуються оцінки* (3.51), (3.52), *а виконуються слабші (залежні від* α*) оцінки* $\left\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_1(\Omega^p_{2\pi})\right\| \le C_4\|\varphi;\mathbf{H}_{r+1}(\Omega^p_{2\pi})\|$, $\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot);\mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi})\right\| \le C_5\|\varphi;\mathbf{H}_{r+1}(\Omega^p_{2\pi})\|$, *де сталі* C_4 *і* C_5 *не залежать від вектора* k, *але залежать від вектора* α *і є необмеженими на множині* $B_\varepsilon \setminus B$.

3.2. Нелокальна двоточкова задача для строго гіперболічного рівняння другого порядку за t зі змінними коефіцієнтами

У декартовому добутку часового відрізка та просторового багатовимірного тора досліджено задачу з нелокальними двоточковими крайовими умовами за часом для строго гіперболічного рівняння другого порядку за t зі змінними за часом коефіцієнтами. Встановлено розв'язність задачі у шкалі просторів Соболєва для майже всіх (за винятком множини наперед заданої малої міри) векторів, складених із коефіцієнтів нелокальних умов. Доведено метричну теорему про оцінку знизу малих знаменників, які є нелінійними функціями параметрів задачі.

Вступ. Нелокальні двоточкові і багатоточкові задачі для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними належать до класу некоректних за Адамаром задач. Ці задачі для безтипних рівнянь, які розглядуються, наприклад, в області $\mathcal{D}^p = \{(t,x) : t \in [0,T], x \equiv (x_1,\ldots,x_p) \in \Omega^p_{2\pi}\}$, де

$\Omega_{2\pi}^p$ — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, пов'язані з проблемою малих знаменників [50–52, 54, 57, 64, 66, 68, 76].

На основі метричного підходу у роботах [112, гл. 5], [113, §11, 13] встановлена розв'язність нелокальних задач для рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у класі просторів Соболєва $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, функцій 2π-періодичних за $x_1, \ldots, x_p$. Аналогічні результати отримано також і для інших областей [**?**, 26, 29]. У випадку рівнянь, коефіцієнти яких залежать від змінної t, нелокальні задачі, взагалі, не є розв'язними у цій шкалі просторів [67]; шкалою розв'язності цих задач є шкала просторів функцій, коефіцієнти Фур'є яких мають експоненціальну поведінку [70].

У цьому підрозділі показано, що для строго гіперболічних рівнянь другого порядку шкала $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$ є, як і для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, шкалою розв'язності двоточкових нелокальних задач для рівнянь зі змінними за аргументом t коефіцієнтами. Раніше деякі нелокальні задачі для гіперболічних рівнянь та систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, факторизованих та деяких інших рівнянь розглядалися у роботах [28, 108].

3.2.1. Позначення. Нехай $\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$, $l, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що $D_t^j u \in \mathbf{C}\big([0,T], \mathbf{H}_{q-lj}(\Omega_{2\pi}^p)\big)$ для кожного $j = 0, 1, \ldots, n$; норму в цьому просторі визначимо формулою

$$\|u; \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)\| = \Big(\sum_{j=0}^{n} \|D_t^j u; \mathbf{C}\big([0,T], \mathbf{H}_{q-lj}(\Omega_{2\pi}^p)\big)\|^2\Big)^{1/2}, \quad D_t = \partial/\partial t.$$

Розглянемо в області $\mathcal{D}^p$ задачу з нелокальними умовами

$$D_t^2 u + i a_1(t,D) D_t u - a_2(t,D) u = 0, \qquad i = \sqrt{-1}, \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned} &b_{00}(D)u|_{t=0} + b_{01}(D)D_t u|_{t=0} + c_{00}(D)u|_{t=T} + c_{01}(D)D_t u|_{t=T} = \varphi_0, \\ &b_{10}(D)u|_{t=0} + b_{11}(D)D_t u|_{t=0} + c_{10}(D)u|_{t=T} + c_{11}(D)D_t u|_{t=T} = \varphi_1, \end{aligned} \tag{3.54}$$

де

$$a_1(t,D)=\sum_{|s|=l}a_{1s}(t)D^s,\qquad a_2(t,D)=\sum_{|s|=2l}a_{2s}(t)D^s,$$

$$b_{\alpha\beta}(D)=\sum_{|s|\le(2-\beta)l}b_{\alpha\beta s}D^s,\qquad c_{\alpha\beta}(D)=\sum_{|s|\le(2-\beta)l}c_{\alpha\beta s}D^s,$$

$a_{1s}(t)$ та $a_{2s}(t)$ — неперервно диференційовні на проміжку $[0,T]$ функції, $b_{\alpha\beta s}$ та $c_{\alpha\beta s}$ — комплексні числа з одиничного круга $\mathcal{O}$ із центром у початку координат комплексної площини; $D_j=-i\partial/\partial x_j$, $j=1,\dots,p$; число l — зведений порядок диференціального рівняння (3.53).

Строга гіперболічність рівняння (3.53) означає, що для всіх $\xi\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$ рівняння $\lambda^2+a_1(t,\xi)\lambda+a_2(t,\xi)=0$ має два дійсні різні корені.

3.2.2. Зведення до системи диференціальних рівнянь. Якщо функція $u=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)e^{i(k,x)}$ є розв'язком задачі (3.53), (3.54), то коефіцієнти $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, можна знайти, розв'язуючи таку задачу:

$$u_k''(t)+ia_1(t,k)u_k'(t)-a_2(t,k)u_k(t)=0, \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}b_{00}(k)u_k(0)+b_{01}(k)u_k'(0)+c_{00}(k)u_k(T)+c_{01}(k)u_k'(T)&=\widehat{\varphi}_0(k),\\ b_{10}(k)u_k(T)+b_{11}(k)u_k'(0)+c_{10}(k)u_k(T)+c_{11}(k)u_k'(T)&=\widehat{\varphi}_1(k),\end{aligned} \tag{3.56}$$

де $\widehat{\varphi}_0(k)$, $\widehat{\varphi}_1(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій φ_0, φ_1 відповідно.

Через $\lambda_1(t,k)$ та $\lambda_2(t,k)$ позначимо корені рівняння

$$\lambda^2+\widetilde{a}_1(t,k)\lambda+\widetilde{a}_2(t,k)=0,\qquad k\ne0,$$

коефіцієнти $\widetilde{a}_1(t,k)=a_1(t,k/\widetilde{k})$, $\widetilde{a}_2(t,k)=a_2(t,k/\widetilde{k})$ якого є обмеженими функціями. Вважатимемо, що $\lambda_1(t,k)>\lambda_2(t,k)$ і, внаслідок строгої гіперболічності рівняння (3.53), дістаємо, що для всіх $t\in[0,T]$

$$\min_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\big(\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)\big)=\lambda(t)\ge d>0.$$

Відзначимо також, що $\lambda_1(\cdot,k)$ та $\lambda_2(\cdot,k)$ є неперервно диференційовними обмеженими функціями для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$.

Якщо $U_k(t) = \mathrm{col}\big(\widetilde{k}^{2l}u_k(t), \widetilde{k}^{l}u_k'(t)\big)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, то задачу (3.55), (3.56) можна звести до такої задачі:

$$U_k'(t) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \widetilde{a}_2(t,k) & -i\widetilde{a}_1(t,k) \end{pmatrix} U_k(t) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{3.57}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b}_{00}(k) & \widetilde{b}_{01}(k) \\ \widetilde{b}_{10}(k) & \widetilde{b}_{11}(k) \end{pmatrix} U_k(0) + \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{00}(k) & \widetilde{c}_{01}(k) \\ \widetilde{c}_{10}(k) & \widetilde{c}_{11}(k) \end{pmatrix} U_k(T) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix}, \tag{3.58}$$

де $\widetilde{b}_{ij}(k) = b_{ij}(k)\widetilde{k}^{(j-2)l}$, $\widetilde{c}_{ij}(k) = c_{ij}(k)\widetilde{k}^{(j-2)l}$.

Для невиродженої неперервно диференційовної матриці

$$R_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\lambda_1(t,k) & i\lambda_2(t,k) \end{pmatrix}$$

виконуються такі рівності:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \widetilde{a}_2(t,k) & -i\widetilde{a}_1(t,k) \end{pmatrix} R_k(t) = R_k(t) \begin{pmatrix} i\lambda_1(t,k) & 0 \\ 0 & i\lambda_2(t,k) \end{pmatrix},$$

$$\det R_k(t) = -i\big(\lambda_1(t,k) - \lambda_2(t,k)\big),$$

$$R_k^{-1}(t) = \big(\det R_k(t)\big)^{-1} \begin{pmatrix} i\lambda_2(t,k) & -1 \\ -i\lambda_1(t,k) & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_k'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\lambda_1'(t,k) & i\lambda_2'(t,k) \end{pmatrix},$$

$$R_k^{-1}(t)R_k'(t) = \frac{1}{\lambda_1(t,k) - \lambda_2(t,k)} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t,k) & \lambda_2'(t,k) \\ -\lambda_1'(t,k) & -\lambda_2'(t,k) \end{pmatrix},$$

де $R_k'(t) = dR_k(t)/dt$, $\lambda_1'(t,k) = d\lambda_1(t,k)/dt$, $\lambda_2'(t,k) = d\lambda_2(t,k)/dt$, причому

$$\lambda_1'(t,k) = \frac{\widetilde{a}_1'(t,k)\lambda_1(t,k) + \widetilde{a}_2'(t,k)}{\lambda_2(t,k) - \lambda_1(t,k)}, \quad \lambda_2'(t,k) = \frac{\widetilde{a}_1'(t,k)\lambda_2(t,k) + \widetilde{a}_2'(t,k)}{\lambda_1(t,k) - \lambda_2(t,k)}.$$

3.2.3. Умови розв'язності задачі. Введемо новий невідомий вектор $Z_k = Z_k(t)$ за формулою

$$U_k(t) = R_k(t)Z_k(t). \tag{3.59}$$

Підставимо (3.59) у формули (3.57) та (3.58), тоді

$$Z_k'(t) = R_k^{-1}(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \widetilde{a}_2(t,k) & -i\widetilde{a}_1(t,k)\end{pmatrix} R_k(t)Z_k(t) - R_k^{-1}(t)R_k'(t)Z_k(t),$$

тобто

$$Z_k'(t) = i\begin{pmatrix} \lambda_1(t,k) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t,k)\end{pmatrix} Z_k(t)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)}\begin{pmatrix} -\lambda_1'(t,k) & -\lambda_2'(t,k) \\ \lambda_1'(t,k) & \lambda_2'(t,k)\end{pmatrix} Z_k(t) \tag{3.60}$$

і

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b}_{00}(k) & \widetilde{b}_{01}(k) \\ \widetilde{b}_{10}(k) & \widetilde{b}_{11}(k)\end{pmatrix} R_k(0)Z_k(0)+$$

$$+\begin{pmatrix} \widetilde{c}_{00}(k) & \widetilde{c}_{01}(k) \\ \widetilde{c}_{10}(k) & \widetilde{c}_{11}(k)\end{pmatrix} R_k(T)Z_k(T) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}. \tag{3.61}$$

Розв'язок Z_k, $k \neq 0$, задачі (3.60), (3.61) існує і є єдиним, якщо

$$\det\Delta(k) \neq 0, \tag{3.62}$$

де

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_{00}(k) & \widetilde{b}_{01}(k) \\ \widetilde{b}_{10}(k) & \widetilde{b}_{11}(k)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{00}(k) & \widetilde{c}_{01}(k) \\ \widetilde{c}_{10}(k) & \widetilde{c}_{11}(k)\end{pmatrix} R_k(T)Y_k(T)R_k^{-1}(0),$$

$Y_k(t)$ — нормальна $\left(Y_k(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right)$ фундаментальна матриця розв'язків системи диференціальних рівнянь (3.60); він зображується формулою

$$Z_k(t) = Y_k(t)R_k^{-1}(0)\Delta^{-1}(k)\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

Нехай $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}$ — евклідова норма матриці A, де A^* — матриця, ермітово спряжена з A, $\operatorname{tr} B$ — слід матриці B. Оцінимо норму $\|Y_k\|$ фундаментальної матриці $Y_k = Y_k(t)$.

Лема 3.3 *Якщо $\theta(t,k)$ і $-\theta_1(t,k)$, $\theta(t,k) \geq -\theta_1(t,k)$, — власні числа симетричної матриці*

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1'(t,k) & \dfrac{\lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k)}{2} \\ \dfrac{\lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k)}{2} & \lambda_2'(t,k) \end{pmatrix},$$

тобто корені квадратного рівняння

$$\left(\theta + \frac{\lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k)}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1'(t,k)+\lambda_2'(t,k)}{2}\right)^2,$$

то для довільних $t', t'' \in [0,T]$ таких, що $t'' > t'$, і для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered} \exp\left(-\int_{t'}^{t''} \frac{\theta_1(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\right) \leq \frac{\|Y_k(t'')\|}{\|Y_k(t')\|}, \\ \frac{\|Y_k(t'')\|}{\|Y_k(t')\|} \leq \exp\left(\int_{t'}^{t''} \frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\right). \end{gathered} \tag{3.64}$$

Доведення. Матриця $\operatorname{diag}(i\lambda_1(t,k), i\lambda_2(t,k))$ є косоермітовою, а матриця

$$\frac{1}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)} \begin{pmatrix} -\lambda_1'(t,k) & -\lambda_2'(t,k) \\ \lambda_1'(t,k) & \lambda_2'(t,k) \end{pmatrix}$$

є дійснозначною для всіх $k \neq 0$ і $t \in [0,T]$, тому формулу (3.60) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{gathered} Z_k^{*\prime}(t) = -iZ_k^*(t) \begin{pmatrix} \lambda_1(t,k) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t,k) \end{pmatrix} + \\ + \frac{Z_k^*(t)}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)} \begin{pmatrix} -\lambda_1'(t,k) & \lambda_1'(t,k) \\ -\lambda_2'(t,k) & \lambda_2'(t,k) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.65}$$

Із формули $\left(\|Y_k\|^2\right)' = \operatorname{tr}\left(Y_k^{*\prime} Y_k + Y_k^* Y_k'\right)$ і формул (3.60) та (3.65), що справджуються також і для матриці Y_k, отримуємо рівність

$$\left(\|Y_k\|^2\right)' = \frac{1}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)} \times$$

$$\times \operatorname{tr}\Big(Y_k^* \begin{pmatrix} -2\lambda_1'(t,k) & \lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k) \\ \lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k) & 2\lambda_2'(t,k) \end{pmatrix} Y_k\Big),$$

з якої на підставі умов леми отримаємо нерівності

$$\frac{-2\theta_1(t,k)}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)}\|Y_k\|^2 \le \big(\|Y_k\|^2\big)' \le \frac{2\theta(t,k)}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)}\|Y_k\|^2.$$

Інтегрування на проміжку $[t', t'']$ дає нерівності (3.64). Лему доведено. ■

Оскільки $\|Y_k(0)\|^2 = 2$, то з леми 3.3 випливає, що

$$\begin{gathered} \exp\Big(-2\int_0^t \frac{\theta_1(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\Big) \le \frac{\|Y_k\|^2}{2}, \quad t\in[0,T], \\ \frac{\|Y_k\|^2}{2} \le \exp\Big(2\int_0^t \frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\Big), \quad t\in[0,T]. \end{gathered} \tag{3.66}$$

У випадку $k = 0$ задача (3.57), (3.58) набуває вигляду

$$U_0'(t) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_0(t) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} b_{000} & b_{010} \\ b_{100} & b_{110} \end{pmatrix} U_0(0) + \begin{pmatrix} c_{000} & c_{010} \\ c_{100} & c_{110} \end{pmatrix} U_0(T) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(0) \\ \widehat{\varphi}_1(0) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $U_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix}$, де сталі C_{01} та C_{02} визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} b_{000}+c_{000} & b_{010}+c_{000}T+c_{010} \\ b_{100}+c_{100} & b_{110}+c_{100}T+c_{110} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(0) \\ \widehat{\varphi}_1(0) \end{pmatrix},$$

матриця $\Delta(0)$ якої має визначник

$$\det\Delta(0) = T\det\begin{pmatrix} b_{000} & c_{000} \\ b_{100} & c_{100} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_{000}+c_{000} & b_{010}+c_{010} \\ b_{100}+c_{100} & b_{110}+c_{110} \end{pmatrix}. \tag{3.67}$$

Якщо $\det\Delta(0) = 0$, то задача (3.57), (3.58) при $k = 0$ не має розв'язку або має безліч розв'язків; якщо ж $\det\Delta(0) \ne 0$, то

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Delta^{-1}(0)\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(0) \\ \widehat{\varphi}_1(0) \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

є єдиним розв'язком задачі (3.57), (3.58).

Теорема 3.4 *Якщо* $\det\Delta(0)\neq 0$ *і коефіцієнти Фур'є* $\widehat{\varphi}_0(k)$ *та* $\widehat{\varphi}_1(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$, *задовольняють умову*

$$\Bigl\|\Delta^{-1}(k)\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}\Bigr\|\leq C_1\widetilde{k}^{\sigma}, \tag{3.69}$$

де $C_1>0$, $\sigma\in\mathbb{R}$, *— деякі сталі, що не залежать від* k, *то у шкалі просторів Соболева існує єдиний розв'язок* $u=u(t,x)$ *задачі* (3.53), (3.54), *для якого при всіх* $t\in[0,T]$ *справджуються такі включення:*

$$u(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega^p_{2\pi}),\ D_tu(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{\sigma_1-l}(\Omega^p_{2\pi}),\ D_t^2u(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{\sigma_1-2l}(\Omega^p_{2\pi}), \tag{3.70}$$

де $\sigma_1<2l-\sigma-p/2$.

Доведення. Умова $\det\Delta(0)\neq 0$ та умова (3.69) гарантують існування та єдиність розв'язків $U_k(t)$ задач (3.57), (3.58) для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$. Із формул (3.59), (3.63) випливає рівність $U_k(t)=R_k(t)Y_k(t)R_k^{-1}(0)\Delta^{-1}(k)\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}$, з якої, використовуючи умову гіперболічності та обмеженість матриць $R_k(t)$ та $R_k^{-1}(0)$, а саме $\|R_k(t)\|\leq C_2$ та $\|R_k^{-1}(0)\|\leq C_2/d$, маємо формулу

$$\bigl(\widetilde{k}^{4l}|u_k(t)|^2+\widetilde{k}^{2l}|u_k'(t)|^2\bigr)^{1/2}\leq\frac{C_2^2}{d}\|Y_k(t)\|\Bigl\|\Delta^{-1}(k)\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}\Bigr\|,\qquad k\neq 0.$$

Враховуючи оцінку (3.66), встановлюємо нерівність

$$\bigl(\widetilde{k}^{4l}|u_k(t)|^2+\widetilde{k}^{2l}|u_k'(t)|^2\bigr)^{1/2}\leq$$

$$\leq\frac{\sqrt{2}C_2^2}{d}\exp\Bigl(\int_0^t\frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\Bigr)\Bigl\|\Delta^{-1}(k)\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}\Bigr\|, \tag{3.71}$$

а також (згідно з умовою (3.69)) нерівність

$$\max\bigl(\widetilde{k}^{2\sigma_1}|u_k(t)|^2,\widetilde{k}^{2\sigma_1-2l}|u_k'(t)|^2\bigr)\leq\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l)}\bigl(\widetilde{k}^{4l}|u_k(t)|^2+\widetilde{k}^{2l}|u_k'(t)|^2\bigr)\leq$$
$$\leq\frac{2C_1^2C_2^4}{d^2}\exp\Bigl(2\int_0^t\frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\Bigr)\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l+\sigma)}. \tag{3.72}$$

Підсумовуючи нерівності (3.72) за $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ та враховуючи доданок, який відповідає $k = 0$, отримаємо оцінки для норми розв'язку

$$\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq$$

$$\leq |u_0(t)|^2 + \frac{2C_1^2C_2^4}{d^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\exp\Big(2\int_0^t\frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\Big)\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l+\sigma)}.$$

Оскільки $\theta(t,k) \leq C_3$, то $\displaystyle\int_0^t \frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)} \leq \frac{C_3}{d}t$, а, отже,

$$\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq |u_0(t)|^2 + \frac{2C_1^2C_2^4}{d^2}\exp\Big(\frac{C_3}{d}t\Big)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l+\sigma)}.$$

Аналогічна оцінка справджується для норми $\|D_tu(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma_1-l}(\Omega^p_{2\pi})\|$:

$$\|D_tu(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma_1-l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq |u_0'(t)|^2 + \frac{2C_1^2C_2^4}{d^2}\exp\Big(\frac{C_3}{d}t\Big)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l+\sigma)}.$$

Із рівностей $u_k''(t) = \widetilde{a}_2(t,k)\widetilde{k}^{2l}u_k(t) - i\widetilde{a}_1(t,k)\widetilde{k}^l u_k'(t)$ та збіжності ряду $\sum\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l+\sigma)}$ випливає включення (3.70). Теорему доведено. ■

3.2.4. Оцінювання малих знаменників Проаналізуємо нерівність (3.69) для того, щоб сформулювати умови існування розв'язку задачі (3.53), (3.54) в термінах гладкості функцій φ_0 та φ_1, тобто в термінах належності функцій φ_0 і φ_1 до просторів $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ при деяких значеннях параметра $q \in \mathbb{R}$.

Нехай $\psi_{ij}(k)$ — елементи матриці $\Delta(k)$, а саме

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix}\psi_{00}(k) & \psi_{01}(k)\\ \psi_{10}(k) & \psi_{11}(k)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\widetilde{b}_{00}(k) & \widetilde{b}_{01}(k)\\ \widetilde{b}_{10}(k) & \widetilde{b}_{11}(k)\end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix}\widetilde{c}_{00}(k) & \widetilde{c}_{01}(k)\\ \widetilde{c}_{10}(k) & \widetilde{c}_{11}(k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{00}(k) & \Phi_{01}(k)\\ \Phi_{10}(k) & \Phi_{11}(k)\end{pmatrix},$$

де $\begin{pmatrix}\Phi_{00}(k) & \Phi_{01}(k)\\ \Phi_{10}(k) & \Phi_{11}(k)\end{pmatrix} = R_k(T)Y_k(T)R_k^{-1}(0)$. Тоді

$$\psi_{ij}(k) = \widetilde{b}_{ij}(k) + \widetilde{c}_{i0}(k)\Phi_{0j}(k) + \widetilde{c}_{i1}(k)\Phi_{1j}(k), \qquad i=0,1, \quad j=0,1,$$

і $\det\Delta(k)=\psi_{00}(k)\psi_{11}(k)-\psi_{01}(k)\psi_{10}(k)$.

Позначимо через $\Phi(k)$ максимальне серед чисел $|\Phi_{00}(k)|$, $|\Phi_{01}(k)|$, $|\Phi_{10}(k)|$, $|\Phi_{11}(k)|$ та одиниці. Оцінюючи модуль величин $\psi_{ij}(k)$ та враховуючи, що $b_{\alpha\beta s}$ та $c_{\alpha\beta s}\in\mathcal{O}$, маємо $|\psi_{ij}(k)|\leq\left(2\binom{2l+p}{2l}+\binom{l+p}{l}\right)\Phi(k)\equiv C_4\Phi(k)$; тому для вектора $\Delta^{-1}(k)\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\det\Delta(k)}\begin{pmatrix}\psi_{11}(k)\widehat{\varphi}_0(k)-\psi_{01}(k)\widehat{\varphi}_1(k)\\ -\psi_{10}(k)\widehat{\varphi}_0(k)-\psi_{00}(k)\widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}$ справджується нерівність

$$\left\|\Delta^{-1}(k)\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}\right\|\leq\frac{\sqrt{2}C_4}{|\det\Delta(k)/\Phi(k)|}\left\|\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}\right\|. \tag{3.73}$$

Знаменники у формулі (3.73) — дроби $\det\Delta(k)/\Phi(k)$ — є функціями коефіцієнтів рівняння (3.53), від яких залежать $\Phi_{ij}(k)$ та функціями коефіцієнтів нелокальних умов (3.54); причому елементи матриці $\Delta(k)$ лінійно залежать від коефіцієнтів умов (3.54). Ці знаменники для деяких наборів коефіцієнтів задачі (3.53), (3.54) можуть бути як завгодно малими, тому розв'язність задачі (3.53), (3.54) пов'язана з проблемою малих знаменників і оцінкою їх знизу.

Для оцінювання малих знаменників використовуємо метричний підхід [67]; при цьому фіксуємо коефіцієнти рівняння (3.53) та більшу частину коефіцієнтів умов (3.54), а саме: не фіксованими (вільними) вважаємо коефіцієнти при старших похідних $D_\alpha^{2l}u|_{t=0}$, які позначимо $w_{i0\alpha}^0$, та при похідних $D_\alpha^l D_t u|_{t=0}$, які позначимо $w_{i1\alpha}^0$, $i=0,1$, $\alpha=1,\ldots,p$; аналогічно, коефіцієнти при похідних $D_\alpha^{2l}u|_{t=T}$ та $D_\alpha^l D_t u|_{t=T}$ позначимо $w_{ij\alpha}^T$ і вважаємо їх вільними. Із цих $8p$ коефіцієнтів та коефіцієнтів b_{000} і b_{110} утворимо вектор $w\in\mathcal{O}^{8p+2}$.

Розіб'ємо множину $\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$ на p підмножин $K_1,\ldots,K_p$, де

$$K_1=\{k\in\mathbb{Z}^p:|k_1|=\max(|k_1|,\ldots,|k_p|)\},$$

$$K_\alpha=\{k\in\mathbb{Z}^p:|k_\alpha|=\max(|k_1|,\ldots,|k_p|),\ |k_\alpha|>\max(|k_1|,\ldots,|k_{\alpha-1}|)\},$$

де $\alpha=2,\ldots,p$. Через $W_\varepsilon(k)$, $0<\varepsilon<1$, позначимо множину векторів $w\in$

$\mathcal{O}^{8p+2}$ таких, що

$$\frac{|\det \Delta(k)|}{\Phi(k)} < \varepsilon C_5 \widetilde{k}^{-\beta}, \tag{3.74}$$

де $\Phi(0) = 1$, а через W_ε — множину $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} W_\varepsilon(k)$. Множина W_ε — це множина векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2}$, для яких нерівність (3.74) виконується принаймні один раз на множині $\mathbb{Z}^p$. Оцінимо міру множини W_ε.

Для $k = 0$ визначник матриці $\Delta(k)$ можна подати у вигляді

$$\det \Delta(0) = \det\left(\begin{pmatrix} b_{000} & b_{010} \\ b_{100} & b_{110} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{000} & c_{000}T + c_{010} \\ c_{100} & c_{100}T + c_{110} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} b_{000} & b_{010} \\ b_{100} & b_{110} \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k)\right), \tag{3.75}$$

а для ненульових $k \in K_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, p$, у випадках, коли $\Phi(k)$ відповідно дорівнює 1, $|\Phi_{00}(k)|$, $|\Phi_{01}(k)|$, $|\Phi_{10}(k)|$, $|\Phi_{11}(k)|$, маємо рівності

$$\det \Delta(k) = \left(\frac{k_\alpha}{\widetilde{k}}\right)^{3l} \det\left(\begin{pmatrix} w^0_{00\alpha} & w^0_{01\alpha} \\ w^0_{10\alpha} & w^0_{11\alpha} \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k)\right), \tag{3.76}$$

$$\frac{\det \Delta(k)}{\Phi_{00}(k)} = \left(\frac{k_\alpha}{\widetilde{k}}\right)^{3l} \det\left(\begin{pmatrix} w^T_{00\alpha} & w^0_{01\alpha} \\ w^T_{10\alpha} & w^0_{11\alpha} \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k)\right), \tag{3.77}$$

$$\frac{\det \Delta(k)}{\Phi_{01}(k)} = \left(\frac{k_\alpha}{\widetilde{k}}\right)^{4l} \det\left(\begin{pmatrix} w^0_{00\alpha} & w^T_{00\alpha} \\ w^0_{10\alpha} & w^T_{10\alpha} \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k)\right), \tag{3.78}$$

$$\frac{\det \Delta(k)}{\Phi_{10}(k)} = \left(\frac{k_\alpha}{\widetilde{k}}\right)^{2l} \det\left(\begin{pmatrix} w^T_{01\alpha} & w^0_{01\alpha} \\ w^T_{11\alpha} & w^0_{11\alpha} \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k)\right), \tag{3.79}$$

$$\frac{\det \Delta(k)}{\Phi_{11}(k)} = \left(\frac{k_\alpha}{\widetilde{k}}\right)^{3l} \det\left(\begin{pmatrix} w^0_{00\alpha} & w^T_{01\alpha} \\ w^0_{10\alpha} & w^T_{11\alpha} \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k)\right). \tag{3.80}$$

Праві частини рівностей (3.75)–(3.80) мають вигляд

$$\delta_1(k) \det\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1(k) & Y_2(k) \\ Y_3(k) & Y_4(k) \end{pmatrix} \right),$$

де $(p+1)^{-2l} \le |\delta_1(k)| \le 1$, y_1, y_2, y_3, y_4 є елементами вектора w, а $Y_1(k)$, $Y_2(k)$, $Y_3(k)$, $Y_4(k)$ є елементами матриці $\widetilde{\Delta}(k)$ і не залежать від y_1, y_2, y_3 та y_4. Оцінимо міру множини $W_\varepsilon(k)$ векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2}$, що задовольняють нерівність (3.74), тобто нерівність

$$\frac{|\det \Delta(k)|}{\Phi(k)} = |\delta_1(k)| \left| \det \left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1(k) & Y_2(k) \\ Y_3(k) & Y_4(k) \end{pmatrix} \right) \right| < \delta(k),$$

де $\delta(k) = \varepsilon C_5 \widetilde{k}^{-\beta}$. Оскільки при $y_4 + Y_4(k) \ne 0$

$$\frac{|\det \Delta(k)|}{\Phi(k)} = |\delta_1(k)| \big| y_4 + Y_4(k) \big| \left| y_1 + Y_1(k) - \frac{(y_2 + Y_2(k))(y_3 + Y_3(k))}{y_4 + Y_4(k)} \right|,$$

то $W_\varepsilon(k) \subset W'_\varepsilon(k) \cup W''_\varepsilon(k)$, де $W'_\varepsilon(k)$ — множина векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2}$, для яких

$$\sqrt{|\delta_1(k)|} \big| y_4 + Y_4(k) \big| < \sqrt{\delta(k)}, \tag{3.81}$$

а $W''_\varepsilon(k)$ — множина векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2} \setminus W'_\varepsilon(k)$, для яких

$$\sqrt{|\delta_1(k)|} \left| y_1 + Y_1(k) - \frac{(y_2 + Y_2(k))(y_3 + Y_3(k))}{y_4 + Y_4(k)} \right| < \sqrt{\delta(k)}. \tag{3.82}$$

Позначимо $W'_\varepsilon(k, w')$ — множину $y_4 \in \mathcal{O}$, для яких виконується (3.81) при інших фіксованих елементах вектора w, які утворюють вектор w'; аналогічно $W''_\varepsilon(k, w'')$ — множина $y_1 \in \mathcal{O}$, для яких виконується (3.82) при фіксованому векторі w'' інших коефіцієнтів вектора w. Тоді $W'_\varepsilon(k, w')$ та $W''_\varepsilon(k, w'')$ є частинами кругів радіуса $\sqrt{\delta(k)/|\delta_1(k)|}$ і мають міри

$$\operatorname{mes} W'_\varepsilon(k, w') < \pi \delta(k)/|\delta_1(k)|, \quad \operatorname{mes} W''_\varepsilon(k, w'') < \pi \delta(k)/|\delta_1(k)|.$$

Інтегрування цих нерівностей по області $\mathcal{O}^{8p+1}$ дає оцінку

$$\max\big(\operatorname{mes} W'_\varepsilon(k), \operatorname{mes} W''_\varepsilon(k)\big) < \pi^{8p+2} \delta(k)/|\delta_1(k)|.$$

Отже, $\operatorname{mes} W_\varepsilon(k) < 2\pi^{8p+2} \delta(k)/|\delta_1(k)| \le 2(p+1)^{2l} \pi^{8p+2} \delta(k)$, а тому

$$\operatorname{mes} W_\varepsilon \le \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes} W_\varepsilon(k) < 2\varepsilon C_5 (p+1)^{2l} \pi^{8p+2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{-\beta}.$$

Якщо $\beta > p$ і стала $C_5 > 0$ визначається рівністю

$$C_5 = \Big(2(p+1)^{2l}\pi^{8p+2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{-\beta}\Big)^{-1} > 0,$$

то з попередньої нерівності отримуємо оцінку $\operatorname{mes} W_\varepsilon < \varepsilon$.

З наведених міркувань та отриманих нерівностей випливає наступне твердження про оцінку знизу малих знаменників.

Лема 3.4 *Для довільних* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *та* β, $\beta > p$, *існує така множина* $W_\varepsilon \subset \mathcal{O}^{8p+2}$, *що* $\operatorname{mes} W_\varepsilon < \varepsilon$ *і для всіх векторів* $w \in \mathcal{O}^{8p+2} \setminus W_\varepsilon$ *виконується оцінка*

$$\frac{|\det\Delta(k)|}{\Phi(k)} \geq \varepsilon C_5\widetilde{k}^{-\beta}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{3.83}$$

Наступна теорема встановлює розв'язність задачі (3.53), (3.54) у шкалі просторів $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$.

Теорема 3.5 *Нехай числа* ε, β *і множина* W_ε *є такими, як у лемі* 3.4. *Якщо* $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbf{H}_\beta(\Omega^p_{2\pi})$, *то для майже всіх векторів* $w \in \mathcal{O}^{8p+2}$ *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (3.53), (3.54), *причому для всіх* $t \in [0, T]$ *виконуються включення* $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$, $D_t u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$.

Для всіх векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2} \setminus W_\varepsilon$ *справджуються оцінки*

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot);\mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 &\leq \frac{C_6}{\varepsilon}e^{2C_3t/d}\big(\|\varphi_0;\mathbf{H}_\beta(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + \|\varphi_1;\mathbf{H}_\beta(\Omega^p_{2\pi})\|^2\big),\\ \|D_t u(t,\cdot);\mathbf{H}_{l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 &\leq \frac{C_6}{\varepsilon}e^{2C_3t/d}\big(\|\varphi_0;\mathbf{H}_\beta(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + \|\varphi_1;\mathbf{H}_\beta(\Omega^p_{2\pi})\|^2\big). \end{aligned} \tag{3.84}$$

Доведення. Для довільного вектора $w \in \mathcal{O}^{8p+2} \setminus W_\varepsilon$ справджується оцінка (3.83) і для майже всіх векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2}$ ця оцінка справджується для всіх (за винятком скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, тому з формул (3.68) та (3.71) випливає розв'язність задачі і для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ — оцінка

$$\max\big(\widetilde{k}^{4l}|u_k(t)|^2, \widetilde{k}^{2l}|u'_k(t)|^2\big) \leq \varepsilon^{-1}C_6e^{2C_3t/d}\widetilde{k}^{2\beta}\big(|\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big), \tag{3.85}$$

де стала C_6 залежить тільки від сталих C_2, C_4, C_5, T та d і не залежить від ε, β та k. Підсумовуючи нерівності (3.85) за $k \in \mathbb{Z}^p$, отримуємо нерівності (3.84) і доведення теореми. ■

Зауважимо, що якщо в умовах теореми функції φ_0, φ_1 належать до простору $\mathbf{H}_{q-2l+\beta}(\Omega^p_{2\pi})$, то для всіх $t \in [0,T]$ для розв'язку $u(t,x)$ виконуються включення $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$, $D_t u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{q-l}(\Omega^p_{2\pi})$, де $q \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.6 *Якщо* $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-2l+\beta}(\Omega^p_{2\pi})$, *де* $\beta > p$, $q \in \mathbb{R}$, *то для всіх векторів* $w \in \mathcal{O}^{8p+2} \setminus W_\varepsilon$, $\operatorname{mes} W_\varepsilon < \varepsilon$, *існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі* (3.53), (3.54) *з простору* $\mathbf{H}^2_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ *і*

$$\|u; \mathbf{H}^2_{l,q}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le C_7\big(\|\varphi_0; \mathbf{H}_{q-2l+\beta}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + \|\varphi_1; \mathbf{H}_{q-2l+\beta}(\Omega^p_{2\pi})\|^2\big), C_7 > 0.$$

Доведення. На підставі нерівності (3.85) отримуємо для всіх $t \in [0,T]$ оцінку

$$\max_{j=0,1,2} \|D_t^j u; \mathbf{H}_{q-jl}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \le \varepsilon^{-1} C_6 e^{2C_3 T/d} \sum_{j=0}^{1} \|\varphi_j; \mathbf{H}_{q-2l+\beta}(\Omega^p_{2\pi})\|^2.$$

Звідси маємо включення $u \in \mathbf{H}^2_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ і шукану нерівність, $C_7 = C_6 e^{2C_3 T/d}/\varepsilon$.

Теорему доведено. ■

3.3. Задача з нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь високого порядку

У декартовому добутку часового відрізка та просторового багатовимірного тора для строго гіперболічного рівняння довільного порядку зі змінними коефіцієнтами досліджено умови розв'язності задачі із загальними багатоточковими нелокальними умовами. За допомогою метричного підходу встановлено існування та єдиність розв'язку, а також його гладкість у шкалі просторів Соболєва. Доведено теорему про оцінки знизу малих знаменників, які виникають у процесі побудови цього розв'язку.

3.3.1. Постановка задачі. Позначення. В області $\mathcal{D}^p$ розглядається багатоточкова задача для гіперболічного рівняння

$$L(t, D_t, D)u \equiv D_t^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,D) D_t^{n-j} u = 0 \qquad (3.86)$$

$$lu \equiv \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{j=1}^{n} B_{j\alpha}(D)D_t^{n-j}u\big|_{t=t_\alpha} = \varphi, \tag{3.87}$$

де $0 \le t_1 < \cdots < t_M \le T$, $D_t = \partial/\partial t$.

Коефіцієнти $A_j(t,D)$ рівняння (3.86) — диференціальні оператори вигляду $A_j(t,D) = \sum\limits_{|s|\le jl} a_{js}(t)D^s$, де $a_{js}(t)$ — неперервно диференційовні на $[0,T]$ комплекснозначні функції, причому $A_j^0(t,D) = \sum\limits_{|s|=jl} a_{js}(t)D^s$, $A_j^1(t,D) = \sum\limits_{|s|\le(j-1)l} a_{js}(t)D^s$, $D^s = D_1^{s_1}\cdots D_p^{s_p}$, $D_1 = -i\partial/\partial x_1, \ldots, D_p = -i\partial/\partial x_p$, $s = (s_1,\ldots,s_p)$, $|s| = s_1+\cdots+s_p$. Строга гіперболічність рівняння (3.86) означає, що корені $\lambda_1(t,\xi),\ldots,\lambda_n(t,\xi)$ рівняння

$$\lambda^n + \sum_{j=1}^{n} A_j^0(t,\xi)\lambda^{n-j} = 0 \tag{3.88}$$

є уявними та різними для всіх $(t,\xi) \in [0,T]\times\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$. Тому ці корені є неперервно диференційовними функціями за змінною t та гладкими за змінною ξ, а функція $\prod\limits_{1\le i<j\le n}\left|\lambda_i(t,\xi)-\lambda_j(t,\xi)\right|^2$ є додатною. Оператори $B_{j\alpha}(D)$ — це стовпці вигляду: $B_{j\alpha}(D) = \sum\limits_{|s|\le jl} B_{j\alpha s}D^s$, де $B_{j\alpha s}\in\mathbb{C}^n$. Компоненти векторів $B_{j\alpha s}\in\mathbb{C}^n$ вважаємо параметрами задачі (3.86), (3.87). Натуральне число l характеризує ріст коренів $\lambda_j(t,\xi)$ при $\xi\to\infty$.

Задача (3.86), (3.87) розглядалася в роботі [70] для систем неоднорідних безтипних диференціальних рівнянь, а також для випадку двоточкових умов в роботах [67, 69]. Встановлено розв'язність задач у просторах $\mathbf{E}_{h,l} = \mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $h,l\in\mathbb{R}$, періодичних вектор-функцій $\psi(x) = \sum\limits_k \widehat{\psi}_k e^{i(k,x)}$, які є поповненням множини тригонометричних многочленів за нормою

$$\|\psi;\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\exp(2h\widetilde{k}^l)\widehat{\psi}_k^*\widehat{\psi}_k\Big)^{1/2},$$

де $x = (x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_{2\pi}^p$, $k = (k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $(k,x) = k_1x_1+\cdots+k_px_p$, $\widetilde{k} = (1+k_1^2+\cdots+k_p^2)^{1/2}$, а символ „*“ позначає операцію ермітового спряження. Ці простори складаються з функцій, коефіцієнти Фур'є яких мають експоненційну поведінку. Така властивість є характерною ознакою нелокальних задач для безтипних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Для рівнянь зі сталими коефіцієнтами задачі типу (3.86), (3.87) мають розв'язки [65, 68] у шкалі просторів Соболєва $\{\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\}$, де простір $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$, $q \in \mathbb{R}$, є поповненням множини тригонометричних многочленів за нормою

$$\|\psi; \mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\| = \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} \widehat{\psi}^*_k \widehat{\psi}_k \Big)^{1/2}.$$

У роботах [71, 72] встановлено, що розв'язки нелокальних задач для рівнянь зі змінними коефіцієнтами гіперболічного типу (строго гіперболічних) другого порядку за змінною t, також належать шкалі просторів Соболєва, якщо цій шкалі належать праві частини задач. Нелокальні задачі для гіперболічних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами, факторизованих та деяких інших рівнянь вивчалися також у роботах [28, 108].

Розглядувані задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають в рядах Фур'є, що зображають формальні розв'язки. Для отримання оцінок знизу малих знаменників використовується метричний підхід [112, 113]. Існування розв'язку встановлюється для всіх задач за винятком множини задач малої міри в просторі коефіцієнтів крайових умов.

У підрозділі показано, що майже всі задачі (3.86), (3.87) розв'язні в просторах Соболєва, подібно до нелокальних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Встановлено гладкість їх розв'язків та залежність гладкості від коефіцієнтів нелокальних умов.

Розв'язок задачі (3.86), (3.87) шукаємо в банаховому просторі $\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, де $\mathbf{H}^N_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, $l, q \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, — простір функцій $u = u(t, x)$ таких, що $D^j_t u \in \mathbf{C}\big([0, T], \mathbf{H}_{q-lj}(\Omega^p_{2\pi})\big)$ для кожного $j = 0, 1, \ldots, N$; норма визначається формулою $\|u; \mathbf{H}^N_{l,q}(\mathcal{D}^p)\| = \Big(\sum\limits_{j=0}^{N} \|D^j_t u; \mathbf{C}\big([0, T], \mathbf{H}_{q-lj}(\Omega^p_{2\pi})\big)\|^2 \Big)^{1/2}$.

Якщо $U^j \in \mathbf{C}\big([0, T], \mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\big)$ для $j = 1, \ldots, n$, то вважаємо, що вектор-функція $U = \mathrm{col}(U^1, \ldots, U^n)$ належить до простору $\mathbf{H}_q(\mathcal{D}^p)$ і має норму

$\|U;\mathbf{H}_q(\mathcal{D}^p)\|^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\|U^j;\mathbf{C}\big([0,T],\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\|^2.$

Для послідовності комплексних чисел $F(k)$ введемо псевдодиференціальний оператор $F(D)$ за формулою $F(D)\psi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}F(k)\widehat{\psi}_k e^{ikx}$, де $\psi(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{\psi}_k e^{ikx}$. Якщо послідовність $|F(k)|$ обмежена зверху (знизу), то оператор $F(D)$ (оператор $F^{-1}(D)$) є обмеженим у шкалі $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}$.

Послідовність $\widetilde{k}$, що використовується у визначенні норми в $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, визначає оператор $\widetilde{D}$, для якого $\|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\|=\|\widetilde{D}^{q_1}\varphi;\mathbf{H}_{q-q_1}(\Omega_{2\pi}^p)\|$.

3.3.2. Сталі коефіцієнти в головній частині рівняння. Нехай рівняння (3.86) має сталі коефіцієнти в головній частині: $A_j^0(t,D)=A_j^0(D)$.

Позначимо $\mu_j(k)=-i\widetilde{k}^{-l}\lambda_j(k)$ при $k\neq 0$, $\mu_j(0)=0$, $j=1,\dots,n$,

$$U_k(t)=\operatorname{col}\big(U_k^1(t),\dots,U_k^n(t)\big)=\operatorname{col}\big(\widetilde{k}^{(n-j)l}u_k^{(j)}(t)\big)_{j=0}^{n-1},\tag{3.89}$$

де $u_k(t)$ — коефіцієнти Фур'є розв'язку u задачі (3.86), (3.87). Якщо векторфункція $U=\operatorname{col}(U^1,\dots,U^n)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}U_k(t)e^{ikx}$, то

$$D_tU=i\widetilde{D}^lA(t,D)U,\qquad A(t,D)=A^0(D)+A^1(t,D),\tag{3.90}$$

де $A^0(D)$ і $A^1(t,D)$ оператор-матриці порядку n з елементами $A_{ij}^0(D)$ та $A_{ij}^1(t,D)$, причому $A_{i,i+1}^0(0)=0$, $A_{i,i+1}^1(0)=A_{i,i+1}^0(k)=1$ при $k\neq 0$, $i=1,\dots,n-1$, $A_{nj}^0(k)=-i^{-j}A_j^0(k/\widetilde{k}^l)$, $A_{nj}^1(t,k)=-(i\widetilde{k}^l)^{-j}A_j^1(t,k)$, всі інші елементи $A_{ij}^0(k)$ та $A_{ij}^1(t,k)$ є нулями. Із заміни (3.89) випливає, що функція $u\in\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$, якщо $U\in\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$.

Числа $\mu_j(k)$, $k\neq 0$, є простими коренями многочлена

$$L^0(\mu,k)=\mu^n+\sum_{j=1}^{n}A_{nj}^0(k)\mu^{n-j}=\prod_{j=1}^{n}\big(\mu-\mu_j(k)\big)\tag{3.91}$$

з обмеженими на $[0,T]\times\mathbb{Z}^p$ коефіцієнтами $A_{nj}^0(k)$, $j=1,\dots,n$, тому вони також обмежені зверху:

$$\max_{j,k}|\mu_j(k)|\leq\widetilde{\mu},\tag{3.92}$$

де $\widetilde{\mu}$ залежить лише від $|a_{js}|$, $|s| = jl$, $j = 1, \ldots, n$, а похідна $\dot{L}^0(\mu, k)$, $k \neq 0$, за змінною μ многочлена (3.91) на його коренях внаслідок гіперболічності обмежена знизу, тому

$$\max_{j,k} |\dot{L}^0(\mu_j(k), k)| = \max_{j,k} \prod_{j=1, j\neq\alpha}^{n} \big|\mu_j(k) - \mu_\alpha(k)\big| \geq d. \tag{3.93}$$

Виконаємо заміну

$$U_k(t) = R(k)G(t, k)Z_k(t), \tag{3.94}$$

де невідомі вектори $Z_k(t) = \operatorname{col}\big(Z_k^1(t), \ldots, Z_k^n(t)\big)$, $R(0)$, $G(t, 0)$ — одиничні матриці, $R(k) = \big(\mu_j^{\alpha-1}(k)\big)_{\alpha,j=1}^n$, $G(t, k) = \operatorname{diag}\big(\exp(i\widetilde{k}^l\mu_j(k)t)\big)_{j=1}^n$ для ненульових векторів k, тоді функція $Z = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} Z_k(t)e^{ikx}$, задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$D_tZ = i\widetilde{D}^lG^{-1}(t, D)R^{-1}(D)A^1(t, D)R(D)G(t, D)Z. \tag{3.95}$$

Елементи $i\widetilde{D}^lA^1_{ij}(t, D)$ матриці $i\widetilde{D}^lA^1(t, D)$ є обмеженими операторами, як і елементи матриць $R(D)$, $G(t, D)$, $R^{-1}(D)$ та $G^{-1}(t, D)$.

Теорема 3.7 *Якщо Z задовольняє систему рівнянь (3.95), $Z \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$, $q_1 \in \mathbb{R}$, то $U = R(D)G(t, D)Z \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$ і задовольняє систему (3.90). Якщо фундаментальна матриця $\Phi_j(t, D)$ системи (3.95) нормована рівністю $\Phi_j(t_j, D) = G^{-1}(t_j, D)R^{-1}(D)$, $j = 1, \ldots, n$, то*

$$U = R(D)G(t, D)\Phi_j(t, D)C \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p), \qquad U(t_j, \cdot) = C, \tag{3.96}$$

для довільної вектор-функції $C \in \mathbf{H}_{q_1}(\Omega^p_{2\pi})$.

Доведення. Оскільки $A^0(D)R(D) = R(D)D_tG(t, D)$ і виконується рівність (3.95), то $D_tU = i\widetilde{D}^lA(t, D)U$. Внаслідок обмеженості операторів $R(D)$ та $G(t, D)$ із умови $Z \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$ випливає включення $U \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$.

Нехай $A^2(t, k) = i\widetilde{k}^lG^{-1}(t, k)R^{-1}(k)A^1(t, k)R(k)G(t, k)$, тоді загальний розв'язок рівняння $Z'_k = A^2(t, k)Z_k$ є таким: $Z_k = \Phi_j(t, k)C_k$, де $C_k \in \mathbb{C}^n$, тому $Z = \Phi_j(t, D)$, $U = R(D)G(t, D)\Phi_j(t, D)C$ для $C = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} C_ke^{ikx}$, а також $U(t_j, \cdot) = R(D)G(t_j, D)\Phi_j(t_j, D)C = C$.

Оскільки $\Phi_j'(t,k) = A^2(t,k)\Phi_j(t,k)$, то із формул

$$\big(\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\big)' = \operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\big(A^{2*}(t,k) + A^2(t,k)\big)\Phi_j(t,k)\big),$$

$$\beta_1 \le \operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\big(A^{2*}(t,k) + A^2(t,k)\big)\Phi_j(t,k)\big) / \operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big) \le \beta_2,$$

де β_1 і β_1 — незалежні від t та k додатні сталі, отримуємо нерівності

$$\big(e^{-\beta_1 t}\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\big)' \ge 0, \qquad \big(e^{-\beta_2 t}\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\big)' \le 0.$$

Інтегруючи ці нерівності на відрізку $[t_j, t]$, отримуємо відповідно при $t < t_j$ та при $t \ge t_j$ оцінки

$$\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big) \le e^{\beta_1(t-t_j)}\operatorname{tr}\big(R^{*-1}(k)R^{-1}(k)\big),$$

$$\operatorname{tr}\big(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\big) \le e^{\beta_2(t-t_j)}\operatorname{tr}\big(R^{*-1}(k)R^{-1}(k)\big).$$

Отже, оператори $\Phi_j(t,D)$ і $R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)$ є обмеженими. Звідси маємо, що $U \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$, якщо $C \in \mathbf{H}_{q_1}(\Omega_{2\pi}^p)$. Теорему доведено. ■

Із врахуванням заміни (3.89), умови (3.87) перетворяться до вигляду

$$\sum_{\alpha=1}^{M} B_\alpha(D)U|_{t=t_\alpha} = \varphi, \tag{3.97}$$

де $B_\alpha(D) = \big(\widetilde{D}^{-nl}B_{n\alpha}(D), \widetilde{D}^{-(n-1)l}B_{n-1,\alpha}(D), \ldots, \widetilde{D}^{-l}B_{1\alpha}(D)\big)$ є обмеженими операторами. Використовуючи тепер заміну (3.96), отримаємо систему рівнянь для визначення вектор-функції C:

$$\Delta_j(D)C = \varphi, \tag{3.98}$$

$$\Delta_j(D) = B_j(D) + \sum_{\alpha=1,\alpha\ne j}^{M} B_\alpha(D)R(D)G(t,D)\Phi_j(t_\alpha,D), \ j = 1,\ldots,n. \tag{3.99}$$

Теорема 3.8 *Якщо для деякого j, $1 \le j \le n$, існує $\Delta_j^{-1}(D)$, то задача* (3.90), (3.97) *має не більше одного розв'язку. При виконанні нерівностей*

$$\widehat{\varphi}_k^*\Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k \le \beta_3\widetilde{k}^{2r}, \qquad \beta_3 > 0, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{3.100}$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, *де* $\widehat{\varphi}_k$ *— коефіцієнти Фур'є вектор-функції* φ, *розв'язок* U *існує, належить до* $\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, *де* $q < nl - r - p/2$, *і має вигляд*

$$U = R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)\Delta_j^{-1}(D)\varphi. \qquad (3.101)$$

При цьому існує єдиний розв'язок $u = \widetilde{D}^{-nl}U^1 \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ *вихідної задачі* (3.86), (3.87).

Доведення. Якщо $\widetilde{U}$ та $\widetilde{\widetilde{U}}$ різні розв'язки задачі (3.90), (3.97), то ненульовий розв'язок $U^0 = \widetilde{U} - \widetilde{\widetilde{U}}$ однорідної задачі (3.90), (3.97) має вигляд $U^0 = R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)C$, як у формулі (3.96), і $\Delta_j(D)C = 0$, де $C = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} C_k e^{ikx}$, $C \neq 0$. Тоді існує $\bar{k} \in \mathbb{Z}^p$ таке, що $C_{\bar{k}} \neq 0$. Оскільки $C_{\bar{k}}$ визначається із системи лінійних однорідних алгебричних рівнянь $\Delta_j(\bar{k})C_{\bar{k}} = 0$, то матриця $\Delta_j(\bar{k})$ є виродженою. Отже, матриця $\Delta_j^{-1}(\bar{k})$ не існує, як і оператор $\Delta_j^{-1}(D)$, що суперечить припущенню теореми. Єдиність розв'язку U доведено.

З теореми 3.7 випливає така нерівність:

$$\|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \beta_4 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2(q-nl)}\widehat{\varphi}_k^*\Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k. \qquad (3.102)$$

З умови (3.100) маємо при $q < nl - r - p/2$ включення $U \in \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, оскільки $\|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \beta_3\beta_4 \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2(q-nl+r)} < \infty$. На підставі формули (3.89) отримуємо рівності $u = \widetilde{D}^{-nl}U^1$ і $\|u;\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)\| = \|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|$.

Теорему доведено. ■

Нехай φ — довільна функція із $\mathbf{H}_{q_1}(\Omega^p_{2\pi})$, тоді із обмеженості елементів матриці $\Delta_j(D)$ випливає нерівність

$$\widehat{\varphi}_k^*\Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k \le \beta_5\widehat{\varphi}_k^*\widehat{\varphi}_k/|\det\Delta_j(k)|^2, \qquad (3.103)$$

де стала β_5 не залежить від k та від φ.

Теорема 3.9 *Якщо* φ *належить до простору* $\mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega^p_{2\pi})$ *і для деякої послідовності* $\{j(k)\}$, *де* $1 \le j(k) \le n$, *виконується умова*

$$|\det\Delta_{j(k)}(k)| \ge \beta_6\widetilde{k}^r, \qquad \beta_6 > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \qquad (3.104)$$

то задача (3.86), (3.87) *має єдиний розв'язок* u *із простору* $\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$.

Доведення. Оцінка $\|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \beta_4\beta_5 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \dfrac{\widetilde{k}^{2(q-nl)}\widehat{\varphi}^*_k\widehat{\varphi}_k}{|\det\Delta_{j(k)}(k)|^2}$ випливає із нерівностей (3.102), (3.103). Тепер із умови (3.104) і теореми 3.8 отримуємо, що $u\in\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, оскільки $\|u;\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)\| \leq \sqrt{\beta_4\beta_5}\beta_6\|\varphi;\mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega^p_{2\pi})\|$.

Теорему доведено. ∎

3.3.3. Оцінки малих знаменників. Вирази $\Delta_j(k)$ є полілінійними функціями елементів матриць $B_1(k),\ldots,B_n(k)$ і нелінійно залежать від елементів матриці $A^0(k)$ та матриці $A^1(t,k)$. Вони, взагалі, є малими знаменниками задачі (3.86), (3.87), які можуть також обертатися в нуль для деяких значень її коефіцієнтів.

Будемо використовувати метричний підхід для отримання оцінок знизу знаменників $|\Delta_j(k)|$, вважаючи фіксованим рівняння (3.86). Елементи векторів $B_{j\alpha s}$ із умови (3.87) належать одиничному кругу $\mathcal{O}$ з центром у початку координат комплексної площини, тобто $B_{j\alpha s}\in\mathcal{O}^n$. Це не обмежує загальності і отримується нормуванням умови (3.87).

Позначимо через $\delta(k)$ матрицю $\Delta_{j(k)}(k)$. Послідовність $j(k)$ виберемо так: $j(k)=1$, якщо $|k_1|=\max\{|k_1|,\ldots,|k_p|\}$, інакше $j(k)=2$, якщо $|k_2|=\max\{|k_1|,\ldots,|k_p|\}$ тощо. Нехай $b_{(m-1)n+j}=B^{\zeta^{(m-1)n+j}}_{1\alpha_m s^{(m-1)n+j}}$, де $j=1,\ldots,n$, $m=1,\ldots,p$, $s^{(m-1)n+j}=(\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1},\theta^{(m-1)n+j},\underbrace{0,\ldots,0}_{p-m})$, $0\leq\theta^{(m-1)n+j}\leq jl$, причому $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}\in\{1,\ldots,M\}^p$, $\{\zeta^{(m-1)n+1},\ldots,\zeta^{mn}\}=\{1,\ldots,n\}$. Визначимо число θ і вектор $\bar{b}$ формулами

$$\theta=\min_{j=1,\ldots,p}\sum_{\sigma=1}^{n}\theta^{(j-1)n+\sigma},\qquad \bar{b}=\mathrm{col}(b^1,\ldots,b^{pn}). \tag{3.105}$$

Вважаємо, що елементи матриці $\delta(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, залежать від компонент $b_1,\ldots,b_{pn}$ вектора $\bar{b}\in\mathcal{O}^{pn}$; інші компоненти векторів $B_{j\alpha s}$ фіксуємо. При цьому матриця $\delta(0)=\Delta_1(0)$ не залежить від $b_1,\ldots,b_{pn}$, тому фіксовані коефіцієнти вибираємо так, щоб $\det\delta(0)\neq 0$.

Лема 3.5 *Для довільних чисел* r *та* ε, *де* $r < \theta - n(p+(n+1)l)/2$, $0<\varepsilon<1$, *існує множина* B_ε *така, що* $\operatorname{meas} B_\varepsilon \le \varepsilon$ *і для всіх векторів* $\bar b \in \mathcal{O}^{pn} \setminus B_\varepsilon$ *виконується нерівність* (3.104), *причому*

$$\beta_6 = \varepsilon^{n/2} \min\Big\{|\det\delta(0)|/\varepsilon^{n/2}, \frac{n^{-n/2}\pi^{-n^2p/2}}{(p+1)^{(\theta^1+\ldots+\theta^n)/2}}\Big(\sum_{k\ne 0}\widetilde{k}^{2(r-\theta)/n+(n+1)l}\Big)^{-n/2}\Big\}.$$

Доведення. Позначимо Ω_k, де $k\ne 0$, підмножину тих векторів $\bar b$ множини $\mathcal{O}^{pn}$, для яких не виконується нерівність (3.104) для фіксованого k.

Очевидно, що $\bigcup\limits_{k\ne 0}\Omega_k = B_\varepsilon$, $\operatorname{meas} B_\varepsilon \le \sum\limits_{k\ne 0}\operatorname{meas}\Omega_k$.

Нехай $k=0$ тоді, очевидно, нерівність (3.104) виконується.

Якщо $k\ne 0$ і $|k_1| = \max\{|k_1|,\ldots,|k_p|\}$, то для $j(k)=\alpha_1$ розкладемо визначник $\det\delta(k)$ за останнім його стовпцем, тоді

$$|\det\delta(k)| = \frac{|k_1|^{\theta^1}}{\widetilde{k}^l}|\det\delta_1(k)b^1 - \check\delta_1(k)| \ge$$
$$\ge \frac{\widetilde{k}^{\theta^1-l}}{(p+1)^{\theta_1/2}}|\det\delta_1(k)|\Big|b^1 - \frac{\check\delta_1(k)}{\det\delta_1(k)}\Big|, \quad (3.106)$$

де матриця $\delta_1(k)$ і функція $\check\delta_1(k)$ не залежать від b^1, а залежать від $b^2,\ldots,b^n$, причому $\delta_1(k)$ отримується із $\delta(k)$ викреслюванням останнього стовпця і рядка з номером ζ^1. Для матриці $\delta_1(k)$, порядку $n-1$ формула (3.106) має вигляд

$$|\det\delta_1(k)| \ge \frac{\widetilde{k}^{\theta^2-2l}}{(p+1)^{\theta_2/2}}|\det\delta_2(k)|\Big|b^2 - \frac{\check\delta_2(k)}{\det\delta_2(k)}\Big|,$$

де матриця $\delta_2(k)$ має порядок $n-2$, не залежать від b^1 та b^2 і отримується з матриці $\delta(k)$ викреслюванням двох останніх стовпців та двох рядків з номерами ζ^1 і ζ^2. Таким способом отримуємо послідовність матриць $\delta_1(k),\ldots,\delta_n(k)$ і нерівностей

$$|\det\delta_{m-1}(k)| \ge \frac{\widetilde{k}^{\theta^m-ml}}{(p+1)^{\theta_m/2}}|\det\delta_m(k)|\Big|b^m - \frac{\check\delta_m(k)}{\det\delta_m(k)}\Big|,$$

де $m=2,\ldots,n$, $\det\delta_n(k)=1$.

Об'єднаємо ці нерівності з (3.106) у нерівність

$$|\det\delta_{m-1}(k)| \ge \frac{\widetilde{k}^{\theta^1+\ldots+\theta^n-n(n+1)l/2}}{(p+1)^{(\theta^1+\ldots+\theta^n)/2}}|\det\delta_m(k)|\prod_{m=1}^{n}\Big|b^m - \frac{\check\delta_m(k)}{\det\delta_m(k)}\Big|. \quad (3.107)$$

Формула (3.107) справджується для тих векторів $\bar{b} \in \mathcal{O}^{pn}$, для яких $\det\delta_1(k)\cdots\det\delta_{n-1}(k) \neq 0$, тобто $\prod\limits_{m=2}^{n}\left|b^m - \dfrac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)}\right| \neq 0.$

Множник $b^m - \check{\delta}_m(k)/\det\delta_m(k)$, $m = 1,\ldots,n$, лінійно залежить від b^m, тому

$$\left|b^m - \frac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)}\right| \geq (p+1)^{(\theta^1+\ldots+\theta^n)/2n}\beta_6^{1/n}\widetilde{k}^{(r-\theta)/n+(n+1)l/2} \tag{3.108}$$

для всіх b^m із множини $\mathcal{O} \setminus \Omega_k^m(b^1,\ldots,b^{(m-1)},b^{(m+1)},\ldots,b^n)$, де $\Omega_k^m(b^1,\ldots,b^{(m-1)},b^{(m+1)},\ldots,b^n) \subset \Omega_k^m$, $\Omega_k^m \subset \mathcal{O}^{np}$ — множина векторів $\bar{b}$, для яких не виконується нерівність (3.108), $\Omega_k^m(b^1,\ldots,b^{(m-1)},b^{(m+1)},\ldots,b^n)$ — підмножина Ω_k^m з фіксованими значеннями $b^1,\ldots,b^{(m-1)},b^{(m+1)},\ldots,b^n$.

Множина $\Omega_k^m(b^1,\ldots,b^{(m-1)},b^{(m+1)},\ldots,b^n)$ — підмножина множини, яка є перетином множини $\mathcal{O}$ та круга радіуса $(p+1)^{(\theta^1+\ldots+\theta^n)/2n}\beta_6^{1/n}\widetilde{k}^{(r-\theta)/n+(n+1)l/2}$ з центром у точці $\check{\delta}_m(k)/\det\delta_m(k)$, тому

$$\operatorname{meas}\Omega_k^m(b^1,\ldots,b^{(m-1)},b^{(m+1)},\ldots,b^n) \leq \pi(p+1)^{(\theta^1+\ldots+\theta^n)/n}\beta_6^{2/n}\widetilde{k}^{2(r-\theta)/n+(n+1)l}.$$

Інтегруючи останню нерівність за змінними $b^1,\ldots,b^{(m-1)},b^{(m+1)},\ldots,b^n$ в області $\mathcal{O}^{np-1}$ отримаємо таку оцінку зверху для міри множини Ω_k^m: $\operatorname{meas}\Omega_k^m \leq \pi^{np}(p+1)^{(\theta^1+\ldots+\theta^n)/n}\beta_6^{2/n}\widetilde{k}^{2(r-\theta)/n+(n+1)l}$. На множині $\mathcal{O}^{np} \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{n}\Omega_k^m$ нерівність (3.108) виконується для всіх $m = 1,\ldots,n$, отже $\Omega_k \subset \bigcup\limits_{m=1}^{n}\Omega_k^m$ і

$$\operatorname{meas}\Omega_k \leq n\pi^{np}(p+1)^{(\theta^1+\ldots+\theta^n)/n}\beta_6^{2/n}\widetilde{k}^{2(r-\theta)/n+(n+1)l}. \tag{3.109}$$

Для векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k_1| < |k_2| = \max\{|k_1|,\ldots,|k_p|\}$, також виконується оцінка (3.109). Її отримуємо встановлюючи оцінку (3.107) використовуючи вектор $(b^{n+1},\ldots,b^{2n})$ та приймаючи $j(k) = \alpha_2$. Аналогічно встановлюється оцінка (3.109) для всіх інших векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Підставляючи нерівність (3.108) у (3.107) і враховуючи (3.105) отримуємо шукану нерівність (3.104). Із нерівності (3.109) випливає

$$\operatorname{meas}B_\varepsilon \leq n\pi^{np}(p+1)^{(\theta^1+\ldots+\theta^n)/n}\beta_6^{2/n}\sum_{k\neq 0}\widetilde{k}^{2(r-\theta)/n+(n+1)l}.$$

Лему доведено. ■

Із леми 3.5 і теореми 3.9 випливає основний результат цього підрозділу.

Теорема 3.10 *Якщо* $0 < \varepsilon < 1$, $r > n(p + (n+1)l)/2$, $\varphi \in \mathbf{H}_{q-nl-\theta+r}(\Omega^p_{2\pi})$, *то для майже всіх векторів* $\bar{b} \in \mathcal{O}^{pn}$ *існує єдиний розв'язок* $u \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ *задачі* (3.86), (3.87) *і для всіх векторів* $\bar{b} \in \mathcal{O}^{pn} \setminus B_\varepsilon$ *виконується нерівність*

$$\varepsilon^n \|u; \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \beta_7 \|\varphi; \mathbf{H}_{q-nl-\theta+r}(\Omega^p_{2\pi})\|^2,$$

де B_ε *— множина з попередньої леми,* β_7 *— додатна стала.*

Доведення. Якщо $\bar{b} \in \mathcal{O}^{pn} \setminus B_\varepsilon$, то, згідно з лемою 3.5, виконується нерівність (3.104) з відповідною сталою β_6. Далі використовуємо твердження теореми 3.9 про існування розв'язку. ■

3.4. Висновки

Багатоточкова нелокальна задача (3.1), (3.2) для рівняння коливання струни зі змінним коефіцієнтом розв'язна у просторах Соболєва скінченного порядку, як і у випадку сталого коефіцієнта. Це пояснюється строгою гіперболічністю рівняння (власні значення ρ_k і $-\rho_k$, де $\rho_k = i\|k\|a(t) \neq 0$ при $k \neq 0$), а, отже, існуванням заміни з використанням матриць із власних векторів, які є невиродженими та неперервно диференційовними за t матрицями. За допомогою такої заміни система диференціальних рівнянь (3.6) зводиться до системи диференціальних рівнянь (3.9). Ця заміна незастосовна у випадку нестрого гіперболічних рівнянь у зв'язку з виродженням відповідних матриць. У випадку негіперболічного рівняння оцінки відповідних фундаментальних матриць можуть бути експоненціального типу, тому розв'язки багатоточкових нелокальних задач для таких рівнянь взагалі не належать до шкали просторів Соболєва.

Таким чином, в рамках метричного підходу задача із загальними двоточковими нелокальними умовами (3.54) для гіперболічного рівняння другого порядку (3.53) з неперервними за t коефіцієнтами є розв'язною у шкалі соболєвських просторів періодичних за змінною x функцій. Нелокальні задачі для безтипних рівнянь зі сталими коефіцієнтами також володіють цією властивістю на противагу до рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами. Отримані у цьому підрозділі результати поширені на гіперболічні рівняння вищого порядку, які розглянуті у третьому підрозділі.

Встановлено, що задача із загальними багатоточковими нелокальними умовами для строго гіперболічних рівнянь високого порядку з неперервними за t коефіцієнтами є розв'язною у шкалі просторів Соболєва періодичних за змінною x функцій для майже всіх коефіцієнтів крайових умов.

Отримані результати можна поширити на випадки змінних коефіцієнтів у головній частині рівняння та на гіперболічні системи.

РОЗДІЛ 4
ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

4.1. Задача з інтегральними умовами для рівняння другого порядку за t

В області, що є декартовим добутком відрізка $[0,T]$ і p-вимірного тора $\Omega_{2\pi}^p$, досліджено нелокальну задачу зі загальними інтегральними умовами для строго гіперболічного (хвильового) рівняння $u_{tt} = a^2\Delta u$, де $a = a(t) > 0$ — неперервно диференційовна на відрізку $[0,T]$ функція, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{p} \partial^2/\partial x_j^2$ — оператор Лапласа.

Задача є некоректною за Адамаром і пов'язана з проблемою малих знаменників. За допомогою метричного підходу та використання ізоморфізму просторів доведено теорему про оцінки знизу малих знаменників. На основі таких оцінок отримано умови існування та єдиності розв'язку задачі у просторах Соболєва періодичних за змінними $x_1, \dots, x_p$ функцій.

Вступ Задачі з інтегральними нелокальними умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними досліджено багатьма авторами. Зокрема, в роботах [15, 138] вивчено властивості розв'язків та коректність таких задач у деяких функціональних просторах у шарі $[0,T]\times\mathbb{R}^p$. Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення розглянуто в [62, 63, 162].

У роботах [125, 126] вивчено задачі з інтегральними умовами для диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами у шкалах просторів Соболєва періодичних за просторовими змінними функцій. Ці задачі є некоректними за Адамаром, а умови їх розв'язності пов'язані з проблемою оцінювання знизу малих знаменників, які виникають в рядах Фур'є, що зображають формальні розв'язки цих задач.

Проблему малих знаменників вирішено на основі метричного підходу [77, 112, 113]. У рамках цього підходу розглядається не окрема задача, а множина задач. Елементами цієї множини є задачі із фіксованими даними (коефіцієнтами диференціальних рівнянь, коефіцієнтами крайових умов чи іншими параметрами), які утворюють певну область у просторі даних. Існування та єдиність розв'язку у відповідній шкалі просторів доведено для майже всіх (за мірою Лебега) точок згадуваної області або для всіх точок підобласті, міра якої відрізняється від міри області на довільне мале число.

Для рівнянь зі змінними коефіцієнтами існують приклади нелокальних задач, які не є розв'язними у шкалі просторів Соболєва. Зокрема, нелокальна задача з інтегральною умовою для одного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} - \cos t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0, 2\pi) \times \Omega^1_{2\pi},$$

$$\int_0^{2\pi} u(\tau, x)\, d\tau = \varphi(x), \quad x \in \Omega^1_{2\pi},$$

де $\varphi(x) \notin \mathbf{H}_q(\Omega^1_{2\pi})$ для деякого дійсного q, $2\pi\alpha$ — довільне ірраціональне число, має єдиний розв'язок.

Він визначається за формулою

$$u(t, x) = iaD\exp(iaDt + \sin t \cdot D^2)\big(e^{i2\pi aD} - 1\big)^{-1}\varphi(x),$$

де $D = -i\partial/\partial x$, але для всіх дійсних чисел q маємо $u(\pi/2, \cdot) \notin \mathbf{L}_2(\Omega^1_{2\pi})$.

В даному підрозділі показано, що для строго гіперболічних рівнянь задача із загальними лінійними інтегральними умовами розв'язна у просторах Соболєва. Розглянуто інтегральну задачу для рівняння типу коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(t)\Delta u.$$

Встановлено оцінки знизу для малих знаменників, які виникли при дослідженні задачі, та гладкість і оцінку норми розв'язку задачі у просторах Соболєва.

4.1.1. Постановка задачі Позначимо p-вимірний тор змінної $x = (x_1, \ldots, x_p)$ через $\Omega_{2\pi}^p$, циліндричну область змінних t та x – через $\mathcal{D}^p$, а саме $\Omega_{2\pi}^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $\mathcal{D}^p = [0,T] \times \Omega_{2\pi}^p$.

В області $\mathcal{D}^p$ розглядається строго гіперболічне (хвильове) рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u = 0 \tag{4.1}$$

й інтегральні умови

$$\int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau,\cdot) \\ \partial u/\partial t(\tau,\cdot) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_p^2}$, $a(t) > 0$ та неперервно диференційовна на відрізку $[0,T]$ функція, коефіцієнти b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} — комплексні інтегровні на $[0,T]$ функції, модуль інтеграла від яких не перевищує одиницю:

$$\max_{\alpha,\beta=1,2} \left| \int_0^T b_{\alpha,\beta}(\tau)\, d\tau \right| \leq 1.$$

Функції $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ є заданими 2π-періодичними функціями, а функція $u = u(t,x)$ є шуканим 2π-періодичним розв'язком задачі (4.1), (4.2).

Для довільного дійсного числа q введемо простір 2π-періодичних функцій $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, який є поповненням множини многочленів $\varphi(x) = \sum\limits_k \widehat{\varphi}(k)e^{ikx}$ за нормою $\|\varphi; \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q}|\widehat{\varphi}(k)|^2$, де $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $kx = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$, $\widetilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \cdots + k_p^2}$. Простори $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$ утворюють шкалу просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}$ за змінною $q \in \mathbb{R}$.

Вивчається питання розв'язності задачі (4.1), (4.2) у шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, а саме, встановлюються умови, за яких задача (4.1), (4.2) має розв'язок u, який для всіх значень $t \in [0,T]$ разом із похідною по t належить до шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ для довільних елементів φ_1 та φ_2 із цієї шкали.

Означення 4.1.*Розв'язком задачі* (4.1), (4.2) *із шкали* $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ *називаємо двічі неперервно диференційовну на інтервалі* $[0,T]$ *функцію* u *таку,* *що для кожного* $t \in [0,T]$ *елементи* $u(t,\cdot)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)$ *належать до шкали* $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, *і* u *задовольняє рівняння* (4.1) *та умови* (4.2) *у слабкому сенсі, тобто для всіх* $t \in [0,T]$ *та для всіх тригонометричних многочленів* $w = w(x)$ *виконуються рівності*

$$\int_{\Omega_{2\pi}^p} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u\Big) w\,dx = 0,$$

$$\int_{\Omega_{2\pi}^p} \left[\int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau)\end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau,\cdot) \\ \partial u/\partial t(\tau,\cdot)\end{pmatrix} d\tau - \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}\right] w\,dx = 0.$$

Зауважимо, якщо функція u є розв'язком задачі (4.1), (4.2) і $u \in \mathbf{H}_\sigma(\Omega_{2\pi}^p)$, то справджується включення $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega_{2\pi}^p)$, причому

$$\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\cdot); \mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega_{2\pi}^p)\Big\| \le a(t)\|u; \mathbf{H}_\sigma(\Omega_{2\pi}^p)\|.$$

4.1.2. Побудова та оцінка розв'язку Введемо вектор-функції

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \partial u/\partial t\end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix} \tag{4.3}$$

і запишемо задачу (4.1), (4.2) у векторно-матричному вигляді

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2(t)\Delta & 0\end{pmatrix} U, \tag{4.4}$$

$$\int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau)\end{pmatrix} U(\tau,x)\,d\tau = \varphi(x). \tag{4.5}$$

Якщо вектор-функція $U(t,x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} U_k(t)e^{ikx}$, а вектор-функція $\varphi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\varphi}(k)e^{ikx}$, де $U_k(t) = \begin{pmatrix} U_{k1}(t) \\ U_{k2}(t)\end{pmatrix}$, $\quad \widehat{\varphi}(k) = \begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1(k) \\ \widehat{\varphi}_2(k)\end{pmatrix}$, то, згідно з означенням 4.1, вектор-функція $U_k = U_k(t)$ є розв'язком нелокальної задачі

$$\frac{dU_k}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(t)\|k\|^2 & 0\end{pmatrix} U_k, \tag{4.6}$$

$$\int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix} U_k(\tau)\, d\tau = \widehat{\varphi}(k), \tag{4.7}$$

причому $\|k\|^2 = \widetilde{k}^2 - 1 = k_1^2 + \dots + k_p^2$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

Із рівностей $u_k(t) = U_{k1}(t)$, $\dfrac{du_k}{dt}(t) = U_{k2}(t)$ випливає, що розв'язок задачі (4.1), (4.2) має вигляд $u(t,x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} U_{k1}(t)e^{ikx}$, $\dfrac{du}{dt}(t,x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} U_{k2}(t)e^{ikx}$.

Якщо $k \neq 0$, то матриця системи (4.6)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(t)\|k\|^2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho_k^2(t) & 0 \end{pmatrix},$$

де $\rho_k(t) = ia(t)\|k\|$, має два прості уявні власні значення $\rho_k(t)$ та $-\rho_k(t)$.

При $k = 0$ власні значення $\pm\rho_k(t)$ збігаються, а матриця системи (4.6) має вигляд $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тобто $\dfrac{dU_{k1}}{dt} = U_{k2}$, $\dfrac{dU_{k2}}{dt} = 0$. Загальний розв'язок цієї системи диференціальних рівнянь $U_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix}$ при підстановці в умову (4.7) дає систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \int\limits_0^T b_{11}(\tau)\, d\tau & \int\limits_0^T \big(\tau b_{11}(\tau) + b_{12}(\tau)\big)\, d\tau \\ \int\limits_0^T b_{21}(\tau) d\tau & \int\limits_0^T \big(\tau b_{21}(\tau) + b_{22}(\tau)\big)\, d\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1(0) \\ \widehat{\varphi}_2(0) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

для визначення сталих C_{01} і C_{02}. Визначник $\det \Delta(0)$ матриці $\Delta(0)$ системи (4.8) має вигляд

$$\int\limits_0^T b_{11}(\tau)\, d\tau \int\limits_0^T b_{22}(\tau)\, d\tau - \int\limits_0^T b_{21}(\tau)\, d\tau \int\limits_0^T b_{12}(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^T b_{11}(\tau)\, d\tau \int\limits_0^T \tau b_{21}(\tau)\, d\tau - \int\limits_0^T b_{21}(\tau)\, d\tau \int\limits_0^T \tau b_{11}(\tau)\, d\tau.$$

Якщо $\det \Delta(0) = 0$, то система (4.8) не має розв'язку або має безліч розв'язків, якщо ж $\det\Delta(0)\neq 0$, то система (4.8) має єдиний розв'язок

$$\begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix} = \Delta^{-1}(0)\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1(0) \\ \widehat{\varphi}_2(0) \end{pmatrix}.$$

Якщо $k\neq 0$, а отже $\rho_k(t)\neq 0$ на $[0,T]$, то маємо для матриці системи (4.6) таку факторизацію:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho_k^2(t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & -\rho_k(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}^{-1},$$

причому

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix} = -2\rho_k(t), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \rho_k^{-1}(t) \\ 1 & -\rho_k^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Зробимо заміну шуканих вектор-функцій $U_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix} Z_k(t)$, тоді нова шукана вектор-функція $Z_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_k^{-1}(t) \\ 1 & -\rho_k^{-1}(t) \end{pmatrix}\dfrac{U_k(t)}{2}$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dZ_k}{dt} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{d\rho_k(t)}{dt}Z_k = \begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & -\rho_k(t) \end{pmatrix} Z_k.$$

Враховуючи, що $\dfrac{d\rho_k(t)}{dt} = ia'(t)\|k\|$, маємо таку задачу для знаходження функції Z_k:

$$\frac{dZ_k}{dt}=\rho_k(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Z_k + \frac{a'(t)}{2a(t)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Z_k, \tag{4.9}$$

$$\int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(\tau) & -\rho_k(\tau) \end{pmatrix} Z_k(\tau)\,d\tau = \widehat{\varphi}(k). \tag{4.10}$$

Розв'язок задачі існує, єдиний і має вигляд

$$Z_k(t) = Y_k(t)\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k) \tag{4.11}$$

при виконанні умови

$$\det \Delta(k) \neq 0, \tag{4.12}$$

де $Y_k(t)$ – нормальна в точці $t = 0$ фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (4.9), матриця $\Delta(k)$ визначається формулою

$$\Delta(k) = \int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(\tau) & -\rho_k(\tau) \end{pmatrix} Y_k(\tau)\, d\tau. \tag{4.13}$$

Нехай $\|A\|$ позначає евклідову норму матриці A, тобто $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$, де A^* — ермітово спряжена з матрицею A матриця, tr B — слід матриці B. Оцінки зверху норми $\|Y_k\|$ фундаментальної матриці $Y_k = Y_k(t)$ наведено у наступних трьох лемах [71, 72] (див. підрозділ 3.1.).

Лема 4.1 *Якщо функція $a(t)$ є сталою на проміжку $[0, T]$, то функція $\|Y_k\|$ є також сталою на цьому проміжку, причому $\|Y_k(t)\| = \|Y_k(0)\| = \sqrt{2}$.*

Нехай похідна $a'(t)$ змінює на $[0, T]$ свій знак $l - 1$ раз, де $l \in \mathbb{N}$, і $t_0 = 0$, $t_l = T$, тоді існують числа $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$ та при $l \geq 2$ числа $t_1, t_2, \ldots, t_{l-1}$ такі, що для $j = 1, \ldots, l$ виконуються нерівності $t_{j-1} < \tau_j < t_j$, на проміжку $[t_{j-1}, t_j]$ функція $a'(t)$ не змінює знак і для $j = 1, \ldots, l-1$ виконуються умови $a'(\tau_j)a'(\tau_{j+1}) < 0$, $a'(t_j) = 0$. Позначимо через A_j, $j = 0, 1, \ldots, l$, значення функції $a(t)$ у точці t_j: $A_j = a(t_j)$.

Лема 4.2 *Нехай похідна $a'(t)$ функції $a(t)$ на проміжку $[0, T]$ змінює свій знак $l - 1$ раз, $l \in \mathbb{N}$, тоді на проміжках $[t_{j-1}, t_j] \subset [0, T]$ справджуються такі оцінки для фундаментальної матриці системи диференціальних рівнянь (4.9):*

$$\frac{A_{2s-2}}{a(t)} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-2}}{A_{2j-1}} \leq \frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}} \leq \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}}, \tag{4.14}$$

якщо $t \in [t_{2s-2}, t_{2s-1}]$ і $a'(\tau_1) > 0$,

$$\prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}} \leq \frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}} \leq \frac{A_{2s-2}}{a(t)} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-2}}{A_{2j-1}}, \tag{4.15}$$

якщо $t \in [t_{2s-2}, t_{2s-1}]$ *і* $a'(\tau_1) < 0$,

$$\prod_{j=1}^{s} \frac{A_{2j-2}}{A_{2j-1}} \le \frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}} \le \frac{A_{2s-1}}{a(t)} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}}, \tag{4.16}$$

якщо $t \in [t_{2s-1}, t_{2s}]$ *і* $a'(\tau_1) > 0$,

$$\frac{A_{2s-1}}{a(t)} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}} \le \frac{||Y_k(t)||}{\sqrt{2}} \le \prod_{j=1}^{s} \frac{A_{2j-2}}{A_{2j-1}}, \tag{4.17}$$

якщо $t \in [t_{2s-1}, t_{2s}]$ *і* $a'(\tau_1) < 0$. *У формулах* (4.14)–(4.17) *вважаємо* $\prod\limits_{j=1}^{s-1} \cdots =$ 1, *якщо* $s = 1$.

Нехай $A = A_{\max}/A_{\min} > 1$, де $A_{\max} = \max\limits_{t\in[0,T]} a(t)$, $A_{\min} = \min\limits_{t\in[0,T]} a(t)$, тобто число A визначає розмах коливань $a(t)$, J — ціла частина числа $(l+1)/2$.

Лема 4.3 *На проміжку* $[0, t_{2j}] \subset [0, T]$ *справджуються оцінки*

$$A^{-j} \le \frac{\|Y_k(t)\| a(t)}{\sqrt{2} A_0} \le A^{j}, \tag{4.18}$$

а на проміжку $[0, T]$ – *оцінки*

$$A^{-J} \le \frac{\|Y_k(t)\| a(t)}{\sqrt{2} A_0} \le A^{J}. \tag{4.19}$$

4.1.3. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі За допомогою оцінок (4.18) та (4.19) встановимо достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (4.1), (4.2) у шкалі просторів Соболєва.

Теорема 4.1 *Якщо коефіцієнти Фур'є* $\widehat{\varphi}(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *вектор-функції* φ *задовольняють умову*

$$\left\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\| \le C_1 \widetilde{k}^{\sigma}, \tag{4.20}$$

де $C_1 > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ – *деякі сталі, які не залежить від вектора* k, *то у шкалі просторів Соболєва існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі* (4.1), (4.2) *такий, що для всіх* $t \in [0, T]$

$$u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_{2\pi}^p), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1 - 1}(\Omega_{2\pi}^p), \tag{4.21}$$

де $\sigma_1 < -\sigma - p/2$.

Доведення. Із формули (4.11) отримаємо рівність

$$\begin{pmatrix}\rho_k(t) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} U_k(t) = \begin{pmatrix}\rho_k(t) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho_k(t) & -\rho_k(t)\end{pmatrix} Y_k(t)\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k) =$$
$$= i\|k\|a(t)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} Y_k(t)\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k),$$

з якої, переходячи до норм, маємо скалярну рівність

$$\big(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\big)^{1/2} = \sqrt{2}\|k\|a(t)\cdot\big\|Y_k(t)\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\big\|.$$

Оцінюючи норму справа знайдемо

$$\big(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\big)^{1/2} \le \sqrt{2}\|k\|a(t)\cdot\|Y_k(t)\|\cdot\big\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\big\|.$$

Використовуючи формулу (4.19) отримаємо для всіх $t\in[0,T]$ таку нерівність:

$$\big(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\big)^{1/2} \le 2\|k\|A_0A^J\cdot\big\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\big\|, \tag{4.22}$$

або, враховуючи формулу (4.20), — нерівність

$$\big(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\big)^{1/2} \le 2C_1A_0A^J\widetilde{k}^{\sigma+1}. \tag{4.23}$$

Оскільки для всіх векторів $k\neq 0$ виконуються нерівності $\widetilde{k}^2\le 2\|k\|^2$ і

$$\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2 \le 2A_{\min}^{-2}\big(a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\big), \tag{4.24}$$

$$\Big|\frac{du_k(t)}{dt}\Big|^2 \le a^2(t)\|k\|^2|U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2, \tag{4.25}$$

то з нерівностей (4.23)–(4.25) випливають нерівності

$$\widetilde{k}^{2\sigma_1}|u_k(t)|^2 \le \frac{8C_1^2A_0^2A^{2J}}{A_{\min}^2}\widetilde{k}^{\sigma_2}, \quad \widetilde{k}^{2\sigma_1-2}\Big|\frac{du_k(t)}{dt}\Big|^2 \le 4C_1^2A_0^2A^{2J}\widetilde{k}^{\sigma_2},$$

де $\sigma_2 = 2(\sigma_1+\sigma) < -p$. Обчислюючи норми розв'язку u та його похідної $\partial u/\partial t$, отримаємо незалежні від t оцінки

$$\|u;\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le |u_0(t)|^2 + \frac{8C_1^2A_0^2A^{2J}}{A_{\min}^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{\sigma_2} < \infty,$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t};\mathbf{H}_{\sigma_1-1}(\Omega^p_{2\pi})\right\|^2 \le \left|\frac{du_0(t)}{dt}\right|^2 + 4C_1^2A_0^2A^{2J}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{\sigma_2} < \infty,$$

які завершують доведення теореми. ■

Умови (4.20) теореми 1 пов'язані з правими частинами φ_1 і φ_2 нелокальних умов (4.2). Для одних правих частин вони виконуються, а для інших не виконуються, крім того нема залежності числа σ від гладкості цих правих частин. Для встановлення розв'язності задачі (4.1), (4.2) у шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\}_{q\in\mathbb{R}}$ дослідимо умови, за яких виконуються нерівності (4.20) зразу для всіх функцій φ_1 та φ_2 із певного простору шкали $\{\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\}_{q\in\mathbb{R}}$.

Для цього на основі нерівності (4.19) випишемо таку оцінку для лівої частини нерівності (4.20) через норму правої частини $\widehat{\varphi}(k)$ умов (4.7):

$$\left\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\right\| \le \frac{C_2\widetilde{k}}{|\det\Delta(k)|}\|\widehat{\varphi}(k)\|, \tag{4.26}$$

де додатна стала C_2 не залежить від k та $\widehat{\varphi}(k)$, $k\in\mathbb{R}^p$.

4.1.4. Дослідження малих знаменників Наступним кроком після встановлення оцінки (4.26) є встановлення оцінок знизу виразів $|\det\Delta(k)|$, $k\in\mathbb{Z}^p$, які залежать від функцій $b_{11}(t)$, $b_{12}(t)$, $b_{21}(t)$, $b_{22}(t)$. Вважаємо, що ці функції абсолютно інтегровні, тобто належать до простору $\mathbf{L}_1(0,T)$.

Позначимо B_{ij} середнє значення функції b_{ij}, а саме $B_{ij} = \frac{1}{T}\int_0^T b_{ij}(\tau)\,d\tau$, тоді, визначена формулою $b^0_{ij}(t) = b_{ij}(t) - B_{ij}$, функція b^0_{ij} має нульове середнє значення, $\frac{1}{T}\int_0^T b^0_{ij}(\tau)\,d\tau = 0$, а також $b_{ij} = B_{ij} + b^0_{ij}$ де $(B_{ij}, b^0_{ij}) \in \mathbb{R}\times\mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$, причому $\mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$ означає підпростір функцій із простору $\mathbf{L}_1(0,T)$, що мають нульове середнє значення.

Отже, простір $\mathbf{L}_1(0,T)$ є ізоморфним декартовому добутку $\mathbb{R}\times\mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$, а саме, він є прямою сумою відповідних просторів: $\mathbf{L}_1(0,T) = \mathbb{R}\oplus\mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$.

Такі ізоморфізми просторів і декартових добутків широко використовуються для дослідження функціонально-диференціальних рівнянь [3, с. 15].

Вектор $\alpha = (B_{11}, B_{22}) \in \mathcal{O}^2$, де $\mathcal{O}$ – одиничний круг з центром у початку координат комплексної площини, вважаємо вектором параметрів задачі

(4.1), (4.2), а функції b_{11}^0, b_{12}, b_{21}, b_{22}^0 фіксуємо.

Якою б малою не була (наперед задана фіксована) функція $\chi(k)$, знайдеться такий вектор $\alpha \in \mathcal{O}^2$, що безліч разів виконується нерівність $|\det\Delta(k)| < \chi(k)$. Знаменники з такими властивостями мають назву малих знаменників. Вирішення проблеми малих знаменників, тобто встановлення для них оцінки знизу, є задачею метричної теорії діофантових наближень, в основі якої покладено метричний підхід до розглядуваних задач.

Малі знаменники виникають при дослідженні різних задач для диференціальних та диференціально-операторних рівнянь, а також задач в інших галузях математики [77,112,113]. Ці задачі, як правило, є некоректними (умовно коректними). Для встановлення оцінок знизу знаменників у формулі (4.26), також використаємо метричний підхід. Використовуємо позначення $\operatorname{meas}\Lambda$, де $\Lambda \subset \mathcal{O}^2$, для позначення міри множини Λ. Ця міра індукується мірою Лебега у просторі $\mathbb{R}^4$.

Якщо $b_{jj} = B_{jj} + b_{jj}^0$, $j = 1, 2$, то умови (4.2) записуються у вигляді

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \int_0^T \begin{pmatrix} u(\tau,\cdot) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\tau,\cdot) \end{pmatrix} d\tau + \\ + \int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}^0(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}^0(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau,\cdot) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\tau,\cdot) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

а матриця (4.13) при $k \neq 0$ є сумою двох матриць, тобто

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \Delta_1(k) + \Delta_2(k), \tag{4.27}$$

де матриці $\Delta_1(k)$ і $\Delta_2(k)$ не залежать від параметрів B_{11} та B_{22} і визначаються такими формулами: $\Delta_1(k) = \displaystyle\int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(\tau) & -\rho_k(\tau) \end{pmatrix} Y_k(\tau)\, d\tau$,

$$\Delta_2(k) = \int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}^0(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}^0(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(\tau) & -\rho_k(\tau) \end{pmatrix} Y_k(\tau)\, d\tau.$$

При $k=0$ маємо також рівність (4.27), причому

$$\Delta_1(0)=\begin{pmatrix} T & T^2/2 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad \Delta_2(0)=\begin{pmatrix} 0 & \int\limits_0^T \tau b_{11}^0(\tau)\,d\tau + B_{12} \\ B_{21} & \int\limits_0^T \tau b_{21}(\tau)\,d\tau \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.2 *Нехай для деяких дійсних сталих $C_3>0$ та r_1 для всіх векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується умова*

$$|\det\Delta_1(k)|\geq C_3^{-1}\widetilde{k}^{-r_1}, \tag{4.28}$$

тоді для довільних дійсних чисел r_2, $r_2>p$, та ε, $0<\varepsilon<1$, а також для всіх векторів $\alpha\in\mathcal{O}^2\setminus B_\varepsilon$ і для всіх векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\det\Delta(k)|\geq \frac{\varepsilon}{C_3C_4(r_2)}\widetilde{k}^{-r_1-r_2}, \tag{4.29}$$

де B_ε – деяка множина з мірою Лебега $\operatorname{meas} B_\varepsilon\leq\varepsilon$, стала $C_4(r_2)$ визначається за формулою $C_4(r_2)=2\pi^2\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{-r_2}$.

Доведення. Позначимо через $B(k)$ множину тих векторів $\alpha\in\mathcal{O}^2$, які при фіксованому $k\in\mathbb{Z}^p$ задовольняють оцінку, протилежну до (4.29), а саме

$$|\det\Delta(k)|/|\det\Delta_1(k)|<d^2(k)\equiv\frac{\varepsilon}{C_4(r_2)}\widetilde{k}^{-r_2}, \tag{4.30}$$

де $d(k)=\sqrt{\varepsilon/C_4(r_2)}\ \widetilde{k}^{-r_2/2}$. Згідно з формулою (4.27), отримаємо таку факторизацію:

$$\det\Delta(k)/\det\Delta_1(k)=\big(B_{11}+\Delta^{11}(k)\big)\Big(B_{22}+\Delta^{22}(k)-\frac{\Delta^{12}(k)\Delta^{21}(k)}{B_{11}+\Delta^{11}(k)}\Big), \tag{4.31}$$

де $\begin{pmatrix}\Delta^{11}(k) & \Delta^{12}(k)\\ \Delta^{21}(k) & \Delta^{22}(k)\end{pmatrix}=\Delta_2(k)\Delta_1^{-1}(k)$. Розглянемо множину тих чисел $B_{11}\in\mathcal{O}$, для яких виконується нерівність

$$|B_{11}+\Delta^{11}(k)|<d(k) \tag{4.32}$$

при фіксованому елементу B_{22} вектора $\alpha\in\mathcal{O}^2$. Ця множина є частиною круга радіуса $d(k)$, тому її міра менша, ніж площа $\pi d^2(k)$ цього круга. Інтегруючи по змінній B_{22} на множині $\mathcal{O}$, отримуємо оцінку $\operatorname{meas} B'(k) < \pi^2 d^2(k)$, де $B'(k)$ – множина векторів $\alpha \in \mathcal{O}^2$, для яких виконується нерівність (4.32).

Розглянемо множину тих чисел B_{22}, для яких, при фіксованому елементі B_{11} вектора $\alpha \in \mathcal{O}^2 \setminus B'(k)$, виконується нерівність

$$\left| B_{22} + \Delta^{22}(k) - \frac{\Delta^{12}(k)\Delta^{21}(k)}{B_{11} + \Delta^{11}(k)} \right| < d(k), \tag{4.33}$$

Ця множина також має міру меншу, ніж число $\pi d^2(k)$, тому множина $B''(k)$ тих $\alpha \in \mathcal{O}^2 \setminus B'(k)$, для яких виконується нерівність (4.33), має міру $\operatorname{meas} B''(k) < \pi^2 d^2(k)$.

Якщо $\alpha \notin B'(k) \cup B''(k)$, то виконуються протилежні до нерівностей (4.32) і (4.33) нерівності, а отже, згідно з формулою (4.31), не виконується оцінка (4.30), тому із формули (4.28) випливає нерівність (4.29), тобто $B(k) \subset B'(k) \cup B''(k)$ і справджується нерівність

$$\operatorname{meas} B(k) < 2\pi^2 d^2(k) = \frac{2\pi^2 \varepsilon}{C_4(r_2)} \widetilde{k}^{-r_2}. \tag{4.34}$$

На множині $\mathcal{O}^2 \setminus B(k)$ функція $|\det \Delta(k)|$ вектора α задовольняє умову (4.29) для фіксованого ненульового цілочислового вектора k, а на множині

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p} \big(\mathcal{O}^2 \setminus B(k)\big) = \mathcal{O}^2 \setminus B_\varepsilon, \qquad B_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p} B(k),$$

де

$$\operatorname{meas} B_\varepsilon \le \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{meas} B(k) < 2\pi^2 \varepsilon C_4^{-1}(r_2) \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{-r_2} = \varepsilon,$$

оцінка (4.29) виконується для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. ■

Тепер із отриманої нерівності (4.29) та формули (4.26) маємо нерівність

$$\left\| \Delta^{-1}(k) \widehat{\varphi}(k) \right\| \le \varepsilon^{-1} C_5'(r_2) \widetilde{k}^{1+r_1+r_2} \|\widehat{\varphi}(k)\|, \tag{4.35}$$

де $C_5'(r_2) = C_2 C_3 C_4(r_2)$. Її застосовуємо при доведенні наступної теореми.

Теорема 4.3 *Якщо виконується умова* (4.28)*, то для довільної пари чисел* $r_2 > p$ *і* $0 < \varepsilon < 1$ *існує така множина* B_ε*, міра якої* $\operatorname{meas} B_\varepsilon < \varepsilon$*, що для* *всіх функцій* $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega^p_{2\pi})$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega^p_{2\pi})$ *існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі* (4.1), (4.2), *причому* $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_1(\Omega^p_{2\pi})$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi})$ *для всіх векторів* α *із множини* $\mathcal{O}^2 \setminus B_\varepsilon$, *а також виконується нерівність*

$$\varepsilon \cdot \max_{t\in[0,T]} \left\{ \|u(t,\cdot);\mathbf{H}_1(\Omega^p_{2\pi})\|, \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot);\mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi})\right\|\right\} \le C_5\|\varphi;\mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega^p_{2\pi})\|, \tag{4.36}$$

де $C_5 = C_5'(r_2)\max\left\{\sqrt{2+T^2}, 2\sqrt{2}A_0A^JA^{-1}_{\min}, 2A_0A^J\right\}$, *число* $l-1$ *означає кількість змін знаку функції* $a'(t)$ *на проміжку* $[0,T]$, J – *ціла частина числа* $(l+1)/2$, $A = A_{\max}/A_{\min}$.

Доведення. Для ненульових векторів k із формул (4.22), (4.24), (4.25) маємо наступні нерівності:

$$\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2 \le 8\widetilde{k}^2A_0^2A^{2J}A^{-2}_{\min}\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\|^2,$$

$$\left|\frac{du_k(t)}{dt}\right|^2 \le 4\widetilde{k}^2A_0^2A^{2J}\|\Delta^{-1}(k)\widehat{\varphi}(k)\|^2.$$

Далі використовуємо нерівність (4.35) для отримання остаточних нерівностей

$$\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2 \le \frac{8A_0^2A^{2J}C_5'^2(r_2)}{\varepsilon^2A^2_{\min}}\widetilde{k}^{4+2r_1+2r_2}\|\widehat{\varphi}(k)\|^2,$$

$$\left|\frac{du_k(t)}{dt}\right|^2 \le \frac{4A_0^2A^{2J}C_5'^2(r_2)}{\varepsilon^2}\widetilde{k}^{4+2r_1+2r_2}\|\widehat{\varphi}(k)\|^2.$$

Із формул (4.8) та (4.35) випливає нерівність

$$\max_{t\in[0,T]}\left(|u_0(t)|^2, \left|\frac{du_0(t)}{dt}\right|^2\right) \le \frac{2+T^2}{\varepsilon^2}\,C_5'^2(r_2)\|\widehat{\varphi}(0)\|^2.$$

За умови теореми функції $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega^p_{2\pi})$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega^p_{2\pi})$, тому відповідні ряди для розв'язку $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^2|u_k(t)|^2$ та його похідної $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}|du_k(t)/dt|^2$ є збіжними для всіх чисел $t \in [0,T]$ разом із рядом $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{4+2r_1+2r_2}\|\widehat{\varphi}(k)\|^2$.

Це означає, що розв'язок задачі (4.1), (4.2) для всіх $t \in [0,T]$ приймає значення у просторі $\mathbf{H}_1(\Omega^p_{2\pi})$, його похідна за t приймає значення у просторі $\mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi})$, а також виконуються оцінки (4.36). ∎

Введемо оператори $(1-\Delta)^q$ та $\sqrt{-\Delta}$, які діють на періодичну функцію $\eta = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\eta}(k)e^{ikx}$ згідно з формулами

$$(1-\Delta)^q\eta = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q}\widehat{\eta}(k)e^{ikx}, \quad \sqrt{-\Delta}\,\eta = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \|k\|\widehat{\eta}(k)e^{ikx}.$$

Наслідок 4.1 *Нехай* $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q+r_1+r_2+1}(\Omega_{2\pi}^p)$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{q+r_1+r_2+1}(\Omega_{2\pi}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, *та виконуються інші умови теореми* 4.3, *тоді існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі* (4.1), (4.2), *причому* $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{q-1}(\Omega_{2\pi}^p)$ *для всіх векторів* α *із множини* $\mathcal{O}^2 \setminus B_\varepsilon$ *і виконуються нерівності*

$$\varepsilon\cdot\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\| \le C_5\,\|\varphi;\mathbf{H}_{q+r_1+r_2+1}(\Omega_{2\pi}^p)\|,$$
$$\varepsilon\cdot\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot);\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_{2\pi}^p)\right\| \le C_5\,\|\varphi;\mathbf{H}_{q+r_1+r_2+1}(\Omega_{2\pi}^p)\|.$$

Доведення. Функції $(1-\Delta)^{q-1}\varphi_1$ та $(1-\Delta)^{q-1}\varphi_2$ належать до простору $\mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_{2\pi}^p)$, тому на підставі теореми 4.3 маємо, що існує єдиний розв'язок v задачі (4.1), (4.2) із правими частинами $(1-\Delta)^{q-1}\varphi_1$ та $(1-\Delta)^{q-1}\varphi_2$ в умовах (4.2) і $v(t,\cdot) \in \mathbf{H}_1(\Omega_{2\pi}^p)$, $\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)$ Звідси та з нерівності (4.36) випливає твердження наслідку. Розв'язок u задачі (4.1), (4.2) визначається за формулою $u = (1-\Delta)^{1-q}v$. ∎

Наслідок 4.2 *Для розв'язку* $u = u(t,x)$ *задачі* (4.1), (4.2) *справджується також оцінка*

$$a^2(t)\|\sqrt{-\Delta}u(t,\cdot);\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_{2\pi}^p)\|+ \\ +\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot);\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_{2\pi}^p)\right\| \le \frac{1}{\varepsilon}\,C_5\,\|\varphi;\mathbf{H}_{q+r_1+r_2+1}(\Omega_{2\pi}^p)\|.$$

Доведення. Шукану оцінку отримаємо на основі нерівностей (4.22), (4.35) та наслідку 4.1. ∎

Зауваження 4.1 *В умовах теореми* 4.3 *розв'язок задачі* (4.1), (4.2) *існує не лише в області* $\mathcal{O}^2 \setminus B_\varepsilon$, *але і в ширшій області* $\mathcal{O}^2 \setminus B$, *де* $\operatorname{meas} B = 0$, *проте для вектора* $\alpha \in B_\varepsilon \setminus B$, *взагалі, не виконується оцінка* (4.36), *а виконуються слабші оцінки* $\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_1(\Omega_{2\pi}^p)\| \le C_6\,\|\varphi;\mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega_{2\pi}^p)\|$,

$\left\| \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot); \mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi}) \right\| \leq C_7 \left\| \varphi; \mathbf{H}_{2+r_1+r_2}(\Omega^p_{2\pi}) \right\|$, *де сталі* C_6 *і* C_7 *не залежать від* φ, *але залежать від вектора* α *і є необмеженими на множині* $B_\varepsilon \setminus B$.

4.2. Задача з інтегральними умовами для рівняння високого порядку

В області, що є декартовим добутком відрізка $[0,T]$ і p-вимірного тора $\Omega^p_{2\pi}$, досліджено нелокальну задачу зі загальними інтегральними умовами для строго гіперболічних рівнянь довільного порядку. Задача характеризується наявністю малих знаменників, вона є некоректною за Адамаром у довільних наперед заданих шкалах просторів періодичних за просторовими змінними функцій. Доведено теорему про оцінку знизу малих знаменників, на основі якої за допомогою розкладу у пряму суму простору коефіцієнтів в інтегральних умовах отримано умови існування та єдиності розв'язку задачі у просторах Соболєва.

Вступ. Задачі з інтегральними умовами за виділеною (часовою) змінною є предметом розгляду багатьох авторів, які вивчали такі задачі у циліндричних обмежених та необмежених областях, а також для нециліндричних, але плоских, зокрема областей з невідомими границями, а також з інтегральними умовами за просторовими змінними [15, 63, 125, 126, 138, 162].

Доведено розв'язність задач з інтегральними умовами для диференціальних рівнянь з частинними похідними за деяких припущень, що гарантують можливість використання принципу стискуючих відображень. Використовуючи інший підхід, зокрема метричний, що полягає у розгляді задачі як задачі з параметрами, можна встановити існування та єдиність розв'язку у відповідній шкалі просторів для майже всіх (у сенсі міри) значень цих параметрів.

У даному пункті — результати дослідження, що продовжують результати попереднього підрозділу. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку лінійного строго гіперболічного рівняння довільного скінченного порядку, який задовольняє загальні лінійні інтегральні умови за часовою змінною.

4.2.1. Постановка задачі. Позначення. В області $\mathcal{D}^p = [0,T]\times\Omega^p_{2\pi}$, де $T>0$, $\Omega^p_{2\pi}$ — p-вимірний тор змінної $x=(x_1,\ldots,x_p)$, розглядається задача

$$L(t,D_t,D)u = D_t^n + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,D)D_t^{n-j}u = f, \tag{4.37}$$

$$\int_0^T \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\tau,D)D_t^{j-1}u(\tau,\cdot)\,d\tau = \varphi_i. \tag{4.38}$$

Коефіцієнти $A_j(t,D)$ рівняння (4.37) — диференціальні оператори, що діють за змінною x, мають такий вигляд:

$$A_j(t,D) = \sum_{|s|\le jl} a_{js}(t)D^s = A_j^0(t,D) + A_j^1(t,D)$$

причому $A_j^0(t,D) = \sum\limits_{|s|=jl} a_{js}(t)D^s$, $A_j^1(t,D) = \sum_{|s|\le(j-1)l} a_{js}(t)D^s$, $a_{js}(t)$ — неперервно диференційовні на $[0,T]$ комплекснозначні функції, $D_t=\partial/\partial t$, $D^s = D_1^{s_1}\cdots D_p^{s_p}$, $s=(s_1,\ldots,s_p)$, $|s|=s_1+\cdots+s_p$, $D_j=-i\partial/\partial x_j$, $j=1,\ldots,p$.

Вважаємо, що рівняння (4.37) є строго гіперболічним, а тому корені $\lambda_1(t,\xi),\ldots,\lambda_n(t,\xi)$ алгебричного рівняння

$$\lambda^n + \sum_{j=1}^{n} A_j^0(t,\xi)\lambda^{n-j} = 0, \qquad t\in[0,T], \quad \xi\ne 0, \tag{4.39}$$

є уявними та різними в області $[0,T]\times\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$. Число l є довільним натуральним; воно характеризує анізотропність рівняння (4.37).

Коефіцієнти $b_{ij}(t,D)$ умов (4.38) — також диференціальні оператори, що мають такий вигляд: $b_{ij}(t,D) = \sum\limits_{|s|\le(n-j+1)l} B_{ijs}(t)D^s$, причому функції $B_{ijs}(t)$ належать одиничній кулі простору $\mathbf{L}_2(0,T)$.

Функції φ_i — задані 2π-періодичні, а функція $u=u(t,x)$ — шуканий 2π-періодичний розв'язок задачі (4.37), (4.38).

4.2.2. Побудова та дослідження розв'язків рівняння. Зробимо заміну $U = \mathrm{col}(U^1, \dots, U^n)$,

$$U^j = \widetilde{D}^{(n-j+1)l} D_t^{j-1} u, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{4.40}$$

з якої випливає $U \in \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, якщо $u \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ і навпаки. Якщо u — розв'язок задачі (4.37), (4.38), то U задовольняє систему рівнянь з частинними похідними першого порядку за змінною t такого вигляду

$$D_t U = \widetilde{D}^l A^0(t, D)U + A^1(t, D)U + F, \tag{4.41}$$

де $F = \mathrm{col}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, f)$, причому із виконання умови $U \in \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$ випливає, що $u \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$. Обмежені у просторі $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ матричні оператори $A^0(t, D)$ та $A^1(t, D)$ мають розмір $n \times n$ і елементи $A^0_{ij}(t, D)$ та $A^1_{ij}(t, D)$ відповідно.

Серед елементів послідовностей $A^0_{ij}(t, k)$ та $A^1_{ij}(t, k)$ ненульовими є лише такі елементи:

$A^0_{i,i+1}(t, k) = 1$ при $k \neq 0$, $\ i = 1, \dots, n-1$,
$A^1_{i,i+1}(t, 0) = 1$ при $i = 1, \dots, n-1$,
$A^0_{nj}(t, k) = A^0_{n-j+1}(t, k/\widetilde{k})$ при $k \neq 0$, $\ j = 1, \dots, n$,
$A^1_{nj}(t, k) = \widetilde{k}^{(j-n)l} A^1_{n-j+1}(t, k)$ при $j = 1, \dots, n$.

Із структури алгебричного рівняння (4.39) випливає, що

$$\lambda_j(t, k) = \widetilde{k}^l \lambda_j(t, k/\widetilde{k}) \equiv \widetilde{k}\mu_j(t, k), \quad j = 1, \dots, n.$$

Числа $\mu_j(t, k)$ є коренями алгебричного рівняння $\mu^n + \sum\limits_{j=1}^{n} A^0_j(t, k/\widetilde{k})\mu^{n-j} = 0$ і власними числами матриці $A^0(t, k)$. Внаслідок строгої гіперболічності рівняння (4.37) вони є уявними і неперервними функціями за змінною $t \in [0, T]$. Існують неперервні похідні $\mu'_j \equiv \dfrac{d\mu_j(t, k)}{dt}$, які обчислюються за формулою

$$\mu'_j = \frac{-\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{dA^0_j(t, k/\widetilde{k})}{dt}\, \mu_j^{n-j}(t, k)}{n\mu_j^{n-1}(t, k) + \sum\limits_{j=1}^{n-1} (n-j) A^0_j(t, k/\widetilde{k}) \mu_j^{n-j-1}(t, k)}.$$

Розглянемо як у роботі [73] заміну невідомої вектор-функції U за формулою

$$U(t,x) = R(t,D)G(t,D)Z(t,x), \tag{4.42}$$

де обмежені оператор-матриці $R(t,D)$ та $G(t,D)$ визначаються послідовностями $R(t,k)$ та $G(t,k)$ причому $R(t,0)$ і $G(t,0)$ одиничні матриці порядку n, $R(t,k) = \Big(\mu_j^{\alpha-1}(t,k)\Big)_{\alpha,j=1}^{n}$ — матриця Вандермонда, $R(t,D) = \operatorname{diag}\Big(\exp\Big(\widetilde{k}^l\int_0^t \mu_j(\tau,k)\,d\tau\Big)\Big)_{j=1}^{n}$ — діагональна матриця.

Обмеженість операторів $R(t,D)$ та $G(t,D)$ випливає з гіперболічності рівняння (4.37). З цієї ж причини обмеженими є обернені оператори $R^{-1}(t,D)$ і $G^{-1}(t,D)$, а також оператор $D_tR(t,D)$, який визначається послідовністю [73] з елементами: 0 при $k=0$ і $\Big((\alpha-1)\mu_j^{\alpha-2}(t,k)\dfrac{d\mu_j(t,k)}{dt}\Big)_{\alpha,j=1}^{n}$ при $k\neq 0$.

Теорема 4.4 *Якщо вектор-функція Z із простору $\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$ задовольняє систему рівнянь*

$$D_tZ = A^2(t,D)Z + G^{-1}(t,D)R^{-1}(t,D)F, \tag{4.43}$$

де $A^2(t,D)=G^{-1}(t,D)R^{-1}(t,D)(\widetilde{D}^lA^1(t,D)R(t,D)G(t,D)-D_tR(t,D)G(t,D))$, то функція (4.42) задовольняє систему рівнянь (4.41) і $U\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$. Якщо $\Phi(t,k)$ — фундаментальна матриця розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку $\Phi'(t,k) = A^2(t,k)\Phi(t,k)$, нормована рівністю $\Phi(0,k) = G^{-1}(0,k)R^{-1}(0,k)$, і $f\in\mathbf{C}\big([0,T],\mathbf{H}_{q_1}(\Omega_{2\pi}^p)\big)$, то функція

$$\begin{aligned} U(t,x) = R(t,D)G(t,D)\Phi(t,D)C + R(t,D)G(t,D)\Phi(t,D)\times\\ \times\int_0^t \Phi^{-1}(\tau,D)G^{-1}(\tau,D)R^{-1}(\tau,D)F(\tau,x)\,d\tau, \end{aligned} \tag{4.44}$$

належить до простору $\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$ і задовольняє початкову умову $U(0,x) = C(x)$, де C — довільна функція із простору $\mathbf{H}_{q_1}(\Omega_{2\pi}^p)$.

Доведення. Перша частина теореми доводиться подібно до доведення першої частини теореми 4.1 у підрозділі 4.1.

За формулою Коші рівняння (4.43) має розв'язок

$$Z(t,x)=\Phi(t,D)C+\Phi(t,D)\int_0^t \Phi^{-1}(\tau,D)G^{-1}(\tau,D)R^{-1}(\tau,D)F(\tau,x)\,d\tau. \quad (4.45)$$

За теоремою 4.1 оператор $\Phi(t,D)$ — обмежений. Звідси з умов теореми отримуємо $\|Z;\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \text{const}\big(\|C;\mathbf{H}_{q_1}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + \|Z;\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)\|^2\big)$, тобто $Z\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$. Підставляючи (4.45) у (4.42) одержуємо формулу (4.44).

При $t=0$ маємо $U(0,x)=R(0,D)G(0,D)\Phi(0,D)C(x)=C(x)$.

Теорему доведено. ∎

4.2.3. Існування розв'язку задачі. Перетворимо умови (4.38) до вигляду

$$\int_0^T B(t,D)U(\tau,x)\,d\tau=\varphi(x), \quad (4.46)$$

де $B(t,D)=\big(\widetilde{D}^{(j-n-1)l}b_{ij}(t,D)\big)^n_{i,j=1}$.

Матричний оператор $B(t,D)$ має обмежені елементи $\widetilde{D}^{(j-n-1)l}b_{ij}(t,D)$, що утворені послідовностями $\dfrac{b_{ij}(t,k)}{\widetilde{k}^{(n-j+1)l}}=\displaystyle\sum_{|s|\leq(n-j+1)l}\widetilde{k}^{|s|-(n-j+1)l}B_{ijs}(t)(k/\widetilde{k})^s$. Підставляючи формулу (4.44) в умови (4.46) маємо систему для визначення функції C:

$$Q(D)C=\varphi-\int_0^T H(s,D)F(s,x)\,ds,$$

де $Q(D)=\int\limits_0^T B(\tau,D)R(\tau,D)G(\tau,D)\Phi(\tau,D)\,d\tau$,

$$H(s,D)=\int_s^T B(\tau,D)R(\tau,D)G(\tau,D)\Phi(\tau,D)\,d\tau\Phi^{-1}(\tau,D)G^{-1}(\tau,D)R^{-1}(\tau,D).$$

Оператори $Q(D)$ та $H(s,D)$ є обмеженими у просторі $\mathbf{H}_q(\mathcal{D}^p)$, тому обмеженим буде оператор $Q^\vee(D)$, де $Q^\vee(k)$ приєднана матриця до матриці $Q(k)$.

Подіємо оператором $Q^\vee(D)$, тоді для визначення вектор-функції C отримуємо систему зі скалярним оператором $\det Q(D)$, а саме

$$\det Q(D)\cdot C=Q^\vee(D)\varphi-Q^\vee(D)\int_0^T H(s,D)F(s,x)\,ds. \quad (4.47)$$

Гладкість розв'язку C цієї системи залежить від властивостей оператора $\det Q(D)$, зокрема, розв'язок C належить шкалі просторів $\mathbf{H}_q(\mathcal{D}^p)$, якщо оператор $\big(\det Q(D)\big)^{-1}$ є обмеженим у цій шкалі.

Теорема 4.5 *Нехай для деякого числа $r \in \mathbb{R}$ оператор $\big(\det Q(D)\big)^{-1}\widetilde{D}^{-r}$ задовольняє умову:*

$$\big(\det Q(D)\big)^{-1}\widetilde{D}^{-r} \text{ обмежений у } \mathbf{H}_{q-nl}(\Omega^p_{2\pi}). \tag{4.48}$$

Тоді для довільної функції $f \in \mathbf{C}\big([0,T], \mathbf{H}_{q-nl}(\Omega^p_{2\pi})\big)$ існує єдиний розв'язок $u \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ задачі (4.37), (4.38), де $u = \widetilde{D}^{-nl}U^1$, причому U визначається формулою (4.44), у якій $C(x) = Q^{-1}(D)\Big(\varphi - \int_0^T H(s,D)F(s,x)\,ds\Big)$.

Доведення. Оскільки вектор $C = C(x)$ — єдиний розв'язок системи (4.47), то для встановлення існування розв'язку задачі (4.37), (4.38) достатньо довести включення $u \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$. Із умов теореми маємо, що функція

$$C(x) = \widetilde{D}^{r}\big(\det Q(D)\big)^{-1}\widetilde{D}^{-r}Q^{\vee}(D)\big(\varphi - \int_0^T H(s,D)F(s,x)\,ds\big).$$

належить до простору $\mathbf{H}_{q-nl}(\Omega^p_{2\pi})$, а функція F задовольняє умову включення $F \in \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$. Тоді за теоремою 4.4 вектор-функція U належить до простору $\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$. Звідси для функції u отримуємо необхідне твердження: $u \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$.

Теорему доведено. ∎

Умова (4.48) теореми 4.5 для кожного фіксованого рівняння (4.37) визначає обмеження на функції $B_{ijs}(t)$, які є коефіцієнтами в умовах (4.38). Перевірка цієї умови полягає у встановленні для всіх цілочислових векторів k нерівності

$$\big|\det Q(k)\big| \geq C_1\widetilde{k}^{-r}, \tag{4.49}$$

де C_1 — деяка стала, яка не залежить від k.

Вирази $\det Q(k)$ можуть, взагалі, прямувати до нуля (для деякої підпослідовності векторів $k \in \mathbb{Z}^p$) не так як степенева функція і швидкість прямування до нуля може бути як завгодно великою.

Виникає проблема малих знаменників. Задача встановлення нерівності (4.49) і визначення сталої r розв'язується за допомогою метричного підходу. При такому підході використовується міра Лебега та розмірність Хаусдорфа для вимірювання множин значень параметрів задачі. Використаємо метричний підхід до оцінювання величин $\det Q(k)$, де $k \in \mathbb{Z}^p$.

4.2.4. Оцінювання малих знаменників. Зафіксуємо досліджуване рівняння (4.37), тобто числа n, l та коефіцієнти $a_{js}(t)$ рівняння, а також число T та коефіцієнти $B_{ijs}(t)$ в умовах (4.38), за винятком деяких p коефіцієнтів у кожній з n умов (4.38).

Останні коефіцієнти також не будемо змінювати довільно, а лише вздовж деяких фіксованих прямих у просторі $\mathbf{L}_2(0,T)$. Частинний випадок такого вибору коефіцієнтів реалізовано у підрозділі 4.1.

Використовуємо геометричну властивість гільбертового простору, яка полягає у тому, що він є прямою сумою двох своїх ортогональних підпросторів. Ортогональні вектори визначаються нульовим значенням їх скалярного добутку у гільбертовому просторі.

Вибираємо одновимірні підпростори для розкладу гільбертового простору $\mathbf{L}_2(0,T)$ у пряму суму. Тоді ортогональні доповнення мають одиничну корозмірність і складаються з векторів, які ортогональні до базового вектора (який вичерпує базу) одновимірного підпростору.

Виберемо np одновимірних підпросторів, які визначаються одиничними базовими векторами $\beta_i(t) \in \mathbf{L}_2(0,T)$, де $i = 1, \ldots, np$, тоді кожен елемент $g(x) \in \mathbf{L}_2(0,T)$ можна однозначно подати у вигляді суми

$$g(t) = \alpha\beta_i(t) + g^{\perp}(t), \tag{4.50}$$

де комплексне число α визначається рівністю $\alpha = \big(g(t), \beta_i(t)\big)_{\mathbf{L}_2(0,T)}$, а елемент $g^{\perp}(t) \in \mathbf{L}_2(0,T)$ ортогональний до елемента $\beta_i(t)$: $\big(g^{\perp}(t), \beta_i(t)\big)_{\mathbf{L}_2(0,T)} = 0$. Із формули (4.49) отримуємо, що простір $\mathbf{L}_2(0,T)$ за формулою $g \longleftrightarrow \alpha \cdot \beta_i + g^{\perp}$

бієктивно відображається на декартовий добуток просторів $\mathbb{C}\times\mathbf{L}_2^{\perp\beta_i}(0,T)$, де $\mathbf{L}_2^{\perp\beta_i}(0,T)$ — підпростір функцій із $\mathbf{L}_2(0,T)$, які ортогональні до функції $\beta_i(t)$. Додатково справджується рівність для норм:

$$\|g(t);\mathbf{L}_2(0,T)\|^2 = |\alpha|^2 + \|g^{\perp}(t);\mathbf{L}_2(0,T)\|^2. \tag{4.51}$$

Якщо у формулі (4.50) зафіксувати функції $\beta_i(t)$ та $g^{\perp}(t)$, то функція $g(t) = g_\alpha(t)$ є точкою на прямій у просторі $\mathbf{L}_2(0,T)$. Параметр α визначає положення точки на цій прямій.

Тепер введемо вектор $\bar{b}$ — вектор коефіцієнтів із умов (4.38), який будемо використовувати для формулювання результатів оцінювання малих знаменників. Позначимо через $b_{(d-1)n+j}(t)$, $j=1,\dots,n,$ — коефіцієнт оператора $b_{jj}(t,D)$ при похідній $D_d^{s_d^j}$, де $0\le s_d^j\le (n-j+1)l$, $d=1,\dots,p$. Вважаємо, що ці функції $b_1(t),\dots,b_{np}(t)$ є елементами відрізків прямих

$$\alpha_1\beta_1(t)+g_1^{\perp}(t),\quad \dots,\quad \alpha_{np}\beta_{np}(t)+g_{np}^{\perp}(t)$$

у просторі $\mathbf{L}_2(0,T)$. Із рівності (4.51) отримуємо, що число α_j належить кругу радіуса

$$R_j = \sqrt{1-\|g^{\perp}(t);\mathbf{L}_2(0,T)\|^2} \tag{4.52}$$

з центром у початку координат комплексної площини $\mathbb{C}$:

$$|\alpha_j|^2 \le 1-\|g^{\perp}(t);\mathbf{L}_2(0,T)\|^2 = R_j^2,\quad j=1,\dots,np,$$

тому функції справджують умови:

$$\big(g^{\perp}(t),\beta_i(t)\big)_{\mathbf{L}_2(0,T)}=0,\quad \|g^{\perp}(t);\mathbf{L}_2(0,T)\|<1.$$

Нехай множина $L_j^{\odot}\subset\mathbf{L}_2(0,T)$ визначається формулою

$$L_j^{\odot}=\big\{b_j(t)\colon b_j(t)=\alpha_j\beta_j(t)+g_j^{\perp}(t),\ \ |\alpha_j|\le R_j\big\},$$

тоді вектор $\bar{b}(t)=\operatorname{col}\big(b_1(t),\dots,b_{np}(t)\big)$ належить декартовому добутку — множині $L^{\odot}=L_1^{\odot}\times\dots\times L_{np}^{\odot}$. Задамо міру на підмножинах множини $L^{\odot}$. Нехай

$\mathcal{F} \subset L^{\odot}$; оскільки довільній вектор-функції $\bar{b}(t) \in L^{\odot}$ можна однозначно поставити у відповідність вектор

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{np}) \in \prod_{j=1}^{np} \{\alpha_j \in \mathbb{C} \colon |\alpha_j| \le R_j\} \subset \mathbb{C}^{np},$$

то множині $\mathcal{F}$ поставимо у відповідність множину $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ векторів α, які поставлені у відповідність елементам множини $\mathcal{F}$.

Будемо вважати множину $\mathcal{F}$ вимірною у випадку вимірності множини $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ і визначимо міру $\operatorname{meas} \mathcal{F}$ формулою $\operatorname{meas} \mathcal{F} \equiv \operatorname{meas}_{L^{\odot}} \mathcal{F} = \operatorname{meas}_{\mathbb{C}^{np}} \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$, де $\operatorname{meas}_{\mathbb{C}^{np}} \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ — міра множини $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ у просторі $\mathbb{C}^{np}$. Розглянемо розбиття $K_1 \cup \dots \cup K_p$ множини $\mathbb{Z}^p$, де

$$K_1 = \bigl\{k \in \mathbb{Z}^p \colon |k_1| = \max(|k_1|, \dots, |k_p|)\bigr\},$$

$$K_j = \bigl\{k \in \mathbb{Z}^p \colon |k_j| > \max(|k_1|, \dots, |k_{j-1}|), \\ |k_j| \ge \max(|k_{j+1}|, \dots, |k_p|)\bigr\}, \ j = 2, \dots, p-1.$$

Перейдемо до дослідження малих знаменників і розглянемо матрицю

$$Q(k) = \int_0^T B(\tau, k) R(\tau, k) G(\tau, k) \Phi(\tau, k) \, d\tau, \tag{4.53}$$

де матриця $B(\tau, k) = \bigl(d_{ij}(t, k) \widetilde{k}^{(j-n-1)l}\bigr)_{i,j=1}^{n}$ має обмежені елементи для всіх вектор-функцій $\bar{b} \in L^{\odot}$. Розглянемо матрицю $B(t, k)$ як добуток двох матриць, а саме $B(t, k) = S_j(k)\Bigl(\operatorname{diag}\bigl(\alpha_{(j-1)n+\theta}\bigr)_{\theta=1}^{n} B_j^{\beta}(t) + B_j^{\perp}(t, k)\Bigr)$, де $j = 1, \dots, p$, $S_j(k) = \operatorname{diag}\bigl(\widetilde{k}^{\theta-n-1} k_j^{s_j^{\theta}}\bigr)_{\theta=1}^{n}$, $B_j^{\beta}(t) = \operatorname{diag}\bigl(\beta_{(j-1)n+\theta}(t)\bigr)_{\theta=1}^{n}$, причому матриця $B_j^{\perp}(t, k)$ не залежить від параметрів $\alpha_{(j-1)n+1}, \dots, \alpha_{jn}$. З формули (4.53) одержимо

$$Q(k) = S_j(k)\Bigl(\operatorname{diag}\bigl(\alpha_{(j-1)n+\theta}\bigr)_{\theta=1}^{n} Q_j^{\beta}(k) + \widetilde{Q}_j(k)\Bigr), \tag{4.54}$$

де

$$Q_j^{\beta}(k) = \int_0^T B_j^{\beta}(\tau) R(\tau, k) G(\tau, k) \Phi(\tau, k) \, d\tau,$$
$$\widetilde{Q}_j(k) = \int_0^T B_j^{\perp}(\tau, k) R(\tau, k) G(\tau, k) \Phi(\tau, k) \, d\tau.$$

Лема 4.4 *Нехай виконується умова*

$$\det Q_j^\beta(k) \neq 0 \quad \textit{для всіх} \quad k \in K_j,\ j = 1, \ldots, p, \tag{4.55}$$

тоді для довільних $\varepsilon > 0$ *і* $\gamma > \dfrac{np}{2}$ *існує множина* $\mathcal{F}_\varepsilon \subset L^\odot$ *з мірою* $\operatorname{meas} \mathcal{F}_\varepsilon \leq \varepsilon$ *така, що для всіх векторів* $\bar{b} \in L^\odot \setminus \mathcal{F}_\varepsilon$ *виконується нерівність*

$$\bigl|\det Q(k)\bigr| \geq \left(\frac{\varepsilon}{C_2}\right)^{\frac{n}{2}} \bigl|\det Q_j^\beta(k)\bigr| \widetilde{k}^{-\gamma - \frac{n(n-1)}{2}} |k_j|^{\sum\limits_{\theta=1}^{n} s_j^\theta}, \tag{4.56}$$

де стала $C_2 = \operatorname{meas} L^\odot \cdot \sum\limits_{j=1}^{p} \Bigl(\sum\limits_{d=1}^{n} R_{jn-d}^{-2}\Bigr)\Bigl(\sum\limits_{k \in K_j} \widetilde{k}^{-\frac{2\gamma}{n}}\Bigr)$.

Доведення. З рівності (4.54) та умови (4.55) маємо

$$\det Q(k) = \det S_j(k) \det Q_j^\beta(k) \det \Bigl(\operatorname{diag}\bigl(\alpha_{(j-1)n+\theta}\bigr)_{\theta=1}^{n} + \widetilde{\widetilde{Q}}_j(k)\Bigr), \tag{4.57}$$

де $\widetilde{\widetilde{Q}}_j(k) = (Q_j^\beta(k))^{-1} \widetilde{Q}_j(k)$, а матриця $(Q_j^\beta(k))^{-1}$ — обернена до $Q_j^\beta(k)$.

Для встановлення оцінки (4.56) достатньо тепер для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ довести нерівність

$$|\det H_j^n| \geq \left(\frac{\varepsilon}{C_2}\right)^{\frac{n}{2}} \widetilde{k}^{-\gamma}, \tag{4.58}$$

де $H_j^n = \operatorname{diag}\bigl(\alpha_{(j-1)n+\theta}\bigr)_{\theta=1}^{n} + \widetilde{\widetilde{Q}}_j(k)$.

Через $H_j^{n-\theta}(k)$ позначимо матрицю порядку $n-\theta$ отриману з матриці H_j^n викресленням перших θ рядків і стовпців, де $\theta = 1, \ldots, n-1$. Із структури матриць $H_j^{n-\theta}(k)$ та у випадку їх невиродженості маємо низку формул

$$\det H_j^{n-\theta+1} = \det H_j^{n-\theta} \cdot \bigl(\alpha_{(j-1)n+\theta} - h_j^\theta(k)\bigr), \tag{4.59}$$

де $\det H_j^0 = 1$, вирази $h_j^\theta(k)$, $\theta = 1, \ldots, n$, не залежать від змінних $\alpha_{(j-1)n+1}, \ldots, \alpha_{jn}$. Тому для $k \in K_j$ на множині $L^\odot \setminus Z_n(k)$, де $\operatorname{meas} Z_n(k) \leq \operatorname{meas} L^\odot \cdot \dfrac{\varepsilon}{C_2 R_{jn}^2} \widetilde{k}^{-\frac{2\gamma}{n}}$, виконується нерівність $\bigl|\det H_j^1\bigr| \geq \left(\dfrac{\varepsilon}{C_2}\right)^{\frac{1}{2}} \widetilde{k}^{-\frac{\gamma}{n}}$, на множині $L^\odot \setminus \bigl(Z_{n-1}(k) \cup Z_n(k)\bigr)$, де $\operatorname{meas} Z_{n-1}(k) \leq \operatorname{meas} L^\odot \cdot \dfrac{\varepsilon}{C_2 R_{jn-1}^2} \widetilde{k}^{-\frac{2\gamma}{n}}$, виконується нерівність $\bigl|\det H_j^2\bigr| \geq \bigl|\det H_j^1\bigr| \cdot \left(\dfrac{\varepsilon}{C_2}\right)^{\frac{1}{2}} \widetilde{k}^{-\frac{\gamma}{n}} \geq \dfrac{\varepsilon}{C_2} \widetilde{k}^{-\frac{2\gamma}{n}}$.

Аналогічно з нерівності (4.59) для $\theta = 1, \dots, n$ випливає оцінка

$$\big|\det H_j^\theta\big| \geq \Big(\frac{\varepsilon}{C_2}\Big)^{\frac{\theta}{2}} \widetilde{k}^{-\frac{\theta\gamma}{n}}$$

на множині $L^\odot \setminus \big(Z_{n-\theta+1}(k) \cup \dots \cup Z_n(k)\big)$, де міра кожної з множин $Z_{n-d}(k)$, $d = 1, \dots, \theta - 1$, не перевищує числа $\operatorname{meas} L^\odot \cdot \dfrac{\varepsilon}{C_2 R_{jn-d}^2} \widetilde{k}^{-\frac{2\gamma}{n}}$.

Зокрема, якщо $\theta = n$, то $\big|\det H_j^n\big| \geq \Big(\dfrac{\varepsilon}{C_2}\Big)^{\frac{n}{2}} \widetilde{k}^{-\gamma}$ на множині $L^\odot \setminus \mathcal{F}_\varepsilon(k)$, де $\mathcal{F}_\varepsilon(k) = Z_1(k) \cup \dots \cup Z_n(k)$,

$$\operatorname{meas} \mathcal{F}_\varepsilon(k) \leq \operatorname{meas} Z_1(k) + \dots + \operatorname{meas} Z_n(k) \leq \operatorname{meas} L^\odot \cdot \frac{\varepsilon}{C_2} \sum_{d=1}^{n} R_{jn-d}^{-2} \cdot \widetilde{k}^{-\frac{2\gamma}{n}}.$$

Отже, нерівність (4.58) виконується для $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ на множині $L^\odot \setminus \mathcal{F}_\varepsilon$, де $\mathcal{F}_\varepsilon = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \mathcal{F}_\varepsilon(k)$, причому

$$\operatorname{meas} \mathcal{F}_\varepsilon = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k \in K_j} \operatorname{meas} \mathcal{F}_\varepsilon(k) \leq \operatorname{meas} L^\odot \frac{\varepsilon}{C_2} \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{d=1}^{n} R_{jn-d}^{-2}\Big)\Big(\sum_{k \in K_j} \widetilde{k}^{-\frac{2\gamma}{n}}\Big),$$

тобто $\operatorname{meas} \mathcal{F}_\varepsilon \leq \varepsilon$. Лему доведено. ∎

4.2.5. Розв'язність задачі. Умови гладкості розв'язку. Для всіх векторів $k \in K_j$ виконується нерівність $|k_j| \geq \dfrac{\widetilde{k}}{\sqrt{p+1}}$, тому позначивши

$$\sigma = \min_{j=1,\dots,p} \sum_{\theta=1}^{n} s_j^\theta, \tag{4.60}$$

маємо

$$|\det Q(k)| \geq \varepsilon^{\frac{n}{2}} C_3 \big|\det Q_j^\beta(k)\big| \widetilde{k}^{\sigma - \gamma - \frac{n(n-1)}{2}}, \tag{4.61}$$

де $C_3 = C_2^{-\frac{n}{2}} (p+1)^{-\frac{\sigma}{2}}$. Ця нерівність є наслідком нерівності (4.56) і може бути перетворена в нерівність (4.49) при накладанні додаткових (сильніших від умов (4.55) невиродженості) умов на визначники матриць $Q_j^\beta(k)$.

Число σ залежить від вибору коефіцієнтів $b_1(t), \dots, b_{np}(t)$. Зі збільшенням цього числа покращується оцінка (4.61).

Отже, використання коефіцієнтів при вищих похідних (збільшення числа σ) операторів $b_{ij}(t,D)$ дозволяє отримати розв'язок задачі (4.37), (4.38) такої ж гладкості при слабших умовах гладкості на праві частини f та φ_i цієї задачі, як при використанні коефіцієнтів при похідних нижчих порядків.

Теорема 4.6 *Нехай матриця $Q(0)$ є невиродженою матрицею, виконується нерівність*

$$\left|\det Q_j^{\beta}(k)\right| \geq C_4\widetilde{k}^{-r}, \quad k \in K_j,\ j = 1, \ldots, p, \tag{4.62}$$

тоді для довільних чисел $\varepsilon > 0$ і $\gamma > \dfrac{np}{2}$ існує множина $\mathcal{F}_\varepsilon \subset L^{\odot}$ з мірою $\operatorname{meas}\mathcal{F}_\varepsilon \leq \varepsilon$ така, що для майже всіх векторів $\bar{b} \in L^{\odot}$ існує єдиний розв'язок $u \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ задачі (4.37), (4.38) для довільних функцій $f \in \mathbf{H}^0_{l,q-nl+q_1}(\mathcal{D}^p)$ та $\varphi_i \in \mathbf{H}_{q-nl+q_1}(\Omega^p_{2\pi})$, де $q_1 = \dfrac{n(n-1)}{2} + r + \gamma - \sigma$ і для всіх векторів $\bar{b} \in L^{\odot} \setminus \mathcal{F}_\varepsilon$ виконується нерівність

$$\left\|u; \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)\right\|^2 \leq \text{const} \cdot \left(\left\|f; \mathbf{H}^0_{l,q-nl+q_1}(\mathcal{D}^p)\right\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left\|\varphi_i; \mathbf{H}_{q-nl+q_1}(\Omega^p_{2\pi})\right\|^2\right).$$

Доведення. Враховуючи нерівності (4.61), (4.62) маємо оцінку знизу $\left|\det Q(k)\right| \geq \varepsilon^{\frac{n}{2}} C_3 C_4 \widetilde{k}^{\sigma-\gamma-r-\frac{n(n-1)}{2}}$, тобто виконується умова (4.48) теореми 4.5. Отже, розв'язок задачі (4.37), (4.38) із простору $\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ — існує, єдиний і визначається формулою (4.44), з якої отримуємо шукану нерівність.

Теорему доведено. ∎

4.3. Висновки

Нелокальна задача (4.1), (4.2) з інтегральними умовами для рівняння коливання струни зі змінним коефіцієнтом розв'язна у просторах Соболєва скінченного порядку для всіх параметрів $\alpha \in \mathcal{O}^2$ (за винятком деяких множин малої міри), якщо виконується умова (4.28). Існування розв'язку у просторах Соболєва випливає із строгої гіперболічності рівняння (4.1), що дає можливість звести його до зліченної кількості систем звичайних диференціальних рівнянь (4.9) і встановити відповідні оцінки фундаментальних матриць таких систем.

Для не гіперболічних рівнянь згадані оцінки матриць можуть бути експоненціальними, тому розв'язки задач з інтегральними умовами для таких рівнянь, взагалі, не належать шкалі просторів Соболєва.

Встановлення існування та побудова розв'язку задачі (4.1), (4.2) пов'язані з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої використано метричний підхід. Також застосовано зображення функцій в інтегральних умовах (4.2) за допомогою ізоморфізму між простором $\mathbf{L}_1(0,T)$ і декартовим добутком $\mathbb{R} \times \mathbf{L}_{1[0]}(0,T)$.

У підрозділі 4.2. за допомогою метричного підходу досліджено задачу з інтегральними умовами за виділеною змінною для строго гіперболічних рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами. Встановлено умови розв'язності задачі та залежності гладкості розв'язку від коефіцієнтів інтегральних умов.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню задачі Коші, задач з нелокальними багатоточковими умовами та задач з інтегральними умовами за виділеною (часовою) змінною для лінійних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними. Розглянуті задачі — некоректні за Адамаром, їх розв'язність та властивості розв'язків пов'язані з проблемою малих знаменників.

Автором вперше одержано такі нові результати:

1. Досліджено задачу Коші за часовою змінною для загальних нормальних лінійних систем рівнянь з частинними похідними зі сталими у декартовому добутку. Встановлено умови на праві частини, при яких майже всі задачі мають розв'язок відповідної гладкості.

2. Для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами вивчено розв'язність нелокальної задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною у просторах Соболєва періодичних за іншими змінними функцій.

3. Розроблено методику встановлення умов розв'язності та дослідження гладкості розв'язків нелокальних задач з інтегральними умовами за виділеною змінною для рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу зі змінними коефіцієнтами у просторах Соболєва.

4. Проведено аналіз малих знаменників для розглянутих у роботі задач і встановлено метричні оцінки їх знизу, на основі яких визначено достатні умови на гладкість правих частин задач.

5. Отримано точну оцінку міри області, обмеженої лінією рівня гладкої функції зі знакосталою похідною високого порядку.

Робота носить теоретичний характер. Її результати можна використати у подальших теоретичних дослідженнях нелокальних задач для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними, а також у конкретних прикладних задачах, що моделюються за допомогою нелокальних задач з багатоточковими та інтегральними умовами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абдо С. А.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки / С. А. Абдо, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 3. – С. 417–425;II. Разрешимость и свойства решений / С. А. Абдо, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 5. – С. 806–815.
2. *Агранович М. С.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида / М. С. Агранович, М. И. Вишик // УМН. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53–161.
3. *Азбелев Н. В.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. – М. : Ин-т компьют. исслед., 2002. – 384 с.
4. *Алексеева С. М.* Метод квазиобращения для задачи управления начальным условием для уравнения теплопроводности с интегральным краевым условием / С. М. Алексеева, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 4. – С. 495–502.
5. *Антыпко И. И.* Критерий безусловной корректности краевой задачи в слое / И. И. Антыпко, М. А. Перельман // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1976. – Вып. 26. – С. 3–9.
6. *Бейкер Дж. мл.* Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986. – 502 с.
7. *Бейлин С. А.* Единственность решения смешанной задачи с интегральным условием для одного гиперболического уравнения / С. А. Бейлин, Л. С. Пулькина // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. – Казань, 2001. – **11**. – С. 24–27.
8. *Бейлин С. А.* Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения / С. А. Бейлин // Неклассические уравнения математической физики : сб. научн. работ. – Новосибирск, 2005. – С. 37–43.
9. *Белавин И. А.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения / И. А. Белавин,

С. П. Капица, С. П. Курдюмов // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1998. – **38**, № 6. – С. 885–902.

10. *Бенуар Н.-Э.* Смешанная задача с интегральным условием для параболических уравнений с оператором Бесселя / Н.-Э. Бенуар, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 12. – С. 2094–2098.
11. *Берник В. И.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постояннями коэффициентами / В. И. Берник, Б. И. Пташник, Б. О. Салыга // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
12. *Боднарук С. Б.* Задача Коші для одного класу еволюційних рівнянь нескінченного порядку / С. Б. Боднарук, В. В. Городецький, В. П. Ратушняк // Наук. вісник Чернів. ун-ту : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2004. – С. 10–17. – (Математика, вип. 191–192).
13. *Борок В. М.* Регулярные граничные задачи в полосе / В. М. Борок, С. В. Евдокимова // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1989. – Вып. 51. – С. 31–37.
14. *Борок В. М.* Нелокальные корректные краевые задачи в слое / В. М. Борок, Л. В. Фардигола // Матем. заметки. – 1990. – **48**, № 1. – С. 20–25.
15. *Виленц И. Л.* Классы единственноси решения общей краевой задачи в слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных / И. Л. Виленц // Докл. АН УССР. – 1974. – № 3. – С. 195–197. – (Сер. А).
16. *Вігак В. М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами / В. М. Вігак // Доп. АН України. – 1994. – № 8. – С. 57–60. – (Сер. А).
17. *Воеводин В. В.* Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. – М. : Наука, 1984. – 320 с.
18. *Волевич Л. Р.* Метод энергетических оценок в смешанной задаче / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин // УМН. – 1980. – **35**. – С. 53–120.
19. *Волкодавов В. Ф.* Две задачи для уравнения колебания струны с интегральными условиями и условиями сопряжения на характеристике / В. Ф. Волкодавов, В. Е. Жуков // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 4. – С. 503–507.

20. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
21. *Гащук П. М.* Лінійні динамічні системи і звичайні диференціальні рівняння / П. М. Гащук. – Львів : Українські технології, 2002. – 608 с.
22. *Гельфанд И. М.* Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов // УМН. – 1953. – **8**, № 6. – С. 3–54.
23. *Гельфанд И. М.* О новом методе в теоремах единственности решения задачи Коши / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов // ДАН СССР. – 1955. – **102**, № 6. – С. 1065–1068.
24. *Гельфанд И. М.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1958. – Вып. 3. – 274 с.
25. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М. : Физматгиз, 1959. – 400 с.
26. *Гой Т. П.* Задача з нелокальними умовами для рівняння з частинними похідними, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним доданком / Т. П. Гой // Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1997. – **8**, № 1. – С. 71–78.
27. *Гой Т. П.* Задача з нелокальними умовами для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами / Т. П. Гой, Б. Й. Пташник // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К. : Ин-т мат. НАН Украины. – 1996. – С. 74–76.
28. *Гой Т. П.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь / Т. П. Гой, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 186–195.
29. *Гой Т. П.* Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами / Т. П. Гой, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1478–1487.
30. *Голубева Н. Д.* Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями / Н. Д. Голубева, Л. С. Пулькина // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 3. – С. 456–458.

31. *Горбачук В. И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук. – К. : Наук. думка, 1984. – 284 с.

32. *Горбачук М. Л.* О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, для которых решения бесконечно дифференцируемы / М. Л. Горбачук, П. И. Дудников // Докл. АН УССР. – 1981. – № 4. – С. 9–11. – (Сер. А).

33. *Горбачук М. Л.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / М. Л. Горбачук, А. В. Князюк // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, Вып. 3. – С. 55–91.

34. *Горбачук М. Л.* О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением / М. Л. Горбачук, Н. И. Пивторак // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 8. – С. 1317–1324.

35. *Гординг Л.* Задач Коши для для гиперболических уравнений / Л. Гординг. – М. : ИЛ, 1962.

36. *Городецький В. В.* Принцип локалізації для розв'язків задачі Коші для параболічних за Петровським систем в класі узагальнених функцій / В. В. Городецький // Докл. АН УССР. – 1984. – № 10. – С. 5–7. – (Сер. А).

37. *Городецький В. В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. – Чернівці : Рута, 1998. – 219 с.

38. *Гребенников Е. А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике / Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов. – М. : Наука, 1978. – 128 с.

39. *Гуревич Б. Л.* Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для систем дифференциально-разностных уравнений / Б. Л. Гуревич // ДАН СССР. – 1956. – **108**, № 6. – С. 1001–1003.

40. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач / А. А. Дезин. – М. : Наука, 1980. – 208 с.

41. *Дубинский Ю. А.* О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка / Ю. А. Дубинский // Матем. сборник. – 1973. – **90 (132)**, № 1. – С. 3–22.

42. *Дубинский Ю. А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике / Ю. А. Дубинский // Успехи матем. наук. – 1982. – **37**, вып. 5(227). – С. 97–137.

43. *Дубинский Ю. А.* Задачи Коши в комплексной области / Ю. А. Дубинский. – М. : Из-во МЭИ, 1996. – 180 с.

44. *Задорожна Н. М.* Задача для систем параболічних рівнянь довільного порядку / Н. М. Задорожна // Вісник Львів. ун-ту. – 1997. – С. 48–55. – (Серія мех.-мат., вип. 47).

45. *Иванчов М. И.* Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями / М. И. Иванчов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 8. – С. 1066–1071.

46. *Иванчов Н. И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями / Н. И. Иванчов // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 4. – С. 547–564.

47. *Ивасишен С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы / С. Д. Ивасишен, С. Д. Эйдельман // Тр. семинара по функц. анализу. – К. : Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып. 1. – С. 3–175, 271–273.

48. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем / С. Д. Ивасишен // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, Вып. 4. – С. 500–506.

49. *Ивасишен С. Д.* Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами / С. Д. Ивасишен, Г. С. Пасічник // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1484–1496.

50. *Ильких В. С.* Нелокальная задача для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / В. С. Ильких // Материалы 7-й конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР. – Львов, 1980. – С. 80–84. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1379-81.

51. *Ильких В. С.* Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами / В. С. Ильких // Докл. АН УССР. – 1982. – № 5. – С. 15–19. – (Сер. А).

52. *Илькив В. С.* Многоточечная нелокальная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами / В. С. Илькив // Материалы IX конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР. Ч. II (Львов, 10–14 мая 1982 г.). – Львов, 1983. – С. 64–72. – Рукопись деп. в ВИНИТИ 10.01.1984, № 324–84 Деп.
53. *Илькив В. С.* Обобщение одной леммы Пяртли / В. С. Илькив // Материалы 10-й конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР. Ч. 2 (Львов, 15–17 мая 1984 г.). – Львов, 1984. – С. 96–99. – Рукопись деп. в ВИНИТИ 10.11.1984, № 7197-84 Деп.
54. *Илькив В. С.* Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными / В. С. Илькив // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 487–492.
55. *Илькив В. С.* Компактное обращение обобщенной матрицы Вандермонда / В. С. Илькив. – Львов, 1991. – Вып. 5. – 10 с. – Деп. в НИИЭИР, № 3-8836.
56. *Ількiв В. С.* Аналоги леми Пяртлi iз абсолютними константами / В. С. Илькив // Мат. методи i фiз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 68–74.
57. *Илькив В. С.* Краевая задача с нелокальными условиями для дифференциальных операторов с постоянными действительными коэффициентами / В. С. Илькив, В. Н. Полищук // Питання якiсної теорiї диференцiальних рiвнянь та їх застосування. – К., 1978. – С. 15–16.
58. *Илькив В. С.* Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами / В. С. Илькив, В. Н. Полищук, Б. И. Пташник, Б. О. Салыга // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 5. – С. 582–587.
59. *Илькив В. С.* Задача с нелокальными краевыми условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами / В. С. Илькив, Б. И. Пташник // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.

60. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н. И. Ионкин // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 2. – С. 294–304.

61. *Іванчов М. І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами / М. І. Іванчов. – К. : ІСДО, 1995. – 84 с. – (Препринт).

62. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності / М. І. Іванчов // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.

63. *Іванчов М. І.* Задача теплопровідності з вільною межею, яка вироджується у початковий момент часу / М. І. Іванчов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 82–87.

64. *Ільків В. С.* Продовження за часовою змінною розв'язку нелокальної багатоточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними і сталими коефіцієнтами / В. С. Ільків // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 78–82.

65. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами / В. С. Ільків // Вісник Львів. ун-ту. – 1999. – С. 96–107. – (Сер. мех.-мат., вип. 54).

66. *Ільків В. С.* Аналоги леми Пяртлі із абсолютними константами / В. С. Ільків // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 68–74.

67. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для неоднорідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними та змінними коефіцієнтами / В. С. Ільків // Вісник Львів. ун-ту. – 2000. – С. 139–143. – (Сер. мех.-мат., вип. 58).

68. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах / В. С. Ільків // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 57–64.

69. *Ільків В. С.* Двоточкова нелокальна крайова задача для системи неоднорідних рівнянь із частинними похідними / В. С. Ільків // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 87–94.

70. *Ількiв В. С.* Багатоточкова нелокальна неоднорідна задача для систем рівнянь з частинними похідними зі змінними за t коефіцієнтами / В. С. Ільків // Мат. вісник НТШ. – 2004. – **1**. – С. 47–58.

71. *Ількiв В. С.* Крайова задача з нелокальними двоточковими умовами для гіперболічного рівняння другого порядку / В. С. Ільків // Вісник НУ "Львів. політехніка". – 2006. – С. 41–51. – (Фіз.-мат. науки, № 566).

72. *Ількiв В. С.* Нелокальна двототочкова задача для строго гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами другого порядку / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Мат. вісник НТШ. – 2006. – **3**. – С. 69–83.

73. *Ількiв В. С.* Про константу в лемі Пяртлі / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Вісн. нац. ун-ту. "Львів. політехніка". – 2007. – С. 12–17. – (Фіз.-мат. науки, № 601).

74. *Ількiв В. С.* Дослідження умов розв'язності задачі Коші для рівнянь частинними похідними за допомогою метричного підходу / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Нелинейные граничные задачи. — 2008. – Т. 18. -– С. 86—106.

75. *Ількiв В. С.* Про нерівність між нормами похідних функції та мірою області / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Int. Conf. "Functional methods in approximation theory and operator theory III dedicated to the memory of V. K. Dzyadyk, August 22-26, 2009, Volyn, Ukraine. – С. 48-49.

76. *Ількiв В. С.* Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними / В. С. Ільків, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 184–194.

77. *Ількiв В. С.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників / В. С. Ільків, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624–1650.

78. *Каленюк П. І.* Обобщенный метод разделения переменных / П. І. Каленюк, Я. Е. Баранецкий, З. М. Нитребич. – К. : Наук. думка, 1993. – 232 с.

79. *Каленюк П. І.* Побудова розв'язку задачі типу Валле Пуссена для полілінійного диференціального рівняння з частинними похідними / П. І. Каленюк, З. М. Нитребич // Вісн. Львів. Політехн. ін-ту. – 1996. – № 42. – С. 44–45.

80. *Каленюк П. І.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / П. І. Каленюк, З. М. Нитребич. – Львів : Вид-во НУ "Львівська Політехніка". – 2002. – 292 с.

81. *Каленюк П. І.* Про ядро задачі з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними нескінченного порядку / П. І. Каленюк, З. М. Нитребич, І. В. Когут // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська Політехніка". – 2008. – С. 5–11. – (Сер. фізико-математичні науки, вип. 625, № 625).

82. *Калинина Е. А.* Теория исключения / Е. А. Калинина, А. Ю. Утешев. – СПб. : Из-во НИИ химии СПбГУ, 2002. – 72 с.

83. *Камынин Л. И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями / Л. И. Камынин // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1964. – **4**, № 6. – С. 1006–1024.

84. *Кмить И. Я.* О нелокальных задачах для двумерных гиперболических систем / И. Я. Кмить, С. П. Лавренюк // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, – № 6. – С. 149.

85. *Кондратюк А. А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. III / А. А. Кондратюк // Мат. сб. – 1983. – **120(162)**. – С. 331–343.

86. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых просторанствах / С. Г. Крейн. – М. : Наука, 1967. – 275 с.

87. *Лавренчук В. П.* Деякі нелокальні задачі для параболічного рівняння другого порядку з оператором Бесселя / В. П. Лавренчук // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. – Чернівці : Рута. – 1990. – С. 111–119.

88. *Латтес Р.* Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. – М., 1970.

89. *Левин В. Я.* Распределение корней целых функций / В. Я. Левин. – ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

90. *Лере Ж.* Задача Коши / Ж Лере., Л. Гординг, Т. Котаке. – М. : Мир, 1967.

91. *Литовченко В. А.* Задача Коши для одного класса эволюционных систем параболического типа с неограниченными коэффициентами / В. А. Литовченко // Дифференц. уравнения. – 2008. – **44**, № 6. – С. 812–830.

92. *Макаров А. А.* О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для системы дифференциальных уравнений в частных производных / А. А. Макаров // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 2. – С. 320–324.

93. *Макаров А. А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений / А. А. Макаров // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 1. – С. 144–150.

94. *Мамян А. Х.* Общие граничные задачи в слое / А. Х. Мамян // ДАН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 292–296.

95. *Матійчук М. І.* Фундаментальні матриці розв'язків загальних $\overrightarrow{2b}$-параболических і $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера / М. І. Матійчук // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 8. – С. 1010–1014.

96. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі / М. І. Матійчук. – К. : Наук. думка, 1999. – 214 с.

97. *Матийчук М. И.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини / М. И. Матийчук, С. Д. Эйдельман // Тр. семинара по функц. анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54–83.

98. *Мизохата С.* О системах Ковалевской / С. Мизохата // УМН. – 1974. – **29**:2(176). – С. 216–227.

99. *Муравей Л. А.* Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения / Л. А. Муравей, А. В. Филиновский // Мат. заметки. – 1993. – **54**, № 4. – С. 98–116.

100. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А. М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72–81.

101. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. – М. : Высшая школа, 1995.

102. *Нахушева З. А.* Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных / З. А. Нахушева // Дифференц. уравнения. — 1986. – **22**, № 1. – С. 171–174.

103. *Нитребич З. М.* Граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння з частинними похідними / З. М. Нитребич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 3. – С. 64–70.

104. *Овсянников Л. В.* Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств / Л. В. Овсянников // ДАН. – 1971. – **200**, № 4. – С. 789–792.

105. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для системы уравнений с частными производными в области неаналитических функций / И. Г. Петровский // Бюлл. МГУ. Секцю А. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1–72.

106. *Петровский И. Г.* Избранные труды. Системы уравнений с частными производными / И. Г. Петровский. – М. : Наука, 1986. – 499 с.

107. *Поліщук В. М.* Задача з нелокальними крайовими умовами для гіперболічних систем диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами / В. М. Поліщук // Доп. АН УРСР. – 1979. – **А**, № 3. – С. 171–175.

108. *Полищук В. Н.* Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами / В. Н. Полищук // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. – К. : Наук. думка. – 1979. – С. 54–65.

109. *Попов А. Ю.* Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа / А. Ю. Попов, И. В. Тихонов // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 3. – С. 396–405.

110. *Попов А. Ю.* Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени / А. Ю. Попов, И. В. Тихонов // Мат. сборник. – 2005. – **196**, № 9. – С. 71–102.

111. *Прасолов В. В.* Многочлены / В. В. Прасолов. – М. : МЦНМО, 2001. – 336 с.

112. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – К. : Наук. думка, 1984. – 264 с.

113. *Пташник Б. Й.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук. – К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.

114. *Пукальский И. Д.* Нелокальные краевые задачи для неравномерно параболических уравнений / І. Д. Пукальський // Дифф. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 6. – С. 777–787

115. *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача Діріхле для лінійних параболічних рівнянь з виродженням / І. Д. Пукальський // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 1. – С. 109–121

116. *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача з косою похідною та задача оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь з виродженням / І. Д. Пукальський // Мат. студії. – 2010. – Т. 34, № 1. – С. 90–100

117. *Пулькина Л. С.* О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения / Л. С. Пулькина // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 2. – С. 279–280.

118. *Пулькина Л. С.* Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения / Л. С. Пулькина // Мат. заметки. – 2003. – **74**, № 3. – С. 435–445.

119. *Пяртли А. С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства / А. С. Пяртли // Функц. анализ и его прилож. – 1969. – **3**, вып. 4. – С. 59–62.

120. *Романко В. К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов / В. К. Романко // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 1. – С. 117–131.

121. *Савченко Г. Б.* О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений / Г. Б. Савченко // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 11. – С. 2082–2085.

122. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнения / А. А. Самарский // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925–1935.

123. *Сапоговас М. П.* О некоторых краевых задачах с нелокальным условием / М. П. Сапоговас, Р. Ю. Чегис // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 1268–1274.

124. *Симотюк М. М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху / М. М. Симотюк // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 90–95.

125. *Симотюк М. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / М. М. Симотюк, О. М. Медвідь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 92–101.

126. *Симотюк М. М.* Задача з розділеними даними для рівнянь із частинними похідними / М. М. Симотюк, О. М. Медвідь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 155–159.

127. *Скасків О. Б.* Випадкові лакунарні степеневі ряди і нерівність Вімана / О. Б. Скасків // Мат. студії. – 2008. – **30**, № 1. – С. 101–106.

128. *Скубачевский А. Л.* О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач / А. Л. Скубачевский // Мат. сб. – 1982. – **117**, № 4. – С. 548–558.

129. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – Новосибирск : Из-во СО АН СССР, 1962.

130. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности / И. В. Тихонов // Мат. сб. – 1935. – **42**, № 2. – С. 199–216.

131. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений / И. В. Тихонов // Изв. РАН. – 2003. – С. 133–166. – (Серия мат., **67**, № 2).

132. *Умаров С. Р.* Псевдодифференциальные операторы и вопросы разрешимости краевых задач : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра физ.-мат. наук : спец. 00.00.00 "..."/ С. Р. Умаров ; Ташкент. гос. ун-т. – Ташкент, 1993. – 25 с.

133. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов : в 4-х т. / Л. Хермандер. – М. : Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.

134. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, З. Филлипс. – М. : ИЛ, 1962. – 832 с.

135. *Хорн Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 655 с.

136. *Цывис Н. В.* Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений / Н. В. Цывис, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 5. – С. 877–881.

137. *Фардигола Л. В.* Корректные задачи в слое с дифференциальными опеарторами в краевом условии / Л. В. Фардигола // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1083–1090.

138. *Фардигола Л. В.* Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое / Л. В. Фардигола // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 51–58.

139. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных / Л. В. Фардигола // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 11. – С. 123–144.

140. *Шелухин В. В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений / В. В. Шелухин // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 2. – С. 191–207.

141. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. – М. : Наука, 1965. – 328 с.

142. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы / С.Д. Эйдельман. – М. : Наука, 1964. – 443 с.

143. *Юрчук Н. И.* Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений / Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 12. – С. 2117–2126.

144. *Aronszajn H.* Traces of analityc solutions of heat equation / H. Aronszajn. – Astérisque, 1973. – Vol. 2, no. 3. – P. 5–68.

145. *Bassanini P.* Iterative methods for quasilinear hyperbolic system in the first canonic form / P. Bassanini // Apl. Anal. – 1981. – Vol. 12, no. 2. – P. 105–117.

146. *Beilin S.* Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions / S. Beilin // Electronic Journal of Differential Equations. – 2001. – Vol. 76. – P. 1–8.

147. *Benvenuti P.* Monotone set functions-based integrals / Handbook of measure theory / P. Benvenuti, R. Mesiar., D. Vivona. – Amsterdam : Elsevier, 2002. – P. 1329–1379.

148. *Beresnevich V. V.* A Groshev type theorem for convergence on manifolds / V. V. Beresnevich // Acta Math. Hungar. – 2002. – **94**, no. 1–2. – P. 99–130.

149. *Beresnevich V. V.* Metric Diophantine approximation: the Khintchine–Groshev theorem for nondegenerate manifolds / V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Moskow Math. Journ. – 2002. – **2**, no. 2. – P. 203–225.

150. *Bony J.* Problemes de Chauchy pour les hyperfunctions solutions / J. Bony, P. Shapira // C. R. Acad. Sci. – Paris, 1972. – **276.** – P. 188.

151. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation. Subject to the specification of energy / J. R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. – **21.** – P. 155–160.

152. *Cannon J. R.* The solution of the diffusion equation in two space variables subject to the specification of mass / J. R. Cannon, Y. P. Lin, A. L. Matheson // Appl. Anal. – **50** (1993), no. 1–2. – P. 1–15.

153. *Cannon J. R.* Diffusion subject to the specification of mass / J. R. Cannon, J. van der Hoek // J. Math.Anal. Appl. – **115** (1986), no. 2. – P. 517–529.

154. *Cartan H.* Sur les systèmes de founctions holomorphes à variétés linéaires et Jeurs applications / H. Cartan // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. – 1928.– (3), **45**. – P. 255–346.

155. *Cesari L.* Un problema ai limiti per sistemi di equazioni hiperquasi lineari nella forma canonica di Shauder / L. Cesari // Atti. Acad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. phis., mat. e natur. – 1974. – **57**, no. 5. – P. 303–307.

156. *Dani S. G.* Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms / S. G. Dani, G. A. Margulis // Adv. in Soviet Math. – 1993. – **16**. – P. 91–137.

157. *Dehghan M.* Fully explicit finite-difference methods for two-dimensional diffusion with an integral condition / M. Dehghan M. // Nonlinear Anal., Ser. A: Theory Methods **48** (2002), no. 5. – P. 637–650.

158. *Eidelman S. D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type / S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei. – Basel–Boston–Berlin : Birkhäuser, 2004. – 309 p. – (Operator theory: Advances and applications; v. 152).

159. *Hadamard J.* Le probleme de Cauchy et les equations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

160. *Hersh R.* Explicit solution of a class of higher order abstract Cauchy problems / R. Hersh // J. Diff. Equat. – 1970. – **8**, no. 3 – P. 570–579.

161. *Holmgren E.* Über systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen / E. Holmgren // Ofversigt Kgl. Vetenskaps. Akad. Förhandl. – 1901. – **58**. – S. 91–103.

162. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / M. Ivanchov. – Math. studies : monograph Ser. – Lviv : VNTL Publ., 2003. – 48. – 238 p.

163. *Kleinbock D.* Flows on homogeneous spaces and diophantine approximation on manifold / D. Kleinbock, G. A. Margulis // Ann. Math. – 1998. – **148**. – P. 339–360.

164. *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions / B. Ya. Levin. – Amer. Math. Society, 1996. – **150**. – 248 p.

165. *Pucci P.* Problemi ai limiti per sistemi di equazioni iperboliches / P. Pucci // Boll. Unione Mat. ital. Ser. B. – 1979. – **16**, no. 5. – P. 87–99.

ДОДАТОК А
ТОЧНА ОЦІНКА МІРИ МНОЖИНИ, ОБМЕЖЕНОЇ ЛІНІЄЮ РІВНЯ ФУНКЦІЇ ЗІ ЗНАКОСТАЛОЮ ПОХІДНОЮ

Для функцій $f \in \mathbf{C}^n[a,b]$ таких, що $|f^{(n)}(x)| \geq \delta$ на $[a,b]$, встановлено точну оцінку міри Лебега $\operatorname{meas} G_n(\varepsilon,\delta,f)$ множини $G_n(\varepsilon,\delta,f)$ тих точок $x \in [a,b]$, для яких $|f(x)| \leq \varepsilon$, а саме, доведено непокращувальну нерівність

$$\operatorname{meas} G_n(\varepsilon,\delta,f) \leq \min\left(b-a,\, 4\sqrt[n]{\frac{n!}{2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}\right).$$

На основі многочленів Чебишова T_n побудовано *екстремальні многочлени*, для яких нерівність стає рівністю.

Вступ. В задачах для диференціальних рівнянь з частинними похідними, які пов'язані з проблемою малих знаменників, виникає питання про встановлення оцінки знизу $|f_k(x)| > \varepsilon_k > 0$, де вектор k пробігає множину цілочислових векторів $\mathbb{Z}^p$ при $p \geq 1$, для гладких функцій f_k, що задовольняють на відрізку $[a,b]$ нерівність $\left|f_k^{(n_k)}(x)\right| > \delta_k > 0$, де $n_k \geq 1$. Метричний підхід [112, 113] дозволяє отримати такі оцінки для майже всіх чисел $x \in [a,b]$ та для великих за нормою векторів k у випадку збіжності ряду $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{meas}\{x \in [a,b] \colon |f_k(x)| \leq \varepsilon_k\}$. Для побудови збіжних мажорантних рядів достатньо оцінити зверху елементи цього ряду. Такі оцінки отримано у роботі [119] з деякими обмеженнями на функції f_k та числа ε_k. Вказані обмеження усунуто в роботі [11], а в роботах [53,56,73,124,148,156] уточнено оцінки та перенесено на ширші класи функцій. Метрична теорія діофантових наближень широко використовує оцінки мір розглядуваних множин [149,163], як і теорія цілих та мероморфних функцій [6, 85, 127], теорія міри та інтегрування [147] тощо.

Постановка задачі. Лема Пяртлі та її узагальнення. Нехай $[a,b] \subset \mathbb{R}$ — довільний відрізок додатної довжини, $\mathbf{C}[a,b]$ та $\mathbf{C}^n[a,b]$, де $n \geq 1$, — простори неперервних та n раз неперервно диференційовних[1] функцій на $[a,b]$,

$$\mathbf{C}^n_+[a,b] = \Big\{ f \in \mathbf{C}^n[a,b] \colon \min_{x\in[a,b]} f^{(n)}(x) \ge 0 \Big\},$$

$$\mathbf{C}^n_-[a,b] = \Big\{ f \in \mathbf{C}^n[a,b] \colon -f \in \mathbf{C}^n_+[a,b] \Big\}.$$

Для $\delta > 0$ позначимо $\mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a,b] = \mathbf{C}^n_{+,\delta}[a,b] \cup \mathbf{C}^n_{-,\delta}[a,b]$, де $\mathbf{C}^n_{+,\delta}[a,b]$ та $\mathbf{C}^n_{-,\delta}[a,b]$ — такі множини функцій:

$$\mathbf{C}^n_{+,\delta}[a,b] = \Big\{ \frac{\delta}{n!} x^n + f(x) \colon f \in \mathbf{C}^n_+[a,b] \Big\},$$

$$\mathbf{C}^n_{-,\delta}[a,b] = \Big\{ f \in \mathbf{C}^n[a,b] \colon -f \in \mathbf{C}^n_{+,\delta}[a,b] \Big\}.$$

Звідси випливають нерівності, що характеризують функції із введених множин: $\min\limits_{x\in[a,b]} f^{(n)}(x) \ge \delta$, якщо $f \in \mathbf{C}^n_{+,\delta}[a,b]$, $\max\limits_{x\in[a,b]} f^{(n)}(x) \le -\delta$, якщо $f \in \mathbf{C}^n_{-,\delta}[a,b]$, і $\min\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \ge \delta$, якщо $f \in \mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a,b]$.

Множина $G_n(\varepsilon,\delta,f)$, де $\varepsilon > 0$, для функції f із множини $\mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a,b]$ задається формулою

$$G_n(\varepsilon,\delta,f) = \{ x \in [a,b] \colon |f(x)| \le \varepsilon \}. \tag{A.1}$$

Ця множина зокрема може бути порожньою або точковою чи відрізком $[a,b]$, тому (залежно від a, b, ε та δ) її міра може приймати значення нуль та $b-a$, або довільне проміжне значення. Оцінку міри $\operatorname{meas} G_n(\varepsilon,\delta,f)$ множини $G_n(\varepsilon,\delta,f)$ отримано в роботі Пяртлі [119]. Цей результат сформулюємо у вигляді леми [124].

Лема A.1 (Пяртлі) *Нехай $f \in \mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a,b] \cap \mathbf{C}^{n+1}[a,b]$ і в кожній точці $x \in [a,b]$ справджується нерівність $\max\limits_{1\le i\le n+1} \big| f^{(i)}(x) \big| \le M$, причому*

$$\varepsilon < \frac{\delta}{2} \cdot \min\Big(1, \frac{\delta^n}{\big(2^n-2\big)^n M^n} \Big), \tag{A.2}$$

тоді міра Лебега множини $G_n(\varepsilon,\delta,f)$ справджує оцінку

$$\operatorname{meas} G_n(\varepsilon,\delta,f) \le C_n \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \tag{A.3}$$

[1]Похідні у крайніх точках a та b вважаємо односторонніми похідними.

де

$$C_n = \sqrt[n]{2}\,(2n+1)\big(2^n - 2\big). \tag{A.4}$$

Доведення сильнішого варіанту цієї леми у роботі [11] проводиться методом математичної індукції. Автори роботи не накладають обмеження (А.2) на число ε і послаблюють гладкість функції f, але не визначають сталу C_n та її залежність від параметра n.

Лема А.2 *Нехай $f \in \mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a,b]$, тоді виконується нерівність* (А.3) *для деякої додатної сталої C_n, яка залежить лише*[2] *від числа n.*

Визначення послідовності C_n проведено у роботах [53, 56, 73, 124, 148, 156]. Отримано такі результати: $C_n = 2(b-a)n\sqrt[n]{(n+1)!/\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|}$ у роботі [156], $C_n = n2^{(n+1)/2}$ у роботі [56], $C_n = 2n\sqrt[n]{n!}$ у роботі [124], $C_n = \dfrac{1}{2}(n^2+n+2)3^{(n+1)/2}$ у роботі [148], $C_n = 2n$ у роботі [73]. Останнє значення є найменшим з наведених, але, як зауважено у [73], не оптимальним на класі функцій $\mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a,b]$.

Основні результати. У даному пункті встановлено, що шуканою оптимальною величиною є послідовність $C_n = 4\sqrt[n]{n!/2}$, а також знайдено функції, для яких нерівність (А.3) стає рівністю. Доводяться дві теореми.

Теорема А.1 *Якщо ε та δ — довільні додатні числа, то*

$$\sup_{f\in\mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a,b]} \operatorname{meas} G_n(\varepsilon,\delta,f) = \min\left(b-a,\ 4\sqrt[n]{\frac{n!}{2}}\cdot\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}\right). \tag{A.5}$$

У випадку комплексної змінної для *многочленів* використовують [6, с. 275–276], [85], [164, с. 78] аналог леми А.2 — лему Картана [154], [89, с. 31–33].

Лема А.3 (Картан) *Нехай функція f є унітальним многочленом степеня n, тобто $f^{(n)}(z) = n! = \delta$ для всіх $z \in \mathbb{C}$. Тоді нерівність $|f(z)| < \varepsilon$ на комплексній площині може виконуватися лише на множині, що покривається системою кругів, сума діаметрів яких не перевищує $4n\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}$.*

---

[2] Існує очевидна залежність міри множини $G_n(\varepsilon,\delta,f) = 0$ від чисел a та b — кінців відрізка $[a,b]$, який ми вважаємо фіксованим. Якщо $\min\limits_{x\in[a,b]}|f(x)| < \varepsilon < \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, то функція $\operatorname{meas} G_n(\varepsilon,\delta,f)$ є неспадною за змінною ε, причому $0 < \operatorname{meas} G_n(\varepsilon,\delta,f) < b-a$; в інших випадках: $\operatorname{meas} G_n(\varepsilon,\delta,f) = b-a$, якщо $\varepsilon \geq \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, та $\operatorname{meas} G_n(\varepsilon,\delta,f) = 0$, якщо $\varepsilon \leq \min\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

Питання про точність сталої $4n$, тобто виконання подібної до (А.5) рівності, у комплексному випадку залишається відкритим [164, с. 78].

У протилежність до теореми А.1, в якій оцінюється міра множини, яка визначається функцією f, у наступній основній теоремі А.2 оцінюється міра довільної (вимірної) множини.

Теорема А.2 *Нехай E – вимірна підмножина відрізка $[a,b]$, функція f належить простору $\mathbf{C}^n[a,b]$ і її похідна $f^{(n)}$ не обертається в нуль на $[a,b]$, тоді*[3]

$$\operatorname{meas} E \le \min\left(4\sqrt[n]{\frac{n!}{2}}\cdot\sqrt[n]{\frac{\sup\limits_{x\in E}|f(x)|}{\min\limits_{x\in[a,b]}|f^{(n)}(x)|}},\ b-a\right). \tag{A.6}$$

Доведення основних результатів. Доведення теореми А.1 і теореми А.2 базується на двох лемах (лема А.4 та лема А.5).

Лема А.4 *Нехай $f\in\mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a,b]$, а функція F визначена на проміжку $[a_1,b_1]$ на основі функції f, де $a_1=\left(\frac{2\delta}{\varepsilon n!}\right)^{1/n}\cdot a$, $b_1=\left(\frac{2\delta}{\varepsilon n!}\right)^{1/n}\cdot b$, за формулою*

$$F(y)=\frac{2}{\varepsilon}\cdot f\left(\left(\frac{\varepsilon n!}{2\delta}\right)^{1/n}\cdot y\right), \tag{A.7}$$

тоді $F\in\mathbf{C}^n_{\pm,n!}[\tilde a,\tilde b]$ і справджується рівність

$$\operatorname{meas} G_n(\varepsilon,\delta,f)=\left(\frac{\varepsilon n!}{2\delta}\right)^{1/n}\cdot\operatorname{meas} G_n(2,n!,F), \tag{A.8}$$

причому точка x належить множині $G_n(\varepsilon,\delta,f)$ тоді і тільки тоді, коли точка $y=\left(\frac{2\delta}{\varepsilon n!}\right)^{1/n}\cdot x$ належить $G_n(2,n!,F)\equiv\{y\in[a_1,b_1]\colon |F(y)|\le 2\}$.

Доведення. Нехай $\hat x\in G_n(\varepsilon,\delta,f)$ і $f\in\mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a,b]$, тобто виконуються нерівності $|f(\hat x)|\le\varepsilon$ і $|f^{(n)}(x)|\ge\delta$, де $x\in[a,b]$, тоді згідно з формулою (А.7)

$$|F^{(n)}(y)|=\frac{2}{\varepsilon}\cdot\left(\left(\frac{\varepsilon n!}{2\delta}\right)^{1/n}\right)^n\cdot\left|f^{(n)}\left(\left(\frac{\varepsilon n!}{2\delta}\right)^{1/n}\cdot y\right)\right|=\frac{n!}{\delta}\cdot|f^{(n)}(x)|\ge n!,$$

якщо $\left(\frac{2\delta}{\varepsilon n!}\right)^{1/n}\cdot x=y\in[a_1,b_1]$, і $|F(\hat y)|=\left|F\left(\left(\frac{2\delta}{\varepsilon n!}\right)^{1/n}\cdot\hat x\right)\right|=\frac{2}{\varepsilon}\cdot|f(\hat x)|\le 2$, якщо $\hat y=\left(\frac{2\delta}{\varepsilon n!}\right)^{1/n}\cdot\hat x$. Із першої формули випливає шукане включення

[3]Мінімальне значення функції на множині $[a,b]$ можна замінити її мінімальним значенням на множині $[\inf E,\sup E]$.

$F \in \mathbf{C}^n_{\pm,n!}[a_1, b_1]$, а з другої — належність $\hat{y}$ до множини $G_n(2, n!, F)$. Якщо ж $\hat{x} \notin G_n(\varepsilon, \delta, f)$, тобто $|f(\hat{x})| > \varepsilon$, то з другої формули $|F(\hat{y})| > 2$, тобто $\hat{y} \notin G_n(2, n!, F)$. Відображення $\hat{y} \mapsto \left(\dfrac{\varepsilon n!}{2\delta}\right)^{1/n} \cdot \hat{y} = \hat{x}$ є бієктивним відображенням множини $G_n(2, n!, F)$ на множину $G_n(\varepsilon, \delta, f)$, тому маємо рівність (A.8). ■

Лема A.5 *Якщо* $F \in \mathbf{C}^n_{\pm,n!}[a_1, b_1]$, *де* $a_1 \le b_1$, *то*

$$\operatorname{meas} G_n(2, n!, F) \le \min(4, b_1 - a_1). \tag{A.9}$$

Доведення. Нехай $F[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ — розділена різниця порядку n функції $F \in \mathbf{C}^n_{\pm,n!}[a_1, b_1]$ у точках $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, тоді у випадку $a_1 \le \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n \le b_1$ справджуються *дві* рівності [25, с. 39–48], [141]

$$F[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} F(\xi_j) \prod_{\alpha=0,\, \alpha \ne j}^{n} |\xi_j - \xi_\alpha|^{-1}, \tag{A.10}$$

$$F[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n] = \int_{\Delta_n} F^{(n)}\big(g(t_1, \ldots, t_n)\big)\, dt_1 \cdots dt_n, \tag{A.11}$$

де $\Delta_n = \big\{(t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n \colon t_1 \le \cdots \le t_n\big\}$ є n-вимірним симплексом, міра якого $\operatorname{meas} \Delta_n = \displaystyle\int_{\Delta_n} dt_1 \cdots dt_n$ дорівнює $1/n!$,

$$g(t_1, \ldots, t_n) = \xi_0 + \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \xi_{j-1}) t_j \equiv (1 - t_1)\xi_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - t_{j+1})\xi_j + t_n \xi_n.$$

Функція g приймає значення з відрізка $[a_1, b_1]$ на симплексі Δ_n. Якщо $F \in \mathbf{C}^n_{\pm,n!}[a_1, b_1]$, то з формул (A.10) та (A.11) і нерівності $|F^{(n)}(x)| \ge n!$ для $x \in [a_1, b_1]$ отримуємо двосторонню оцінку

$$1 \le \min_{x \in [\xi_0, \xi_n]} |F^{(n)}(x)| \cdot \int_{\Delta_n} dt_1 \cdots dt_n \le \big|F[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]\big| \le \varkappa \cdot \max_{j=0,1,\ldots,n} |F(\xi_j)|, \tag{A.12}$$

де

$$\varkappa \equiv \varkappa[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n] = \sum_{j=0}^{n} \prod_{\alpha=0,\, \alpha \ne j}^{n} |\xi_j - \xi_\alpha|^{-1}. \tag{A.13}$$

Якщо $\xi_j \in G_n(2, n!, F)$ для $j = 0, 1, \ldots, n$, то $|F(\xi_j)| \le 2$ і з нерівностей (A.12) випливає, що

$$\varkappa[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n] \ge 1/2. \tag{A.14}$$

Множина $G_n(2, n!, F)$ є диз'юнктним об'єднанням (не більш, ніж n) множин, які є або окремими точками, або відрізками $[x_j, y_j]$ додатної довжини $y_j - x_j$, де $j = 1, \dots, J$, $J \le n$. Тому міра θ цієї множини є сумою довжин відрізків $[x_j, y_j]$, тобто $\operatorname{meas} G_n(2, n!, F) \equiv \theta = \sum\limits_{j=1}^{J} (y_j - x_j)$.

Введемо бієктивну строго монотонну функцію $\widetilde{\varphi}$, яка відображає відрізок $[0, 1]$ на множину $[x_1, y_1] \cup (x_2, y_2] \cup \dots \cup (x_J, y_J]$, а саме $\widetilde{\varphi}(x) = x_1 + x\theta$, якщо $x \in \left[0, \dfrac{y_1 - x_1}{\theta}\right]$ і $\widetilde{\varphi}(x) = x_j + x\theta$, якщо $x \in \left(\sum\limits_{s=1}^{j-1} \dfrac{y_s - x_s}{\theta}, \sum\limits_{s=1}^{j} \dfrac{y_s - x_s}{\theta}\right]$.

Отже, функція $\widetilde{\varphi}$ набуває значень із множини $G_n(2, n!, F)$ і розділена різниця у точках η_1, η_2 із $[0, 1]$ цієї функції не менша, ніж θ, тобто $\dfrac{\widetilde{\varphi}(\eta_2) - \widetilde{\varphi}(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \ge \theta$. Звідси випливає нерівність $\widetilde{\varphi}(\eta_2) - \widetilde{\varphi}(\eta_1) \ge (\eta_2 - \eta_1) \cdot \theta$, якщо $0 \le \eta_1 < \eta_2 \le 1$.

Виберемо (в порядку зростання) деякі точки $\widetilde{\xi}_0, \widetilde{\xi}_1, \dots, \widetilde{\xi}_n$ із множини $G_n(2, n!, F)$ для використання їх у нерівностях (A.13) та (A.14).

Оскільки $0 = \sin^2 \dfrac{0 \cdot \pi}{2n} < \sin^2 \dfrac{1 \cdot \pi}{2n} < \sin^2 \dfrac{2\pi}{2n} < \dots < \sin^2 \dfrac{n\pi}{2n} = 1$, то точки $\widetilde{\xi}_j$ можна вибрати згідно з формулою $\widetilde{\xi}_j = \widetilde{\varphi}\Big(\sin^2 \dfrac{j\pi}{2n}\Big)$, де $j = 0, 1, \dots, n$. Тоді з оцінки $|\widetilde{\xi}_j - \widetilde{\xi}_\alpha| = \left|\widetilde{\varphi}\Big(\sin^2 \dfrac{j\pi}{2n}\Big) - \widetilde{\varphi}\Big(\sin^2 \dfrac{\alpha\pi}{2n}\Big)\right| \ge \theta \cdot \left|\sin^2 \dfrac{j\pi}{2n} - \sin^2 \dfrac{\alpha\pi}{2n}\right|$ та формули (A.13) отримуємо $\varkappa \le \theta^{-n} \sum\limits_{j=0}^{n} \prod\limits_{\alpha=0,\, \alpha\ne j}^{n} \left|\sin^2 \dfrac{j\pi}{2n} - \sin^2 \dfrac{\alpha\pi}{2n}\right|^{-1}$.

Із останньої оцінки та формули (A.14) виключаємо змінну $\varkappa$ і отримуємо таку нерівність для шуканої величини θ:

$$\theta^n \le 2 \sum_{j=0}^{n} \prod_{\alpha=0,\, \alpha\ne j}^{n} \left|\sin^2 \frac{j\pi}{2n} - \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2n}\right|^{-1}. \tag{A.15}$$

Для обчислення правої частини нерівності (A.15) запишемо аналог формули (A.12) для випадку $F = T_n$, де $T_n = 2^{1-n} \cos(n \arccos x) = x^n + \cdots$ — многочлен Чебишова n-го порядку на відрізку $[-1, 1]$.

Оскільки T_n — *унітальний* многочлен n-го порядку, то розділена різниця n-го порядку дорівнює одиниці для всякого набору точок із відрізка $[-1, 1]$.

З другого боку, цей многочлен приймає $n + 1$ раз екстремальні значення

$(-1)^{n-j}2^{1-n}$ у точках $\widetilde{\eta}_j = -\cos\dfrac{j\pi}{n} = 2\sin^2\dfrac{j\pi}{2n} - 1$, де $j = 0, 1, \ldots, n$, тому з рівностей $T_n(\widetilde{\eta}_j) = (-1)^{n-j}2^{1-n}$ та $|\widetilde{\eta}_j - \widetilde{\eta}_\alpha| = 2\left|\sin^2\dfrac{j\pi}{2n} - \sin^2\dfrac{\alpha\pi}{2n}\right|$ і з формули (A.10) випливає рівність

$$1 = T_n[\widetilde{\eta}_0, \widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_n] = 2^{1-2n}\sum_{j=0}^{n}\prod_{\alpha=0,\,\alpha\neq j}^{n}\left|\sin^2\frac{j\pi}{2n} - \sin^2\frac{\alpha\pi}{2n}\right|^{-1},$$

з якої отримуємо просту зручну формулу $2\sum\limits_{j=0}^{n}\prod\limits_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq j}}^{n}\left|\sin^2\dfrac{j\pi}{2n} - \sin^2\dfrac{\alpha\pi}{2n}\right|^{-1} = 4^n$. Тепер із рівності (A.15) отримуємо оцінку $\theta = \operatorname{meas} G_n(2, n!, F) \leq 4$. Оскільки функція F розглядається на відрізку $[a_1, b_1]$, то очевидно $\theta \leq b_1 - a_1$. Лему доведено. ■

Доведення теореми A.1. Розглянемо довільну функцію $f \in \mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a, b]$, тоді за лемою A.4 функція F з формули (A.7) належить множині $\mathbf{C}^n_{\pm,n!}[a_1, b_1]$ і виконується рівність (A.8), де $a_1 = \left(\dfrac{2\delta}{\varepsilon n!}\right)^{1/n}\cdot a$, $b_1 = \left(\dfrac{2\delta}{\varepsilon n!}\right)^{1/n}\cdot b$. Із леми A.5 використовуємо нерівність (A.9), яка, разом з рівністю (A.8), дає нерівність

$$\operatorname{meas} G_n(\varepsilon, \delta, f) \leq \sqrt[n]{\frac{\varepsilon n!}{2\delta}}\cdot\min(4, b_1 - a_1) = \min\left(b - a,\ 4\sqrt[n]{\frac{n!}{2}}\cdot\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}\right).$$

Із останньої формули отримуємо шукану нерівність

$$\sup_{f\in\mathbf{C}^n_{\pm,\delta}[a,b]}\operatorname{meas} G_n(\varepsilon, \delta, f) \leq \min\left(b - a,\ 4\sqrt[n]{\frac{n!}{2}}\cdot\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}\right).$$

Для побудови функцій f, які задовольняють рівняння

$$\operatorname{meas} G_n(\varepsilon, \delta, f) = \min\left(b - a,\ 4\sqrt[n]{\frac{n!}{2}}\cdot\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}\right),$$

виберемо функцію F з множини $\mathbf{C}^n_{\pm,n!}[a_1, b_1]$, використовуючи многочлени Чебишова T_n, а саме: $F(x) = 2^n\cdot T_n\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Із властивостей многочленів Чебишова випливає, що $|F(x)| \leq 2$ на проміжку $[-2, 2]$, а $F^{(n)}(x) = T_n^{(n)}\left(\dfrac{x}{2}\right) = n!$, тому екстремальними функціями на класі $\mathbf{C}^n_{\pm,n!}[a_1, b_1]$ будуть такі, параметризовані на відрізку $\big[0, |b_1 - a_1 - 4|\big]$ параметром t, многочлени:

$$F_t(x) = \begin{cases} 2^n \cdot T_n\Big(\dfrac{x - a_1 - 2 + t}{2}\Big), & \text{при} \quad b_1 - a_1 \le 4, \\ 2^n \cdot T_n\Big(\dfrac{x - a_1 - 2 - t}{2}\Big), & \text{при} \quad b_1 - a_1 \ge 4. \end{cases}$$

Тепер за лемою А.4 отримуємо, що при $b - a \lesseqgtr 4\sqrt[n]{\dfrac{\varepsilon n!}{2\delta}}$ функції

$$f_t(x) = \varepsilon 2^{n-1} \cdot T_n\Big(\frac{1}{2}\Big(\sqrt[n]{\frac{2\delta}{\varepsilon n!}}(x - a) \pm t\Big) - 1\Big)$$

відповідно задовольняють рівність (А.3) для всіх $t \in \Big[0, \Big|\sqrt[n]{\dfrac{2\delta}{\varepsilon n!}}(b - a) - 4\Big|\Big]$.

Теорему доведено. ■

Доведення теореми А.2. Нехай E_J є диз'юнктним об'єднанням інтервалів $[x_1, y_1], (x_2, y_2], \ldots, (x_J, y_J]$, де $J \in \mathbb{N}$, а $F[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ — розділена різниця функції $f \in \mathbf{C}^n[a, b]$ у точках $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, причому $\xi_0 < \cdots < \xi_n$ і $\xi_j \in E_J$.

Як і в лемі А.5 будуємо бієктивну монотонну функцію $\varphi_J \colon [0, 1] \to E_J$ і виберемо для розділеної різниці точки $\widetilde{\xi}_j = \varphi_J\Big(\sin^2 \dfrac{j\pi}{2n}\Big)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Оскільки $\operatorname{meas} E_J = \sum\limits_{j=1}^{J}(y_j - x_j)$, то з рівностей (А.10), (А.11) випливають нерівності $\min\limits_{x \in [x_1, y_J]} \Big|\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}\Big| \le \big|F(\widetilde{\xi}_0, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n)\big| \le \varkappa \cdot \sup\limits_{x \in E_J} \big|f(x)\big| \le \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{4}{\operatorname{meas} E_J}\Big)^n$, де $\varkappa = \sum\limits_{j=0}^{n} \prod\limits_{\alpha=0, \alpha \ne j}^{n} \big|\widetilde{\xi}_j - \widetilde{\xi}_\alpha\big|^{-1}$. Звідси отримуємо нерівність

$$\frac{1}{n!} \min_{x \in [x_1, y_J]} \big|f^{(n)}(x)\big| \le \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{\operatorname{meas} E_J}\Big)^n \sup_{x \in E_J} \big|f(x)\big|.$$

Із неперервності функції f та можливості як завгодно точно наближувати вимірну множину E множинами E_J граничним переходом при $J \to \infty$ в останній нерівності отримуємо шукану нерівність (А.6). Теорему доведено. ■

Узагальненням теореми А.2 є нерівності *типу Гайзенберґа* [75]

$$\frac{\|f_j\|_{\mathbf{C}(E)} \cdot \|\widetilde{f}_n\|_{\mathbf{C}[a,b]}}{2} \ge \mathrm{C}_n^j \cdot \Big(\frac{\operatorname{meas} E}{4}\Big)^{n-j}, \qquad j = 0, 1, \ \ldots, n - 1,$$

де $\|f\|_{\mathbf{C}(E)} = \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$, $\mathrm{C}_n^j = \dfrac{n!}{j!(n - j)!}$, $f_j = f^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, а $\widetilde{f}_n = 1/f_n$.