Львівський державний університет внутрішніх справ

Ольга ОГІРКО
Наталія ГАЛАЙКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

- Диференціальне числення функцій багатьох змінних
- Інтегральне числення функцій багатьох змінних
- Звичайні диференціальні рівняння першого та вищих порядків
- Числові та функціональні ряди

Львів
2026

УДК 51
О-36

Рекомендовано до друку та розміщення в електронних сервісах ЛьвДУВС
Вченою радою Львівського державного університету внутрішніх справ
(протокол від 24 червня 2026 р. № 14)

Рецензенти:
Пирч Н. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент
Магеровська Т. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Огірко О. І., Галайко Н. В.

О-36 Вища математика : навчальний посібник. Львів : Львівський державний університет внутрішніх справ, 2026. Ч. 2. 368 с.

ISBN 978-617-511-457-5

Охоплено ключові розділи вищої математики, які формують базу математичного апарату, необхідного для підготовки фахівців технічного, економічного та природничого спрямування. Розглянуто диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних, звичайні диференціальні рівняння першого та вищих порядків, а також теорію числових і функціональних рядів. Орієнтовано на розвиток логічного та аналітичного мислення, формування навичок математичного моделювання і опанування методів формалізації задач, що застосовуються у різних галузях науки, техніки та економіки.

Для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузей знань F «Інформаційні технології», D «Бізнес, адміністрування та право», а також для всіх, хто зацікавлений у поглибленому вивченні вищої математики та її прикладних аспектів.

The study guide covers key sections of higher mathematics that form the foundation of the mathematical apparatus required for the training of specialists in technical, economic, and natural science disciplines. The publication includes differential and integral calculus of functions of several variables, ordinary differential equations of the first and higher orders, as well as the theory of numerical and functional series. The material is aimed at developing logical and analytical thinking, building skills in mathematical modeling, and mastering methods for formalizing problems applied in various areas of science, technology, and the economy.

Intended for students at the first (bachelor's) level of higher education in the fields of knowledge F «Information Technology», D «Business, Administration, and Law», as well as everyone interested in an in-depth study of higher mathematics and its applied aspects.

УДК 51

© Огірко О. І., Галайко Н. В., 2026
© Львівський державний університет внутрішніх справ, 2026

ISBN 978-617-511-457-5

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 7
Розділ 8. **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ** 9
8.1. Функція багатьох змінних: означення, область визначення та способи задання 9
8.2. Границя функції багатьох змінних 14
8.3. Неперервність функції багатьох змінних в точці і на множині 16
8.4. Частинні похідні функції багатьох змінних 18
8.5. Диференційовність функції багатьох змінних 20
8.6. Повний диференціал функції та його застосування до наближених обчислень 21
8.7. Диференціювання складеної функції 22
8.8. Диференціювання неявно заданої функції 23
8.9. Частинні похідні та диференціали вищих порядків 24
8.10. Застосування частинних похідних функції багатьох змінних 26
8.10.1. Дотична площина та нормаль до поверхні 26
8.10.2. Похідна за напрямком. Градієнт 27
8.10.3. Формули Тейлора та Маклорена 30
8.10.4. Локальний екстремум функції декількох змінних 30
8.10.5. Найбільше і найменше значення функції двох змінних у замкненій області 34
8.10.6. Умовний екстремум функції. Функція Лагранжа та її застосування для дослідження на умовні екстремуми 34
8.11. Розв'язування прикладів та задач 36
8.12. Контрольні запитання 57
8.13. Завдання для самостійного виконання 59

Розділ 9. **ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ** 68
9.1. Подвійний інтеграл 68
9.1.1. Означення та основні властивості подвійного інтеграла 68

9.1.2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах ... 72
9.1.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Визначник Якобі ... 74
9.1.4. Подвійний інтеграл в полярних координатах ... 77
9.1.5. Застосування подвійного інтеграла ... 80
9.2. Потрійний інтеграл ... 83
9.2.1. Означення та основні властивості потрійного інтеграла ... 83
9.2.2. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах ... 86
9.2.3. Заміна змінних в потрійному інтегралі ... 89
9.2.4. Потрійний інтеграл в циліндричних координатах ... 89
9.2.5. Потрійний інтеграл у сферичних координатах ... 91
9.2.6. Застосування потрійного інтеграла ... 92
9.3. Криволінійні інтеграли першого роду ... 94
9.3.1. Поняття криволінійного інтеграла першого роду ... 94
9.3.2. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду ... 97
9.3.3. Застосування криволінійного інтеграла першого роду до розв'язання задач механіки ... 98
9.4. Криволінійні інтеграли другого роду ... 99
9.4.1. Поняття криволінійного інтеграла другого роду ... 99
9.4.2. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду ... 102
9.4.3. Формула Гріна ... 104
9.4.4. Застосування криволінійного інтеграла другого роду до розв'язання задач геометрії й механіки ... 105
9.5. Поверхневі інтеграли ... 106
9.5.1. Поверхневий інтеграл першого роду ... 106
9.5.2. Поверхневі інтеграли другого роду ... 110
9.6. Розв'язування прикладів та задач ... 114

9.7. Контрольні запитання 139
9.8. Завдання для самостійного виконання 142

Розділ 10. **ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ** 152
10.1. Диференціальні рівняння першого порядку: основні поняття та властивості 152
10.2. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них 159
10.3. Однорідні диференціальні рівняння та звідні до них 161
10.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку 164
10.4.1. Метод Бернуллі 165
10.4.2. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа) 166
10.4.3. Диференціальне рівняння Бернуллі 168
10.5. Диференціальні рівняння у повних диференціалах 170
10.5.1. Інтегрувальний множник 172
10.6. Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної 174
10.6.1. Окремі випадки інтегрованих неявних диференціальних рівнянь першого порядку 176
10.6.2. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро 178
10.7. Розв'язування прикладів та задач 179
10.8. Контрольні запитання 216
10.9. Завдання для самостійного виконання 218

Розділ 11. **ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ** 225
11.1. Поняття про диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші 225
11.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку 226
11.3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Загальні означення та поняття 230
11.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами 233

11.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами 237
11.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Метод підбору частинного розв'язку 240
11.7. Розв'язування прикладів та задач 244
11.8. Контрольні запитання 280
11.9. Завдання для самостійного виконання 282

Розділ 12. **ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ** 289
12.1. Числові ряди 289
12.1.1. Властивості числових рядів 290
12.1.2. Найпростіші еталонні ряди та їх збіжність 292
12.1.3. Числові ряди з додатними членами 294
12.1.4. Знакозмінні числові ряди. Абсолютна та умовна збіжність 299
12.2. Функціональні ряди 300
12.2.1. Рівномірна збіжність функціонального ряду 302
12.3. Степеневі ряди 305
12.3.1. Ряди Тейлора та Маклорена 306
12.4. Ряди Фур'є 309
12.4.1. Тригонометричний ряд. Ряд Фур'є 309
12.4.2. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій 313
12.4.3. Ряд Фур'є для $2l$-періодичної функції 313
12.5. Розв'язування прикладів та задач 314
12.6. Контрольні запитання 350
12.7. Завдання для самостійного виконання 352

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ 361

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК 363

Математика – це велична споруда,
створена уявою людини
для пізнання Всесвіту.
Ле Корбюзьє

ПЕРЕДМОВА

Математика є однією з найдавніших і найважливіших наук, що зародилася з практичних потреб людства й поступово трансформувалася у фундаментальну дисципліну, яка пронизує всі сфери сучасного знання. Її витоки сягають глибокої давнини, коли виникла необхідність у лічбі, вимірюваннях та розв'язанні найпростіших геометричних задач. Перші математичні знання, зафіксовані у вавилонських клинописних текстах та єгипетських папірусах, мали переважно прикладний характер. У наступні епохи – Античності, Середньовіччя та Нового часу – відбулося поступове становлення математичного аналізу, диференціальних рівнянь і теорії рядів як потужних інструментів дослідження змінних процесів.

Сьогодні математика є невід'ємною складовою інженерії, фізики, інформатики, економіки та інших галузей знань. Вона забезпечує опис і моделювання складних явищ, дає можливість формалізувати процеси та створювати ефективні алгоритми для розв'язання прикладних задач. На її основі розвиваються сучасні напрями, такі як штучний інтелект, криптографія та фінансове моделювання, що визначають технологічний розвиток суспільства.

Вища математика як окремий розділ науки формувалася протягом тривалого часу, поступово розширюючи свій понятійний апарат і методи дослідження. Її основу становить вивчення змінних величин і функціональних залежностей, що дає змогу аналізувати процеси у природі та техніці в їхній динаміці. Багато ключових ідей вищої математики мають глибоке історичне коріння та були закладені ще в працях античних учених, зокрема Архімеда, хоча їхня строга математична форма сформувалася значно пізніше.

Математичні методи є основою сучасної наукової картини світу, оскільки забезпечують універсальний інструментарій для опису та аналізу явищ різної природи. За їх допомогою можна будувати математичні моделі, здійснювати прогнозування та досліджувати поведінку складних систем. Особливо важливою є їхня роль у розвитку цифрових технологій, де математичні підходи лежать в основі обробки даних, автоматизованих систем і алгоритмічних рішень. У зв'язку з цим зростає потреба у ґрунтовній математичній підготовці фахівців різних галузей.

Пропонований навчальний посібник є логічним продовженням першої частини та разом із нею утворює цілісну навчально-методичну систему, спрямовану на послідовне формування у здобувачів вищої освіти фундаментальних знань і практичних навичок. У другій частині поглиблено розглянуто ключові розділи математичного аналізу, що є базою для подальшого вивчення прикладних дисциплін у технічних, економічних та природничих спеціальностях.

Книга охоплює диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних, що дає змогу досліджувати багатовимірні процеси, моделювати реальні явища та аналізувати залежності в складних системах. Значну увагу приділено звичайним диференціальним рівнянням першого та вищих порядків як інструменту опису динамічних процесів у різних галузях науки. Окремий розділ присвячено числовим і функціональним рядам, які використовуються для наближеного подання функцій, розв'язання задач і побудови математичних моделей.

Посібник містить чітко структуровані пояснення базових понять, що сприяє формуванню міцної теоретичної основи. Практичні приклади та завдання різного рівня складності допомагають закріпити матеріал і розвинути навички самостійного мислення. Використання сучасних підходів до подання інформації – структурованого викладу, візуалізацій та прикладної спрямованості – підвищує доступність і ефективність навчання. В підсумку видання постає не лише навчальним ресурсом, а й інструментом формування професійних математичних компетентностей.

Розділ 8

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

8.1. Функція багатьох змінних: означення, область визначення та способи задання

Функція багатьох змінних є узагальненням поняття функції однієї змінної та відіграє важливу роль у сучасному математичному аналізі. Вона описує залежність однієї величини від кількох незалежних змінних, що дає можливість моделювати складні процеси в науці, техніці та економіці. У сфері інформаційних технологій такі функції застосовуються для аналізу даних, побудови алгоритмів, машинного навчання та оптимізації обчислювальних процесів, а їх дослідження включає вивчення властивостей, границь, неперервності та диференційованості.

Множина всеможливих впорядкованих сукупностей $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ дійсних чисел називається m - ***вимірним координатним простором.***

Позначається m - вимірний координатний простір R^m.

Кожна впорядкована сукупність $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ називається ***точкою координатного простору*** і позначається буквою M або $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$; числа $x_1, x_2, \dots, x_m$ називаються ***координатами точки*** M.

Координатний простір R^m називається ***евклідовим***, якщо між двома довільними точками $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$, $M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ визначена відстань

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \cdots + (x'_m - x''_m)^2}.$$

Позначається m - вимірний евклідовий простір $\boldsymbol{E^m}$.

У m - вимірному евклідовому просторі E^m виділяють такі множини точок:

$K_R(M_0) = \{M \in E^m : (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_m - x_m^0)^2 < R^2\}$ – відкрита m - вимірна куля з центром в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ радіуса R;

$\overline{K}_R(M_0) = \{M \in E^m: (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_m - x_m^0)^2 \leq R^2\}$ – замкнена m - вимірна куля з центром в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ радіуса R;

$S_R(M_0) = \{M \in E^m: (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_m - x_m^0)^2 = R^2\}$ – m - вимірна сфера з центром в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ радіуса R.

Відкрита m - вимірна куля радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці M_0 називається ε ***– околом точки*** M_0 і позначається $U_\varepsilon(M_0)$.

Отже, $U_\varepsilon(M_0) = K_\varepsilon(M_0)$.

Точка M_0 множини $D \subset E^m$ називається ***внутрішньою точкою*** *множини* D, якщо $\exists U_\varepsilon(M_0): U_\varepsilon(M_0) \subset D$.

Множина $D \subset E^m$ називається ***відкритою***, якщо довільна точка цієї множини є внутрішньою точкою (рис. 8.1.1).

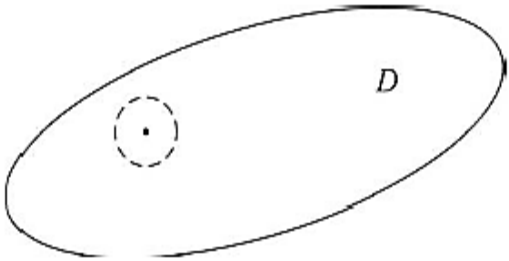


Рис. 8.1.1. Відкрита множина в m-вимірному евклідовому просторі

Множина $D \subset E^m$ називається ***обмеженою***, якщо $\exists K_R(M_0): D \subset K_R(M_0)$.

Множина $D \subset E^m$ називається ***зв'язною***, якщо довільні дві точки x' та x'' цієї множини можна з'єднати неперервною кривою, всі точки якої належать цій множині.



Рис. 8.1.2. Зв'язна множина в m-вимірному евклідовому просторі

Областю називається відкрита і зв'язна множина в просторі E^m.

Якщо кожній точці $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ деякої множини $D \subset E^m$ за деяким правилом f ставиться у відповідність єдине значення змінної z, то z ***називають функцією від m незалежних змінних*** $x_1, x_2, \dots, x_m$, визначеною на множині D.

При цьому пишуть $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$,

де $x_1, x_2, \dots, x_m$ – ***незалежні змінні (аргументи***),

z – ***залежна змінна (функція)***.

Множина D точок $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, в яких функція $z = f(M)$ визначена, називається ***областю визначення*** функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ і позначається $D(f)$.

Значення, які при цьому набуває залежна змінна z, називаються ***множиною значень*** функції і позначається $E(f)$.

Зокрема, при n = 2 кажуть, що задана ***функція двох змінних*** $\boldsymbol{z = f(x; y)}$, якщо кожній парі $(x; y)\, \epsilon D$ на площині поставлено у відповідність тільки одне число z.

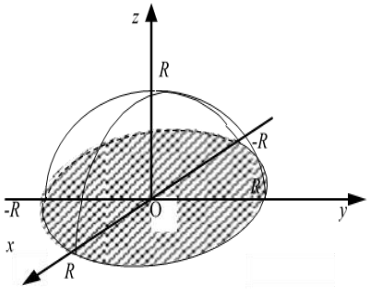
Областю визначення функції $z = f(x; y)$ є деяка множина точок (x, y) площини OXY. Якщо кожну пару значень x та y будемо зображати точкою $M(x, y)$ площини Oxy , тоді область визначення зобразиться деякою сукупністю точок на площині. Ця сукупність точок є геометричним зображенням області визначення. Зокрема, областю визначення функції двох змінних може бути вся площина або частина площини, обмежена певними лініями.

Значення функції $z = f(x; y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0; y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$.

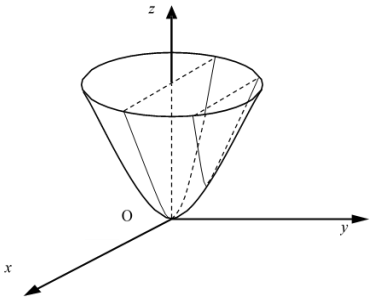
Графіком Γ_f функції $z = f\,(x, y)$ в прямокутній системі $Oxyz$ називається геометричне місце точок, множина таких точок $M(x, y, f\,(x, y))$ проєкція яких $(x, y) \in D\,(f) \in E^2$. Це геометричне місце точок утворює в тривимірному просторі певну поверхню, проєкцією якої на площину Oxy є множина D.

Наприклад, графіками функцій двох змінних є:

півсфера
$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$



еліптичний параболоїд
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



Способи задання функції декількох змінних в основному такі ж, як і для функції однієї змінної.

Функції m змінних можуть задаватися за допомогою однієї або декількох формул. Такий спосіб задання називається ***аналітичним***. Зокрема, якщо одна зі змінних виражена через всі інші, то кажуть, що функція задана ***явно***.

Наприклад, функції $z = \ln(x^2 + xy)$,

$$z = \begin{cases} x^2 + y^2, & |x| < 1, \quad |y| < 1; \\ \arcsin\dfrac{1}{x} + \arcsin\dfrac{1}{y}, & |x| \geq 1, \quad |y| \geq 1 \end{cases}$$

задані аналітичним способом, причому явно.

Якщо залежна змінна z не виражена явно через аргументи $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а зв'язок між $x_1, x_2, \ldots, x_m, z$ описано формулою $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, z) = 0$, то кажуть, що функція багатьох змінних задана ***неявно***.

Графічний і ***табличний*** способи задання функції застосовують лише для функції двох змінних.

Приклад задання функції:

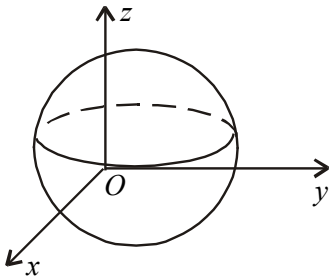
– *аналітично* (у вигляді формули), як-от: $z = x(y^2 + 2x)$;

– *таблично* (у вигляді таблиці), приміром:

y / *x*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

таблицею задана функція $z = xy$;

– *графічно*:



Для графічного зображення функції двох змінних використовуємо систему координат O*xyz* у тривимірному просторі. Кожній парі чисел *x* та *y* відповідає точка $P(x;\ y)$ площини O*xy*. У точці $P(x;\ y)$ проводимо пряму, перпендикулярну до площини O*xy*, та позначаємо на ній відповідне значення функції *z*; дістаємо в просторі точку Q з координатами (*x*; *y*; *z*), яка позначається символом Q (*x*; *y*; *z*). Точки Q, які відповідають різним значенням незалежних змінних, утворюють певну поверхню у просторі. Така поверхня є графічним зображенням функції $z = f(x; y)$.

На практиці побудувати графік функції складно, адже йдеться про зображення на площині просторової фігури, а це не завжди вдається.

Існує й інший спосіб геометричного зображення функції двох змінних – зображення за допомогою ліній рівня.

Лінією рівня називається множина всіх точок площини, в яких функція $z = f(x; y)$ набуває однакових значень.

Рівняння ліній рівня записують у вигляді

$f(x; y) = C$, де C – стала.

Накресливши кілька ліній рівня та зазначивши, яких значень набуває на них функція, дістанемо наближене уявлення про зміну функції. Елементарний приклад зображення функції за допомогою ліній рівня є зображення рельєфу місцевості на географічній карті. Висота місцевості над рівнем моря є функцією координат точки земної поверхні. За лініями рівня висоти, нанесеними на карту, легко уявити собі рельєф певної місцевості.

Поверхнею рівня функції $\boldsymbol{u = u(x, y, z)}$ називається поверхня $u(x, y, z) = C$, де C – стала.

Наприклад, для функції $z = x^2 + y^2$ лінії рівня $x^2 + y^2 = C$ – концентричні кола, а для функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ поверхні рівня $x^2 + y^2 + z^2 = C$ – концентричні сфери.

8.2. Границя функції багатьох змінних

Поняття границі та неперервності для функції декількох змінних є узагальненням понять границі та неперервності функції однієї змінної. Розглянемо послідовність точок $M_n\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right), n \in N$ евклідового простору E^m.

Точка $A(a_1, a_2, \dots, a_m) \in E^m$ називається ***границею послідовності точок*** $M_n\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N: \rho(M_n, A) < \varepsilon.$$

Той факт, що точка A є границею послідовності точок M_n, записується так:

$$\lim_{n \to \infty} M_n = A$$

або $M_n \to A$ при $n \to \infty$. Якщо послідовність точок має границю, то вона називається ***збіжною***, у протилежному випадку – ***розбіжною.***

На відміну від границі числової послідовності, спосіб прямування точок M_n до A довільний.

Теорема. Точка $A(a_1, a_2, \dots, a_m) \epsilon\, E^m$ є границею послідовності точок $M_n\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)$ при $n \to \infty$ тоді та лише тоді, коли $x_1^{(n)} \to a_1,\ x_2^{(n)} \to a_2, \dots, x_m^{(n)} \to a_m$ при $n \to \infty$.

Означення границі функції (Коші, на мові "$\varepsilon - \delta$").

Число b називається ***границею функції $f(M)$ в точці A***, якщо для довільного числа $\forall \varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх M, які задовольняють умову $0 < \rho(M, A) < \delta$, виконується нерівність $| f\ (M)\ - b\ | < \varepsilon$.

Якщо число b є границею функції $f(M)$ в точці A, то пишуть

$$\lim_{M \to A} f(M) = b \tag{8.2.1}$$

або

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b \tag{8.2.2}$$

Суть означення границі функції $f(M)$ в точці A полягає в тому, що для всіх точок M, відстань від яких до точки A є досить малою, значення функції $f(M)$ за абсолютною величиною як завгодно мало відрізняються від числа b.

Означення границі функції (Гейне, на мові послідовностей).

Число b називається ***границею функції $f\ (M)$ в точці A***, якщо $\forall \{M_n\} \in D\ (f), M_n \to A,\ M_n \neq A$ виконується умова $\{f(M_n)\ \} \to b$ при $n \to \infty$.

Оскільки спосіб прямування $M \to A$ довільний, то поняття границі функції багатьох змінних значно складніше, ніж поняття границі функції однієї змінної, для якої прямування до точки на осі можливе лише справа або зліва. Поняття односторонніх границь функції багатьох змінних не має змісту.

Теорема (*про єдиність границі функції багатьох змінних*).

Якщо функція $z = f\ (x_1, x_2, \dots, x_m) = f\ (M)$ має границю при $M \to A$, то ця границя єдина.

Теорема (*про необхідну умову існування границі функції багатьох змінних*). Якщо функція $z = f\ (M)$ має границю при $M \to A$, то вона обмежена в деякому околі точки A.

Так само, як і для функції однієї змінної, правильними є теореми про границю суми (різниці), добутку, частки функцій.

Теорема (*про арифметичні операції над границями функцій багатьох змінних)*.

Якщо $\lim\limits_{M\to A} f(M) = a$ і $\lim\limits_{M\to A} g(M) = b$, то

1) $\lim\limits_{M\to A}[f(M) \pm g(M)] = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{M\to A}[f(M) \cdot g(M)] = a \cdot b$.

Функція $f(M)$ називається ***нескінченно малою при*** $M \to A$, якщо

$$\lim_{M\to A} f(M) = 0 \qquad (8.2.3)$$

Теорема (*про нескінченно малу функцію*).

$$\lim_{M\to A} f(M) = b$$

тоді та лише тоді, коли існує функція $\alpha(M)$ така, що $f(M) = b + \alpha(M)$, причому $\alpha(M) \to 0$ при $M \to A$.

Порівняння нескінченно малих функцій багатьох змінних здійснюється так само, як і для функцій однієї змінної.

8.3. Неперервність функції багатьох змінних в точці і на множині

Функцію $f(M)$, визначену в околі точки A, називають ***неперервною в точці*** A, якщо

$$\lim_{M\to A} f(M) = f(A) \qquad (8.3.1)$$

Точка M може прямувати до точки A довільним способом, але весь час має залишатися в області визначення функції.

Величина

$\Delta_{x_i} f(M) = f\big(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta_{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_m\big) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m)$

називається ***частинним приростом*** функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в точці $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ за змінною x_i.

Величина

$$\Delta f(M) = f\left(x_1 + \Delta_{x_1}, x_2 + \Delta_{x_2}, \dots, x_m + \Delta_{x_m}\right) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

називається ***повним приростом*** функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в точці $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Теорема. Функція $f(M)$, визначена в околі точки $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$, ***є неперервною*** в цій точці тоді та лише тоді, коли

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0}} (f\left(a_1 + \Delta_{x_1}, a_2 + \Delta_{x_2}, \dots, a_m + \Delta_{x_m}\right) - f(a_1, a_2, \dots, a_m)) = 0$$

Функція $z = f(M)$ називається ***неперервною*** в області D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Наприклад, функція $f = x^2 + y^2$ неперервна на всій площині Oxy, оскільки повний приріст цієї функції в довільній точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$\begin{gathered}\Delta f(M_0) = (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - ({x_0}^2 + {y_0}^2) \\ = 2x_0\Delta x + 2y_0\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(M_0) = 0.\end{gathered}$$

Точка A називається ***точкою розриву*** функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, якщо функція в цій точці не є неперервною.

На відміну від функції однієї змінної, класифікації точок розриву функції двох і більше змінних не існує.

Функції багатьох змінних, які неперервні в точці або в замкненій області, мають низку аналогічних властивостей, що й функції однієї змінної, неперервні в точці чи на відрізку $[a, b]$.

Властивості неперервних функцій

1. (*Арифметичні операції над неперервними функціями*.) Якщо дві функції $f(M)$ і $g(M)$, що визначені на одній і тій же множині $D \subset R^m$, неперервні в точці $A \in D$, то функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ і $f(M)/g(M)$ неперервні в точці A (у випадку частки $g(M) \neq 0$).

2. (*Теорема Коші*). Якщо $z = f(M)$ неперервна в зв'язній області $D \subset R^m$, до того ж $\exists A \in D: f(A) < 0$ і $\exists B \in D\ f(B) > 0$, тоді можна знайти таку точку $M^* \in D$, що $f(M^*) = 0$.

3. (*Перша теорема Веєрштрасса*). Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в обмеженій замкненій області $D \subset R^m$, то ця функція обмежена в цій області.

4. (*Друга теорема Веєрштрасса*). Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в обмеженій замкненій області $D \subset R^m$, то ця функція в цій області досягає свого найбільшого і найменшого значень.

8.4. Частинні похідні функції багатьох змінних

Частинною похідною функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ за аргументом (змінною) x_k називається скінченна границя (якщо вона існує) відношення частинного приросту $\Delta_{x_k} z$ до приросту аргумента Δx_k, якщо $\Delta x_k \to 0$, тобто

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} z}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)}{\Delta x_k}.$$

Використовують такі позначення частинної похідної: $\frac{\partial z}{\partial x_k}$; $\frac{\partial f}{\partial x_k}$; z'_{x_k}; f'_{x_k}. Позначення $\frac{\partial z}{\partial x_k}$, на відміну від похідної функції однієї змінної, не можна розглядати як відношення двох диференціалів.

Геометричний зміст частинних похідних.

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ має частинні похідні в точці (x_0, y_0). Проведемо площину $y = y_0$, яка паралельна до координатної площини Oxz. Тоді $f'_x(x_0, y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ і площини $y = y_0$ в точці (x_0, y_0), тобто тангенсом кута нахилу цієї дотичної до додатного напряму осі Ox. Аналогічно $f'_y(x_0, y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної, що проходить через точку (x_0, y_0), до кривої, яка утворюється в результаті перетину поверхні $z = f(x, y)$ з площиною $x = x_0$.

Із означення частинних похідних випливає, що при обчисленні частинних похідних можна використовувати всі відомі формули

і правила для знаходження звичайних похідних функції однієї змінної. Треба лише пам'ятати, що при знаходженні частинної похідної за змінною x_k всі інші змінні вважаються сталими.

Наведемо основні правила диференціювання функцій та відповідні таблиці похідних, які є базовим інструментом для виконання подальших обчислень і застосовуються при дослідженні функцій багатьох змінних.

Правила диференціювання

Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо y = c, де c = const, то $y' = 0$.

Якщо функції $U(x)$ і $V(x)$ диференційовні в точці x, то в цій точці диференційовні також функції $U(x) \pm V(x)$, $U(x) \cdot V(x)$, а при додатковій умові $V(x) \neq 0$ диференційована і функція $\frac{U(x)}{V(x)}$, причому мають місце формули:

$$(U \pm V)' = U' \pm V'$$
$$(U \cdot V)' = U'V + UV'$$
$$(CU)' = CU', \qquad C - const$$
$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f\big(\varphi(x)\big)$. Функція $f(u)$ називається зовнішньою, а функція $\varphi(x)$ – внутрішньою, або проміжним аргументом.

Якщо $\varphi(x)$ – диференційовна в точці x, а функція $f(u)$ диференційовна в точці $u = \varphi(x)$, то складена функція $f\big(\varphi(x)\big)$ диференційовна в точці x, і при цьому справедлива формула:

$$\Big(f\big(\varphi(x)\big)\Big)' = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргумента за незалежною змінною.

Таблиця основних похідних

1. $(x)' = 1$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(a^x)' = a^x \ln a$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
10. $(ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
13. $(arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

8.5. Диференційовність функції багатьох змінних

Функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ називається ***диференційовною*** в точці $M(x_1,\ x_2, \dots,\ x_m)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді

$$\Delta z = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \cdots + \alpha_m\Delta x_m,$$

де $A_1, A_2, \dots, A_m \in R$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – нескінченно малі функції при $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_m \to 0$.

Теорема (*існування частинних похідних диференційовної функції*).

Якщо функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ диференційовна в точці $M(x_1,\ x_2, \dots,\ x_m)$, то в точці M існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}$, причому

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = A_1, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m} = A_m.$$

Для функції однієї змінної твердження щодо її диференційовності та існування похідної є рівносильними. У випадку функції декількох змінних ми маємо інше: існування частинних похідних – необхідна умова диференційовності функції в точці, але не є достатньою умовою диференційовності. Для диференційовності функції у точці недостатньо тільки існування частинних похідних – потрібно додатково вимагати неперервності частинних похідних.

Умову диференційованості функції в точці М можна записати в такій формі:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_m}\Delta x_m + o(\rho), \text{ де } \rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_m)^2}.$$

Теорема (*неперервність диференційовної функції*).

Якщо функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ диференційовна в точці $M(x_1,\ x_2, \dots,\ x_m)$, то вона неперервна цій точці.

Обернене твердження, як і для функції однієї змінної, неправильне, тобто неперервна в деякій точці функція не обов'язково диференційовна в цій точці.

Теорема (*достатні умови диференційовності*).

Якщо функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ має частинні похідні в деякому околі точки $M(x_1,\ x_2, \dots,\ x_m)$ і ці похідні неперервні в точці M, то функція диференційовна в цій точці.

Отже, щоб функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ була диференційованою в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні, і достатньо, щоб вона мала в цій точці неперервні частинні похідні.

8.6. Повний диференціал функції та його застосування до наближених обчислень

Диференціалом функції багатьох змінних називається головна (лінійна відносно приростів аргументів) частина приросту цієї функції, тобто

$$dz = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_m\Delta x_m$$

Оскільки $\Delta x_i = dx_i$ (dx_i називають диференціалом незалежної змінної), то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_m}dx_m. \qquad (8.6.1)$$

Доданки $dz_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}dx_i,\ i = \overline{1,m}$ називають ***частинними диференціалами функції*** $\boldsymbol{z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)}$.

Повний диференціал функції застосовується у наближених обчисленнях, оскільки при малих приростах аргументів приріст функції можна наближено замінити її диференціалом:

$$\Delta z \approx dz.$$

На цій властивості ґрунтується метод наближеного обчислення значень функції.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ повний диференціал дає змогу наближено обчислити значення функції в точках, розташованих поблизу заданої.

Наприклад, нехай потрібно обчислити наближене значення

$$K = f(a, b),$$

де K – значення функції $f(x, y)$ у точці (a, b), безпосереднє знаходження якого є складним.

У такому випадку застосовують метод наближених обчислень за допомогою повного диференціала, який реалізується за таким алгоритмом:

1. Величину K подають як значення функції двох змінних: $K = f(a, b)$.

2. Обирають точку (x_0, y_0), близьку до (a, b), у якій значення функції та її частинних похідних легко обчислюються.

3. Обчислюють значення функції та її частинні похідні в цій точці:

$$f(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0).$$

4. Знаходять прирости аргументів:

$$\Delta x = a - x_0, \Delta y = b - y_0.$$

5. Використовують формулу повного диференціала для наближеного обчислення:

$$f(a, b) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Таким чином, значення функції в точці (a, b) наближено визначається через її значення та похідні в близькій точці (x_0, y_0), що істотно спрощує обчислення.

8.7. Диференціювання складеної функції

Нехай на деякій множині D визначена складена функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, де $x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $x_2 = x_2(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $\dots$, $x_m = x_m(t_1, t_2, \dots, t_k)$, і нехай функції $x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $i = \overline{1, m}$, мають у деякому околі точки $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in D$ неперервні частинні похідні за змінними $t_1, t_2, \dots, t_k$, а функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ –

неперервні частинні похідні за змінними $x_1, x_2, \dots, x_m$ в деякому околі точки $(x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$. Тоді складена функція $z = f(x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$ диференційовна в точці $(t_1, t_2, \dots, t_k)$, причому

$$\frac{\partial z}{\partial t_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t_k} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k}. \quad (8.7.1)$$

Зауваження. Якщо $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, а $x_1 = x_1(t)$, ..., $x_m = x_m(t)$, то $z = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ є функцією однієї змінної t. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t}. \quad (8.7.2)$$

Цю формулу називають ***правилом знаходження повної похідної функції декількох змінних***.

8.8. Диференціювання неявно заданої функції

Розглянемо неявно задану функцію однієї змінної x: $F(x, y(x)) = 0$. Продиференціюємо цю рівність за змінною x: $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$, звідки

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (8.8.1)$$

Нехай $F(x, y, z(x, y)) = 0$ – неявно задана функція двох змінних x, y.

Тоді

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (8.8.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Зауважимо, що $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ є умовою існування неявно заданої функції.

Можна вивести аналогічні формули для обчислення частинних похідних неявно заданої функції m змінних $F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, z(f\ (x_1, x_2, \dots, x_m)\right) = 0$.

8.9. Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Частинні похідні першого порядку, в свою чергу, є функціями від тієї ж кількості змінних, що й вихідна функція. Тому має зміст задача про знаходження частинних похідних від похідних першого порядку.

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку функції, якщо вони існують, називаються ***другими частинними похідними*** *або* ***частинними похідними другого порядку*** *даної функції.*

Для частинних похідних другого порядку використовують такі позначення:

Якщо $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_i}$$

або

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \stackrel{\text{def}}{=} z''_{x_k x_i}.$$

Наприклад, якщо $z = f(x, y)$, то $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, або $f''_{xx}, f''_{yx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ відповідно.

Частинні похідні вищих порядків, які беруться за різними змінними, називаються ***мішаними***.

Теорема. Якщо функція $z = f\ (x, y)$ та її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ визначені та неперервні в точці $P(x, y)$ та в деякому її околі, то в цій точці мішані частинні похідні другого порядку рівні між собою, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Частинна похідна n-го порядку – це перша похідна від частинної похідної $(n-1)$-го порядку.

Для частинних похідних вищих порядків $(n \geq 3)$ зберігаються позначення, аналогічні до позначень частинних похідних першого і другого порядків. *Наприклад*, якщо $z = f(x, y)$, то

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \ldots; \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^{p-1} \partial y^q}\right),$$

де $p + q = n$.

Для мішаних частинних похідних n-го порядку правильна теорема.

Теорема. Нехай функція $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, її частинні похідні до $(n-1)$-го порядку включно та мішані частинні похідні n-го порядку визначені та неперервні в точці $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ та деякому її околі. Тоді мішані частинні похідні n-го порядку, які відрізняються лише черговістю диференціювання, в точці $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ є рівні між собою.

Наприклад, якщо $z = f(x, y)$, то $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$.

Другим диференціалом функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, який відповідає незалежним диференціалам (приростам) $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, називається диференціал від першого диференціалу:

$$d^2 z = d(dz).$$

Можна показати, що $d^2 z = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$.

Зокрема, якщо для $z = f(x, y)$ виконуються умови попередньої теореми, то

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \qquad (8.9.1)$$

Диференціалом n-го порядку *або* ***n-им диференціалом*** функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, який відповідає незалежним диференціалам (приростам) $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, називається диференціал від $(n-1)$-го диференціалу*:*

$$d^n z = d(d^{n-1} z). \qquad (8.9.2)$$

Якщо позначити диференціальний оператор першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_m}dx_m$ літерою L, то

$$d^n z \equiv L^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_m}dx_m\right)^n z.$$

Другий диференціал, а також диференціали вищих порядків функції багатьох змінних не зберігають властивості інваріантності форми при заміні змінних, тобто їх аналітичний вигляд залежить від обраної системи координат. Доведення цього твердження здійснюється аналогічно до випадку функції однієї змінної з урахуванням особливостей диференціювання функцій кількох змінних.

8.10. Застосування частинних похідних функції багатьох змінних

8.10.1. Дотична площина та нормаль до поверхні

Графіком функції двох змінних $z = f(x, y)$ в просторі E^3 є деяка поверхня S.

Пряма лінія називається ***дотичною*** до поверхні S в деякій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, якщо вона є дотичною до деякої кривої, що лежить на поверхні S і проходить через точку M_0.

Дотичною площиною до поверхні S в точці M_0 називається площина, що містить всі дотичні до ліній, які проведені на поверхні S через точку M_0 (рис. 8.10.1.1).

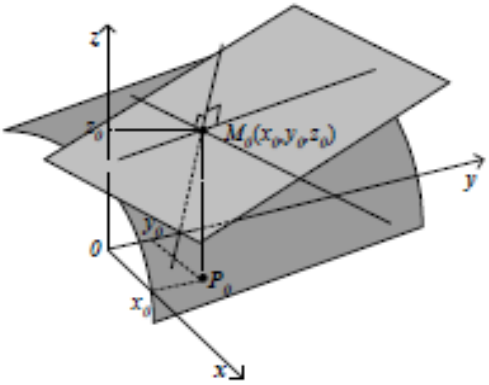


Рис. 8.10.1.1. Дотична площина та нормаль до поверхні

Рівняння дотичної площини до поверхні S, заданої неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$, в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(z - z_0) = 0.$$

Якщо поверхня S задана явно рівнянням $z = f(x, y)$, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial z} = 1.$$

Тому ***рівняння дотичної площини*** до поверхні S в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}(x - x_0) - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

(8.10.1.1)

Пряма, що проведена через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхні S перпендикулярно до дотичної площини, називається ***нормаллю*** до поверхні в точці M_0 (рис. 8.10.1.1).

Рівняння нормалі до поверхні S, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$, в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}$$

(8.10.1.2)

Якщо поверхня S задана рівнянням $z = f(x, y)$, то рівняння нормалі до поверхні S в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{1}$$

(8.10.1.3)

8.10.2. Похідна за напрямком. Градієнт

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0, y_0)$. Проведемо з точки $P_0(x_0, y_0)$ вектор $\vec{l}$. На векторі $\vec{l}$ розглянемо точку $P(x, y)$, яка належить околу, що розглядається. Нехай Δl – довжина вектора $\overrightarrow{P_0P}$.

Границя $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{f(P) - f(P_0)}{\Delta l}$ якщо вона існує, називається

похідною функції $z = f(x,y)$ ***за напрямом*** $\vec{l}$ ***у точці*** P_0 і позначається $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$.

Зокрема, $\frac{\partial z}{\partial x}$ є похідна функції $z = f(x,y)$ за додатним напрямом осі Ox, а $\frac{\partial f}{\partial y}$ – похідна функції $z = f(x,y)$ за додатним напрямом осі Oy.

Похідна за напрямом $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$ *характеризує швидкість зміни функції* $z = f(x,y)$ у точці $P_0(x_0, y_0)$ за напрямом $\vec{l}$.

Нехай α – кут нахилу вектора $\vec{l}$ до додатного напряму осі Ox (рис. 8.10.2.1), β – кут нахилу вектора $\vec{l}$ до додатного напряму осі Oy.

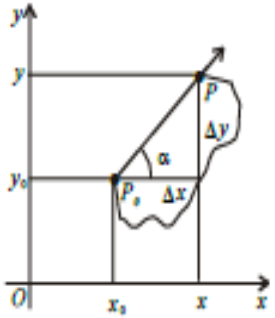


Рис. 8.10.2.1

Тоді $\cos\alpha = \frac{x-x_0}{\Delta l}$, $\cos\beta = \frac{y-y_0}{\Delta l}$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$. Одиничний вектор $\overrightarrow{l_0} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = (\cos\alpha\,;\cos\beta)$ співнапрямлений з вектором $\vec{l}$.

Теорема. Якщо функція $z = f(x,y)$ має в точці $P_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ за будь-яким напрямом $\vec{l}$, причому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta.$$

Аналогічно для функції трьох змінних $u = u(x, y, z)$ похідна за напрямом $\vec{l}$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ подається у вигляді:

$$\left.\frac{\partial r}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, $\overrightarrow{l_0} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = (\cos\alpha\,;\cos\beta\,;\cos\gamma)$.

Вектор $\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}\,;\,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}\right)$ називається ***градієнтом функції*** $z = f(x, y)$ у точці $P_0(x_0, y_0)$ і позначається $\overrightarrow{grad}\, z\,(P_0)$.

Іншими словами,

$$\overrightarrow{grad}\, z\,(P_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \vec{\imath} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \vec{\jmath} \qquad (8.10.2.1)$$

де $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ – одиничні орти.

Для функції трьох змінних $u = u(x, y, z)$ градієнт у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ визначається так:

$$\overrightarrow{grad}\, u\,(M_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \vec{\imath} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \vec{\jmath} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \vec{k} \qquad (8.10.2.2)$$

Градієнт функції $z = f(x, y)$ в точці M_0 спрямований завжди перпендикулярно до лінії рівня $f(x, y) = C$, яка проходить через точку M_0 (рис. 8.10.2.2).

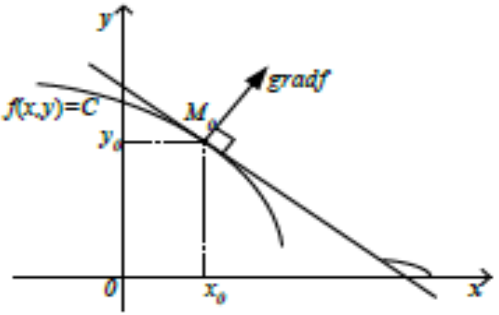


Рис. 8.10.2.2. Градієнт функції $z = f(x, y)$ та лінія рівня в точці M_0

8.10.3. Формули Тейлора та Маклорена

Теорема. Нехай функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ϵ $n-1$ разів диференційовною в ε-околі точки $M_0\,(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ i n-разів диференційовною в самій точці $M_0\,(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$. Тоді

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2f|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!}d^nf|_{M_0} + o(\rho^n),$$

де $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$, $M(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$.

(8.10.3.1)

Ця формула називається ***формулою Тейлора*** функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в точці $(M_0\,(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$.

Якщо $M_0\,(0, 0, \dots, 0)$, то формула називається ***формулою Маклорена.***

У випадку функції двох змінних формула Тейлора має вигляд:

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2\right. \\ &\left. + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0,\,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right] \\ &+ \dots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^n f(x_0,y_0) + o(\rho^n), \end{aligned}$$

де $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

(8.10.3.2)

8.10.4. Локальний екстремум функції декількох змінних

Функція $z = f(M)$ має в точці M_0 ***локальний максимум (мінімум),*** якщо $\exists\, \delta > 0\ \forall M \in \mathring{U}_\delta$: $f(M_0) > f(M)$ $(f(M_0) > f(M))$.

Точки локального максимуму (мінімуму) функції $z = f(M)$ називаються ***точками локального екстремуму.***

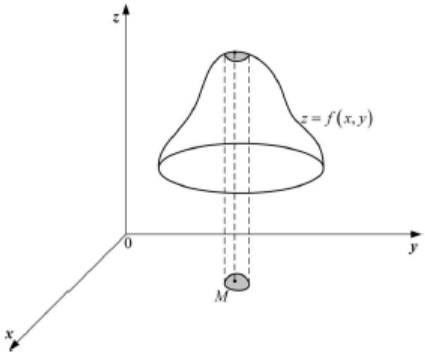


Рис. 8.10.4.1. Точка локального екстремуму функції

Точки, в яких частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ $(i = \overline{1,m})$ функції $z = f(M)$ не існують або дорівнюють нулю, називаються ***критичними (стаціонарними)*** точками функції.

Теорема *(необхідна умова екстремуму*). Нехай існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x_i}|_{M_0}$, $i = \overline{1,m}$ *і* M_0 – точка локального екстремуму функції $z = f(M)$.

Тоді $\frac{\partial z}{\partial x_i}|_{M_0} = 0,\ i = \overline{1,m}.$

Рівність нулю частинних похідних першого порядку функції $f(M)$ в точці M_0 не є достатньою умовою екстремуму.

Наприклад, функція $z = xy$ в околі точки $M_0(0,0)$. Очевидно, що $z(0;0) = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)} = \frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)} = 0$. Але $M_0(0,0)$ не може бути точкою локального екстремуму, оскільки в довільному $\delta -$ околі точки M_0 функція $z = xy$ приймає як додатні, так і від'ємні значення.

Іншою формою необхідних умов екстремуму функції $z = f(M)$ є умова $dz|_{M_0} = 0$, оскільки з того, що $\frac{\partial z}{\partial x_i}|_{M_0} = 0,\ i = 1,2,\dots,m$ вип.-ливає, що $dz|_{M_0} = 0$.

Розглянемо функцію двох змінних $f(x_1,\ x_2)$. Її другий диференціал має вигляд:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}(dx_1)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1dx_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(dx_2)^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j.$$

Аналогічно, якщо $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, то

$$d^2z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j \qquad (8.10.4.1)$$

Останній вираз називається ***квадратичною формою відносно*** $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$.

Квадратична форма відносно $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ називається ***додатньо (від'ємно) визначеною*** в точці M_0, якщо $\forall\, dx_1, dx_2, \dots, dx_m$, що не всі дорівнюють нулю одночасно, ця форма приймає лише додатні (від'ємні) значення.

Позначення: $d^2z|_{M_0} > 0$ – додатньо визначена квадратична форма в точці M_0, $d^2z|_{M_0} < 0$ – від'ємно визначена квадратична форма в точці M_0.

Якщо квадратична форма в точці M_0 приймає як додатні, так і від'ємні значення для різних наборів $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$, то вона називається ***знакозмінною*** в точці M_0.

Матрицею квадратичної форми $d^2z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$ є матриця

$$A = \begin{pmatrix} z_{x_1x_1} & z_{x_1x_2} & \cdots & z_{x_1x_m} \\ z_{x_2x_1} & z_{x_2x_2} & \cdots & z_{x_2x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{x_mx_1} & z_{x_mx_2} & \cdots & z_{x_mx_m} \end{pmatrix} \qquad (8.10.4.2)$$

Матриця A є симетричною, оскільки

$$z_{x_1x_2} = z_{x_2x_1}, \dots, z_{x_ix_j} = z_{x_jx_i}, i \neq j, i, j - \overline{1, m}.$$

Головними мінорами симетричної матриці A назвемо такі визначники:

$$A_1 = z_{x_1x_1},\ A_2 = \begin{vmatrix} z_{x_1x_1} & z_{x_1x_2} \\ z_{x_2x_1} & z_{x_2x_2} \end{vmatrix}, \dots,\ A_m = |A|$$

1. Квадратична форма є додатно визначеною тоді та лише тоді, коли всі головні мінори матриці A додатні: $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_m > 0$.

2. Квадратична форма є від'ємно визначеною тоді та лише тоді, коли $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, A_4 > 0, \dots, \dots$.

Теорема (*достатні умови екстремуму*). Нехай функція $z = f(M)$ – один раз диференційовна в деякому околі стаціонарної точки M_0 і два рази диференційована в точці M_0. Тоді:

1) якщо $d^2z|_{M_0} > 0$, то M_0 – точка локального мінімуму функції $z = f(M)$;

2) якщо $d^2z|_{M_0} < 0$, то M_0 – точка локального максимуму функції $z = f(M)$;

3) якщо $d^2z|_{M_0}$ – знакозмінна квадратична форма, то в точці M_0 немає екстремуму.

Якщо $d^2z|_{M_0} = 0$, то нічого не можна сказати про існування екстремуму в точці M_0. Потрібні дослідження за допомогою диференціалів вищих порядків.

Окремо розглянемо алгоритм дослідження диференційовних ***функцій двох змінних*** $z = f(x, y)$ ***на екстремум.***

1. Знайти стаціонарні точки функції зі системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = 0 \end{cases}.$$

2. У кожній стаціонарній точці обчислити:

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \\ = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2.$$

2.1. Якщо $\Delta > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою локального екстремуму функції $z = f(x, y)$.

Причому, якщо $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – ***локальний мінімум***, якщо $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – ***локальний максимум***.

2.2. Якщо $\Delta < 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ не є точкою локального екстремуму функції $z = f(x, y)$.

3. Обчислити значення функції $f(x, y)$ в точках максимуму та мінімуму.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то для знаходження екстремуму потрібні дослідження за допомогою диференціалів вищих порядків.

8.10.5. Найбільше і найменше значення функції двох змінних у замкненій області

Функція $z = f(x, y)$ задана і неперервна в обмеженій замкненій області D, обов'язково має в цій області найбільше і найменше значення. Цих значень функція досягає або в стаціонарних точках (які знаходяться всередині D), або в точках, які належать межі області D.

Тому, щоб знайти найбільше і найменше значення диференційовної функції двох змінних $z = f(x, y)$ у замкненій області D, потрібно:

1. Знайти частинні похідні першого порядку і, прирівнявши їх до нуля, знайти стаціонарні точки функції $z = f(x, y)$.

2. Знайти стаціонарні точки, які потрапляють в область D і обчислити значення функції в цих точках.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x, y)$ на межі області D.

4. З усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

8.10.6. Умовний екстремум функції. Функція Лагранжа та її застосування для дослідження на умовні екстремуми

Умовний екстремум – це найбільше або найменше значення функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яке вона набуває за наявності додаткових умов (обмежень).

Найчастіше обмеження задаються у вигляді рівнянь (або системи таких рівнянь):

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m$$

Задачу

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max\ (min),$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i (i = \overline{1, m})$$

називають ***задачею на умовний екстремум*** або ***класичною задачею оптимізації***.

Щоб знайти розв'язок цієї задачі, вводять набір змінних λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ які називають ***множниками Лагранжа*** та складають ***функцію Лагранжа***

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_1) + \lambda_2(g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_2) + \dots + \lambda_m(g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_m).$$

Знаходять частинні похідні $\frac{\partial L}{\partial x_j}$ $(j = \overline{1,m})$ і $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}$ $(i = \overline{1,m})$ і розглядають систему $n + m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g}{\partial x_j} \qquad (j = \overline{1,m}); \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -b_i + g_i(x_1, x_2, .., x_n) \quad (i = \overline{1,m}) \end{cases}$$

$n + m$ невідомими $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Довільний розв'язок системи рівнянь визначає точку $X = ({x_1}^0, {x_2}^0, \dots, {x_n}^0)$, у якій може бути екстремум функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Отже, розв'язавши систему рівнянь, одержують усі точки, в яких функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може мати екстремум. Подальше дослідження знайдених точок проводять так само, як і у випадку безумовного екстремуму.

Таким чином, знаходження екстремуму функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max\ (min)$ при умові $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i (i = \overline{1,m})$ методом множників Лагранжа включає такі етапи:

1. Складають функцію Лагранжа.

2. Знаходять частинні похідні від функції Лагранжа за змінними x_j λ_i і прирівнюють їх до нуля.

3. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_j} \qquad (j = \overline{1,m}) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -b_i + g_i(x_1, x_2, .., x_n) \quad (i = \overline{1,m}) \end{cases}$, знаходять точки, у яких функція задачі може мати екстремум.

4. Серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, у яких досягається екстремум, і обчислюють значення функції у цих точках.

Розглянемо дослідження умовного екстремуму для функції двох змінних.

Умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$ називають екстремум цієї функції за умови, що її аргументи пов'язані рівнянням зв'язку $g(x, y) = 0$. Для знаходження умовного екстремуму функції $f(x, y)$ за умови $g(x, y) = 0$ складають функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

де λ– невизначений сталий множник.

Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими x, y, λ:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай $P_0 = (x_0, y_0, \lambda)$ – довільний розв'язок цієї системи і

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda) \\ g'_x(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda) \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці $P_0 = (x_0, y_0, \lambda)$ умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – то умовний мінімум.

Геометричний зміст задачі умовного екстремуму полягає в тому, що в точках, де функція досягає умовного максимуму або мінімуму, поверхня рівня $f(x, y) = const$ дотикається до кривої (або поверхні) обмеження $g(x, y) = 0$, причому в цих точках градієнти функції та обмеження є колінеарними.

8.11. Розв'язування прикладів та задач



1. Знайти область визначення функції двох змінних і зобразити її на площині:

1) $z = 9\lg(x - 5) - 7\sqrt[8]{y - 3}$;

2) $z = \ln(4y^2 - 2x + 2)$;

3) $z = \arcsin(x + y)$.

Розв'язання.

1) Логарифмічна функція $\lg(x-5)$ визначена лише для додатних значень аргумента, а корінь $\sqrt[8]{y-3}$ парного степеня – для невід'ємних, тому

$$\begin{cases} x-5>0, \\ y-3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ y\geq 3 \end{cases}$$

Отже,

$$D(f)=\{(x,y)\in R^2: x>5 \wedge y\geq 3\}$$

Геометрично це зобразимо на рис. 8.11.1.

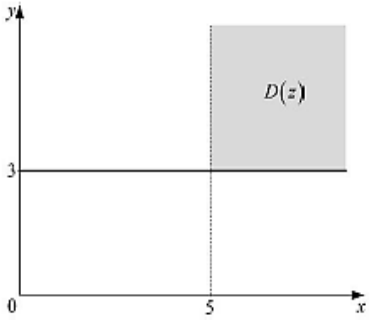


Рис. 8.11.1.

2) Логарифмічна функція $z=\ln(4y^2-2x+2)$ визначена для додатних значень аргумента, тому

$$4y^2-2x+2>0 \text{ або } x<2y^2+1.$$

Тобто межею області визначення буде парабола, симетрична стосовно додатної пів осі з вершиною в точці (1; 0) (рис. 8.11.2). Областю визначення функції є множина всіх точок площини, які містяться поза вітками параболи $x=2y^2+1$, тобто

$$D(f)=\{(x,y):\ x<2y^2+1\}.$$

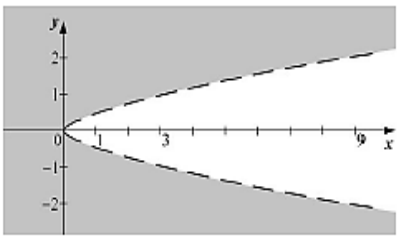


Рис. 8.11.2.

3) Область визначення функції $z = \arcsin(x + y)$ є сукупність точок $(x, y) \in R^2$, що задовольняють нерівності $-1 \le x + y \le 1$ (рис. 8.11.3).

На площині *XOY* ця область являє собою смугу, яка обмежена паралельними прямими $x + y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$, включаючи точки самих прямих.

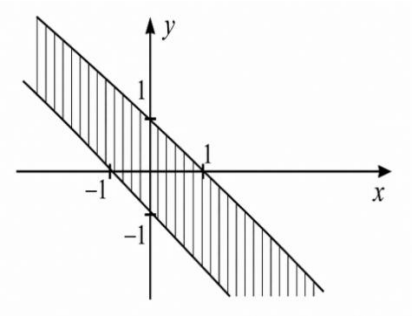


Рис. 8.11.3.

◊◊◊

2. Знайти область визначення функції $u(x, y, z)$, якщо $u = \ln(-x^2 - y^2 + 2z)$.

Розв'язання.

Заданий аналітичний вираз існує в усіх точках $(x, y, z) \in R^3$, в яких $-x^2 - y^2 + 2z > 0$, або $x^2 + y^2 < 2z$. Цю нерівність задовольняють точки (x, y, z) , що містяться всередині параболоїда обертання $x^2 + y^2 = 2z$, не включаючи його поверхню.

◊◊◊

3. Побудувати лінії рівня функцій:

1) $u = x^2 + y^2$;

2) $u = ln\, x + ln\, y$.

Розв'язання.

1) Лініями рівня функції двох змінних називають множину точок площини, у яких функція набуває сталого значення: $u(x, y) = C$, де C – стала.

Для заданої функції $u = x^2 + y^2$ рівняння ліній рівня має вигляд $x^2 + y^2 = C$.

Розглянемо декілька значень сталої.

При $C = 1$ отримаємо $x^2 + y^2 = 1$. Це рівняння кола з центром у початку координат $(0; 0)$ та радіусом $r = 1$.

При $C = 2$ маємо $x^2 + y^2 = 2$. Це коло з центром у точці $(0; 0)$ та радіусом $r = \sqrt{2}$.

Отже, лініями рівня функції $u = x^2 + y^2$ є концентричні кола з центром у початку координат.

Зі збільшенням значення C радіус кола збільшується.

Для побудови ліній рівня необхідно на координатній площи-ні зобразити два кола радіуса 1 та $\sqrt{2}$ (рис. 8.11.4).

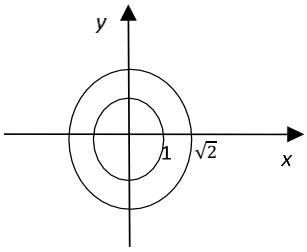


Рис. 8.11.4.

2) Лінії рівня задаються рівнянням $ln\, x + ln\, y = C$.

За властивістю логарифмів маємо $ln\, x\, y = C$. Звідси $xy = e^C$.

Тоді $y = \frac{e^C}{x}$.

Оскільки логарифмічна функція визначена лише за умов $x > 0$, $y > 0$, то лінії рівня – це гілки гіпербол, що лежать у першій координатній чверті (рис. 8.11.5).

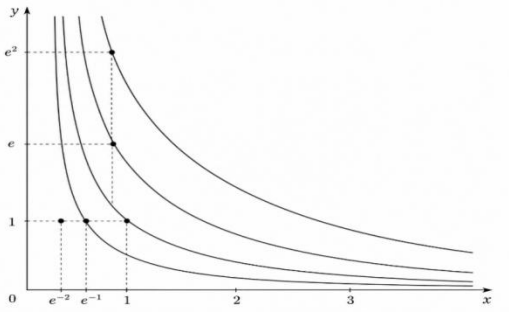


Рис. 8.11.5.

✧✧✧

4. Обчислити границі функцій двох змінних:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{2x-y^2+1}{x^2+y^2}$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{4xy}{x^2+y^2}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} = \dfrac{\sin(x+y)}{\ln(1+x+y)}$.

Розв'язання.

1) Функція $z = \frac{2x-y^2+1}{x^2+y^2}$ є раціональною функцією двох змінних. Оскільки знаменник у точці $(2;1)$ не дорівнює нулю, то функція є неперервною в цій точці.

Тому границя дорівнює значенню функції в точці $(2;1)$:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{2x-y^2+1}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 2-1^2+1}{2^2+1^2} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

2) Для знаходження границі розглянемо значення функції за різних способів прямування до точки $(0;0)$.

Спочатку будемо прямувати до точки $(0;0)$ вздовж прямої $y = x$. Отримаємо

$$\lim_{x\to 0} \frac{4xx}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} 2 = 2.$$

Прямуючи до точки $(0;\ 0)$ вздовж прямої $y = 2x$, отримаємо

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x\cdot 2x}{x^2+(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{8}{5} = \frac{8}{5}.$$

У разі існування границі функції двох змінних її значення не залежить від способу прямування до відповідної точки. Оскільки при різних способах прямування до точки $(0;0)$ отримано різні значення, то відповідна границя не існує.

3) Функція має невизначеність

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}} \frac{\sin(xy)}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\},$$

тому використовуємо першу важливу границю $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}}y\cdot\frac{\sin(xy)}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}}y\cdot 1=5\cdot 1=5.$$

4) Для знаходження $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}=\dfrac{\sin(x+y)}{\ln(1+x+y)}$ зробимо заміну $x+y=t$.

Очевидно, що при $x\to 0, y\to 0$ змінна $t\to 0$, а границя функції двох змінних дорівнює границі функції однієї змінної t:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x+y)}{\ln(1+x+y)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\ln(1+t)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{\frac{1}{(1+t)}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\cos t\,(1+t)=1.$$

◊◊◊

5. Показати, що функція $f(x,y)=\frac{x}{x^2-y^2}$ неперервна в будь-якій точці своєї області визначення.

Розв'язання.

Задана функція в усіх точках $(x;y)$, крім точок, в яких $x^2=y^2$. Нехай $(x_0;y_0)$ – деяка точка з області визначення функції f, тобто ${x_0}^2\neq {y_0}^2$.

Тепер для будь-якої послідовності точок $(x_n;y_n)$ такої, що ${x_n}^2\neq {y_n}^2$ і $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$при $n\to\infty$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}f(x,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{{x_n}^2-{y_n}^2}=\frac{x_0}{{x_0}^2-{y_0}^2}=f(x_0;y_0).$$

Отже, задана функція неперервна в довільній точці $(x_0;y_0)$з області визначення.

◊◊◊

6. Знайти частинні похідні функцій:

1) $z=ln\,(x^2+3\,y^2)$;

2) $z=x\;arctg\;(xy^2)$;

3) $z=x^y+y^x+x-2y$.

Розв'язання.

1) Знайдемо частинну похідну за x, вважаючи y сталою:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+3\,y^2}.$$

Знайдемо частинну похідну за y, вважаючи x сталою:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y}{x^2+3\,y^2}.$$

2) Для знаходження похідної за x застосовуємо правило похідної добутку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = arctg\,(xy^2) + \frac{xy^2}{1+x^2\,y^4}.$$

Частинна похідна за y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2y}{1+x^2\,y^4}.$$

3) Знайдемо частинну похідну за x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + y^x \ln y + 1.$$

Знайдемо частинну похідну за y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x + xy^{x-1} - 2.$$



7. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$u(x,y,z) = x^2y^3 - z^x + (y+2z)^5.$$

Розв'язання.

Диференціюючи функцію за змінною x та вважаючи y і z сталими, отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = 2xy^3 - z^x\,ln\,z.$$

Диференціюючи функцію за змінною y та вважаючи x і z сталими, маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = 3x^2y^2 + 5(y+2z)^4.$$

Диференціюючи функцію за змінною z та вважаючи x і y сталими, отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z = -xz^{x-1} + 10(y+2z)^4.$$

◊◊◊

8. Знайти повний диференціал функції:

1) $f(x,y,z) = z^2 5^{6x+4y}$;

2) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt[4]{z+1}$.

Розв'язання.

1) Знайдемо частинні похідні функції $f(x,y,z)$, диференціюючи її почленно за відповідними змінними та вважаючи інші змінні сталими:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6z^2 5^{6x+4y}\, ln\, 5;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4z^2 5^{6x+4y}\, ln\, 5;$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z5^{6x+4y}.$$

Тоді повний диференціал функції визначається за формулою:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Отже,

$$df = 6z^2 5^{6x+4y}\, ln\, 5\, dx + 4z^2 5^{6x+4y}\, ln\, 5\, dy + 2z5^{6x+4y}dz.$$

2) Знайдемо частинні похідні, вважаючи інші змінні сталими:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}\sqrt{y}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt[3]{x}\frac{1}{2\sqrt{y}};$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{4\sqrt[4]{z+1}^3}.$$

Повний диференціал функції:

$$df = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}\sqrt{y}dx + \sqrt[3]{x}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy + \frac{1}{4\sqrt[4]{z+1}^3}dz.$$

◊◊◊

9. Знайти наближене значення: $\sqrt{(3{,}02)^2 - (1.97)^3}$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^3}$.

Потрібно наближено обчислити значення $\sqrt{(3{,}02)^2-(1{,}97)^3}$.

Запишемо числа у вигляді:

$$3{,}02=\underbrace{3}_{x}+\underbrace{0{,}02}_{\Delta x},\qquad 1{,}97=\underbrace{2}_{y}-\underbrace{0{,}03}_{\Delta y}$$

Спочатку знайдемо значення функції в точці $(3;2)$:

$$f(3{,}2)=\sqrt{3^2-2^3}=1.$$

Знайдемо частинні похідні і обчислимо їх у точці $(3;2)$:

$$f'_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^3}},\ f'_x(3{,}2)=\frac{3}{\sqrt{3^2-2^3}}=3,$$

$$f'_y=\frac{-3y^2}{2\sqrt{x^2-y^3}},\ f'_y(3{,}2)=\frac{-3\cdot 2^2}{2\sqrt{3^2-2^3}}=-6.$$

Для наближеного обчислення використаємо формулу повного диференціала:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y.$$

Отже,

$$\sqrt{(3{,}02)^2-(1.97)^3}\approx 1+3\cdot 0{,}02-6\cdot(-0{,}03)=1{,}24.$$

♢♢♢

10. Обчислити $\frac{\partial z}{\partial t_1},\frac{\partial z}{\partial t_2}$, якщо $z=e^{x^2+3y^2},\ x=\sin(t_1t_2),\ y=t_1^2$.

Розв'язання.

Оскільки функція $z=e^{x^2+3y^2}$ залежить від змінних x і y, які, своєю чергою, залежать від t_1,t_2, то для знаходження похідних використовуємо правило диференціювання складної функції

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Знайдемо потрібні частинні похідні за t_1:

$$\frac{\partial z}{\partial t_1}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1}=e^{x^2+3y^2}\cdot 2x\cdot t_2\cos(t_1t_2)+e^{x^2+3y^2}\cdot 6y\cdot 2t_1$$

$$=2e^{x^2+3y^2}\cdot(x\,t_2\cos(t_1t_2)+6yt_1).$$

Аналогічно знаходимо похідну за t_2:

$$\frac{\partial z}{\partial t_2}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_2}=e^{x^2+3y^2}\cdot 2x\cdot t_1\cos(t_1t_2)+e^{x^2+3y^2}\cdot 6y\cdot 0$$

$$=2xt_1e^{x^2+3y^2}\cos(t_1t_2).$$

✧✧✧

11. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, якщо:

1) $z^3 - 3xyz = 5$;

2) $x^2 \sin z + z^3 \sin y = 4^x y^5$.

Розв'язання.

1) Тут $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - 5$.

Диференціюючи за відповідними змінними, отримаємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz, \frac{\partial F}{\partial y} = -3xz, \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$$

і

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

2) Знайдемо частинні похідні функції $F(x, y, z) = x^2 \sin z + z^3 \sin y - 4^x y^5$.

Диференціюючи за відповідними змінними, отримаємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x = 2x \sin z - 4^x y^5 \ln 4;$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = F'_y = z^3 \cos y - 4^x \cdot 5y^4;$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = F'_z = x^2 \cos z + 3z^2 \sin y.$$

Оскільки функція $z = z(x, y)$ задана неявно, то частинні похідні знаходимо за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x \sin z - 4^x y^5 \ln 4}{x^2 \cos z + 3z^2 \sin y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{z^3 \cos y - 4^x \cdot 5y^4}{x^2 \cos z + 3z^2 \sin y}.$$

◊◊◊

12. Знайти похідну неявно заданої функції $y^5 + 2x^2y^2 + xy - 42 = 0$ в точці $x = 1$, $y = 2$.

Розв'язання.

Оскільки $F(x, y) = y^5 + 2x^2y^2 + xy - 42,$ то
$\frac{\partial F}{\partial x} = 4xy^2 + y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 5y^4 + 4x^2y + x$. Тоді

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{4xy^2+y}{5y^4+4x^2y+x}.$$

У точці $x = 1, y = 2$ маємо $\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=1,\\ y=2}} = -\frac{4\cdot1\cdot2^2+2}{5\cdot2^4+4\cdot1^2\cdot2+1} = -\frac{18}{89}$.

◊◊◊

13. Для функції $z = x^3\cos(xy^2)$ обчислити частинні похідні другого порядку.

Розв'язання.

Частинні похідні другого порядку знаходимо послідовним диференціюванням частинних похідних першого порядку. При цьому застосовуємо правило добутку та правило диференціювання складної функції.

Спочатку знаходимо похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2\cos(xy^2) - x^3y^2\sin(xy^2),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^3\sin(xy^2)\cdot 2xy = -2x^4y\sin(xy^2).$$

Диференціюємо їх ще раз.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x\cos(xy^2) - 3x^2y^2\sin(xy^2) - 3x^2y^2\sin(xy^2) - x^3y^4\cos(xy^2),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x^4\sin(xy^2) - 2x^4 2xy\cos(xy^2) =$$
$$-2x^4\sin(xy^2) - 4x^5y^2\cos(xy^2),$$

Шукаємо мішані похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2\cos(xy^2) - x^3y^2\sin(xy^2)) = -3x^2 2xy\sin(xy^2) -$$
$$2x^3y\sin(xy^2) - x^3y^2 2xy\cos(xy^2) = -6x^3y\sin(xy^2) - 2x^3y\sin(xy^2) -$$
$$2x^4y^3\cos(xy^2) = -8x^3y\sin(xy^2) - 2x^4y^3\cos(xy^2).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2x^4 y \sin(xy^2)) = -8x^3 y \sin(xy^2) - 2x^4 y y^2 \cos(xy^2) = -8x^3 y \sin(xy^2) - 2x^4 y^3 \cos(xy^2).$$

Отже, мішані похідні збігаються: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

✧✧✧

14. Знайти частинні похідні другого порядку $f(x, y, z) = \frac{3^x y^4}{z+1}$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3^x \ln 3 \cdot y^4}{z+1}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3^x \cdot 4y^3}{z+1};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{3^x \cdot y^4}{(z+1)^2}.$$

Далі, диференціюючи отримані похідні ще раз за відповідними змінними, одержимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{3^x \ln^2 3 \cdot y^4}{z+1}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{3^x \ln 3 \cdot 4y^3}{z+1};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{3^x \cdot 12y^2}{z+1}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{3^x \ln 3 \cdot y^4}{(z+1)^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\frac{3^x \cdot y^4}{(z+1)^3}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{3^x \cdot 4y^3}{(z+1)^2}.$$

✧✧✧

15. Знайти другий диференціал функції $f = sin(x^2 y^3)$.

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \, cos(x^2 y^3); \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 \, cos(x^2 y^3).$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3\, cos(x^2y^3) + 2xy^3(-2xy^3\, sin(x^2y^3))$$
$$= 2y^3\, cos(x^2y^3) - 4x^2y^6\, sin(x^2y^3);$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3x^2 2y\, cos(x^2y^3) + 3x^2y^2(-3x^2y^2\, sin(x^2y^3))$$
$$= 6x^2y\, cos(x^2y^3) - 9x^4y^4\, sin(x^2y^3);$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \cdot 3y^2\, cos(x^2y^3) + 2xy^3(-3x^2y^2\, sin(x^2y^3))$$
$$= 6xy^2\, cos(x^2y^3) - 6x^3y^5\, sin(x^2y^3).$$

Другий диференціал функції знаходимо за формулою

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

Отже,

$$d^2f = (2y^3\, cos(x^2y^3) - 4x^2y^6\, sin(x^2y^3))dx^2 +$$
$$+2(6xy^2\, cos(x^2y^3) - 6x^3y^5\, sin(x^2y^3))dxdy +$$
$$+(6x^2y\, cos(x^2y^3) - 9x^4y^4\, sin(x^2y^3))dy^2.$$



16. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні:

1) $x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2xy - 3xz + 4yz - 3 = 0$ у точці $M_0(2; -1; 0)$;

2) $xy^4 + yz^3 + ze^x = 2$ в точці $M_0(0; 1; 1)$.

Розв'язання.

1) Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x = 2x + 2y - 3z;$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = F'_y = 6y + 2x + 4z;$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = F'_z = -4z - 3x + 4y.$$

Обчислимо їх значення у точці $M_0(2; -1; 0)$:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} = F'_x(2, -1, 0) = 2 \cdot 2 + 2(-1) - 3 \cdot 0 = 2;$$
$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} = F'_y(2, -1, 0) = 6 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = -2;$$
$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} = F'_z(2, -1, 0) = -4 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = -10.$$

Рівняння дотичної площини

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(z-z_0)=0.$$

Тому:

$$2(x-2)-2(y+1)-10z=0.$$

Після скорочення і зведення подібних доданків отримаємо:

$$x-y-5z-3=0.$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-10}.$$

Після скорочення отримаємо:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-5}.$$

2) Для поверхні $F(x,y,z)=xy^4+yz^3+ze^x-2$ знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F'_x=y^4+ze^x;$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=F'_y=4xy^3+z^3;$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}=F'_z=3yz^2+e^x.$$

У точці $M_0(0;1;1)$ маємо:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=2; \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=1; \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=4.$$

Рівняння дотичної площини:

$$2(x-0)+1(y-1)+4(z-1)=0;$$
$$2x+y+4z-5=0.$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{4}.$$

Рівняння дотичної площини:

$$2x-4y+z-5=0.$$

✧✧✧

17. Написати рівняння нормалі і дотичної площини до параболоїда в точці $z=x^2+y^2$ у точці $M_0(1;-2;5)$.

Розв'язання.

Поверхня задана явно рівнянням $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

Тому рівняння нормалі до поверхні в точці M_0 має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{-\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{-\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{1},$$

а рівняння дотичної площини:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

Знайдемо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 2x; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 2y;$$

У точці $M_0(1; -2; 5)$ маємо: $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} = 2, \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} = -4.$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 5}{-1}.$$

Рівняння дотичної площини: $2(x - 1) - 4(y + 2) - (z - 5) = 0.$

Після спрощення отримаємо: $2x - 4y - z - 5 = 0.$



18. Знайти похідну функції $f = x^3 + y^2 e^z$ у точці $A(2; 1; 0)$ в напрямку до точки $B(-4;\ 3;\ 3)$.

Розв'язання.

Знайдемо вектор напрямку:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-4 - 2; 3 - 1; 3 - 0) = (-6; 2;\ 3).$$

Обчислимо його довжину:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + 3^2} = 7.$$

Напрямні косинуси вектора:

$$\cos\alpha = -\frac{6}{7}, \qquad \cos\beta = \frac{2}{7}, \qquad \cos\gamma = \frac{3}{7}.$$

Знайдемо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 e^z.$$

Обчислимо їх у точці $A(2;1;0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A = 3\cdot 2^2 = 12, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A = 2\cdot 1\cdot e^0 = 2, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_A = 1^2\cdot e^0 = 1.$$

Похідна за напрямком обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A cos\,\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A cos\,\beta + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_A cos\,\gamma,$$

Підставимо знайдені значення:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = 12\cdot\left(-\frac{6}{7}\right) + 2\cdot\frac{2}{7} + 1\cdot\frac{3}{7} = -\frac{65}{7} = -9\frac{2}{7}.$$

Від'ємне значення похідної означає, що в заданому напрямку функція зменшується.

◊◊◊

19. Знайти похідну функції $z = arctg(xy)$ у точці $(1;2)$ за напрямом бісектриси першого координатного кута.

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2}.$$

Оскільки напрям збігається з бісектрисою першого координатного кута, то $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ а напрямний одиничний вектор має вигляд:

$$\vec{l} = \left(\cos\frac{\pi}{4}; \cos\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Похідна за напрямком:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{(1;2)} = \left.\frac{y}{1+x^2y^2}\right|_{(1;2)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left.\frac{x}{1+x^2y^2}\right|_{(1;2)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

◊◊◊

20. Знайти градієнт функції:

1) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ у точці $M_0(0;1;2)$;

2) $u = x^2 - yz^3 + xy^4$ у точці $M_0(1;0;2)$.

Розв'язання.

1) Обчислимо частинні похідні в точці $(2;-1;1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0;1;2)} = (2x-2yz)|_{(0;1;2)} = -4;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0;1;2)} = (2y-2xz)|_{(0;1;2)} = 2;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(0;1;2)} = (2z-2xy)|_{(0;1;2)} = 4.$$

Отже, $\overrightarrow{grad}\, u(0;1;2) = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$.

2) Обчислимо частинні похідні в точці $M_0(1;0;2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y^4, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2\cdot 1 + 0^4 = 2;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -z^3 + 4xy^3, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -2^3 + 4\cdot 1\cdot 0^3 = 8;$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -3yz^2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -3\cdot 0\cdot 2^2 = 0.$$

Отже, $\overrightarrow{grad}\, u(1;0;2) = 2\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$.



21. Дослідити на екстремум функцію $z = x^4 + y^4 - 4xy$.

Розв'язання.

Для дослідження функції на екстремум використаємо алгоритм знаходження локального екстремуму функції двох змінних.

1. Знайдемо стаціонарні точки функції зі системи рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x(x,y) = 0 \\ z'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = 4x^3 - 4y, \qquad z'_y = 4y^3 - 4x.$$

Прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}.$$

Звідси:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 \end{cases}.$$

Підставимо $y = x^3$ у друге рівняння, отримаємо:

$$x = (x^3)^3 = x^9,$$
$$x^9 - x = 0,$$
$$x(x^8 - 1) = 0.$$
$$x_1 = 0, \qquad y_1 = x_1^3 = 0;$$
$$x_2 = 1, \qquad y_2 = x_2^3 = 1;$$
$$x_3 = -1, \qquad y_3 = x_3^3 = -1.$$

Отже, маємо три стаціонарні точки $M_1(0;0), M_2(1;1), M_3(-1;-1)$.

2. У кожній стаціонарній точці обчислимо:

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} z''_{xx}(x_0, y_0) & z''_{xy}(x_0, y_0) \\ z''_{yx}(x_0, y_0) & z''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 12x^2, \qquad z''_{yy} = 12y^2, \qquad z''_{xy} = -4.$$

2.1. Для точки $M_1(0;0)$:

$$z''_{xx} = 0, \qquad z''_{yy} = 0, \qquad z''_{xy} = -4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-4) \cdot (-4) = -16 < 0.$$

Отже, точка $M_1(0;0)$ не є точкою локального екстремуму.

2.2. Для точки $M_2(1;1)$:

$$z''_{xx} = 12, \qquad z''_{yy} = 12, \qquad z''_{xy} = -4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 12 \cdot 12 - (-4) \cdot (-4) = 128 > 0.$$

Оскільки $\Delta(1;1) > 0$ і $z''_{xx} = 12 > 0$, то точка $M_2(1;1)$ є точкою локального мінімуму.

2.3. Для точки $M_3(-1;-1)$:

$$z''_{xx} = 12, \qquad z''_{yy} = 12, \qquad z''_{xy} = -4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 12 \cdot 12 - (-4) \cdot (-4) = 128 > 0.$$

Оскільки $\Delta(-1;-1) > 0$ і $z''_{xx} = 12 > 0$, то точка $M_3(-1;-1)$ є точкою локального мінімуму.

Функція має дві точки локального мінімуму $M_2(1;1)$, $M_3(-1;-1)$.

3. Обчислимо значення функції $z = x^4 + y^4 - 4xy$ в точках $M_2(1;1), M_3(-1;-1)$.

$$z(1;1) = 1^4 + 1^4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -2;$$
$$z(-1;-1) = (-1)^4 + (-1)^4 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -2;$$

Отже, у точках локального мінімуму функція набуває значення

$$z_{min} = -2.$$

◊◊◊

22. Дослідити на екстремум функцію $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 2z$.

Розв'язання.

Для знаходження стаціонарних точок функції обчислимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z + 2.$$

Прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y + 2 = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$M_0(0;-1;-1)$ – стаціонарна точка.

Складемо матрицю квадратичної форми і обчислимо її головні мінори:

$$u_{xx} = 2, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{xz} = 0, \quad u_{yy} = 2, \quad u_{yz} = 0, \quad u_{zz} = 2.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = 2 > 0, \; A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \; A_3 = |A| = 8 > 0.$$

Отже, $d^2z|_{M_0} > 0$ – додатньо визначена квадратична форма, тому $M_0(0;-1;-1)$ – точка локального мінімуму функції $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 2z, u_{min} = u(M_0) = 1 + 1 - 2 - 2 = -2$.

◊◊◊

23. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - y^2 + 4xy - 6x - 2y - 1$ в області, обмеженій лініями $x + y = 5, x = 0, y = 0$.

Розв'язання.

Потрібно знайти найбільше і найменше значення функції

$$z = x^2 - y^2 + 4xy - 6x - 2y - 1$$

в області, обмеженій лініями

$$x + y = 5,\ x = 0,\ y = 0.$$

Область є замкненою і обмеженою, тому функція досягає в ній найбільшого та найменшого значень.

Спочатку знайдемо стаціонарні точки функції. Для цього обчислимо частинні похідні першого порядку та прирівняємо їх до нуля:

$$z'_x = 2x + 4y - 6, \qquad z'_y = -2y + 4x - 2.$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ -2y + 4x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Маємо стаціонарну точку $(1; 1)$.

Оскільки точка $(1; 1)$ належить області, знайдемо значення функції в ній: $z(1, 1) = 1^2 - 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 = -5$.

Тепер дослідимо функцію на межі області G.

Межа області складається з трьох відрізків:

I) $x = 0, 0 \le y \le 5$;

II) $y = 0, 0 \le x \le 5$;

III) $y = 5 - x, 0 \le x \le 5$.

I: $x = 0, 0 \le y \le 5$.

Тоді

$$z = 0^2 - y^2 + 4 \cdot 0 \cdot y - 6 \cdot 0 - 2y - 1 = -y^2 - 2y - 1.$$

Знайдемо похідну:

$$z' = -2y - 2 = 0, \qquad y = -1.$$

Точка $y = -1$ не належить проміжку $0 \le y \le 5$.

Тому обчислюємо значення функції на кінцях проміжку

$$z(0) = -0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1,$$
$$z(5) = -5^2 - 2 \cdot 5 - 1 = -36.$$

II: $y = 0, 0 \le x \le 5$.

Тоді

$$z = x^2 - 0^2 + 4 \cdot x \cdot 0 - 6x - 2 \cdot 0 - 1 = x^2 - 6x - 1.$$

Знайдемо похідну:

$$z' = 2x - 6 = 0, \qquad x = 3.$$

Точка $x = 3$ належить проміжку $0 \le x \le 5$.

Обчислюємо значення функції в цій точці

$$z(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 - 1 = -10.$$

Значення функції на кінцях проміжку:

$$z(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 - 1 = -1,$$
$$z(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 - 1 = -6.$$

III: $y = 5 - x, 0 \le x \le 5$.

Підставимо у функцію:

$z = x^2 - (5 - x)^2 + 4 \cdot x \cdot (5 - x) - 6x - 2 \cdot (5 - x) - 1 = -4x^2 + 26x - 36.$

Знайдемо похідну: $z' = -8x + 26 = 0, x = {}^{13}/_{4}$.

Точка $x = {}^{13}/_{4}$ належить проміжку $0 \le x \le 5$.

Обчислюємо значення функції в цій точці:

$$z\left(\frac{13}{4}\right) = -4 \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^2 + 26 \cdot \left(\frac{13}{4}\right) - 36 = 15{,}25$$

Значення функції на кінцях проміжку:

$$z(0) = -4 \cdot 0^2 + 26 \cdot 0 - 36 = -36,$$
$$z(5) = -4 \cdot 5^2 + 26 \cdot 5 - 36 = -6.$$

З усіх знайдених значень вибираємо найбільше і найменше:

$$z_{min} = -36, \qquad z_{max} = 15{,}25.$$

Найменше значення функція набуває у точці $(0; 5)$, а найбільше – у точці $(\frac{13}{4}; \frac{7}{4})$.



24. Знайти умовний екстремум функції $z = 2x - y$ при умові $x^2 + y^2 = 5$.

Розв'язання.

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 2x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Знайдемо частинні похідні:

$$L'_x = 2 + 2x\lambda, \qquad L'_y = -1 + 2y\lambda, \qquad L'_\lambda = x^2 + y^2 - 5.$$

Прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 2+2x\lambda=0 \\ -1+2y\lambda=0 \\ x^2+y^2-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{\lambda} \\ y=\frac{1}{2\lambda} \\ \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2=5 \end{cases}.$$

Система має два розв'язки:

$$x_1=2, \qquad y_1=-1, \qquad \lambda_1=\frac{1}{2},$$
$$x_2=-2, \qquad y_2=1, \qquad \lambda_2=-\frac{1}{2}.$$

Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа:

$$L''_{xx}=2\lambda, \qquad L''_{yy}=2\lambda, \qquad L''_{xy}=0,$$

звідки

$$d^2L=2\lambda(dx^2+dy^2).$$

При $\lambda_1=\frac{1}{2}$ маємо, що $d^2L>0$, отож точка $M_1(2,-1)$ є умовним мінімумом функції $z=2x-y$.

При $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ маємо, що $d^2L<0$, отож точка $M_2(-2,1)$ є умовним максимумом функції $z=2x-y$.

Обчислимо значення функції:

$$z(-2;1)=2(-2)-1=-5,$$
$$z(2;-1)=2\cdot 2-(-1)=5.$$

Отже,

$$z_{min}=-5, z_{max}=5.$$

8.12. Контрольні запитання

1. Що таке функція двох змінних (багатьох змінних)?
2. Які існують способи задання функції багатьох змінних?
3. Дайте означення області визначення функції двох змінних.
4. Дайте означення межі області визначення функції.
5. Що являє собою графік функції ($z=f(x,y)$)?
6. Які лінії називаються лініями рівня функції двох змінних?
7. Які поверхні називаються поверхнями рівня функції багатьох змінних?

8. Як будують лінії рівня функції двох змінних?

9. Який геометричний зміст ліній рівня?

10. Дайте означення границі функції двох змінних.

11. Сформулюйте означення неперервності функції двох змінних у точці.

12. Які точки називаються точками розриву функції?

13. Що таке частинний приріст функції?

14. Що таке повний приріст функції двох змінних?

15. Сформулюйте означення частинних похідних функції двох змінних.

16. Який геометричний зміст частинних похідних?

17. Як знаходять частинні похідні вищих порядків?

18. Скільки існує частинних похідних другого порядку для функції двох змінних?

19. Сформулюйте правило для мішаних похідних функції $(z = f(x, y))$.

20. За яких умов мішані похідні є рівними?

21. Яку функцію двох змінних називають диференційовною?

22. Сформулюйте достатню умову диференційовності функції.

23. Якщо функція диференційовна в точці, чи буде вона неперервною в цій точці?

24. Якщо функція неперервна в точці, чи буде вона диференційовною в цій точці?

25. Що називають повним диференціалом функції двох змінних?

26. За якою формулою обчислюється повний диференціал функції?

27. Який геометричний зміст повного диференціала?

28. Для чого використовують повний диференціал?

29. Як знаходять наближені значення функції за допомогою повного диференціала?

30. Що таке похідна за напрямком?

31. Як обчислюється похідна за напрямком?

32. Що таке градієнт функції? Що він характеризує?

33. Який напрямок має вектор градієнта?

34. Як пов'язані градієнт і похідна за напрямком?

35. Який геометричний зміст градієнта функції?

36. Якщо функція задана неявно рівнянням $(F(x,y,z)=0)$, то за якими формулами знаходять частинні похідні?

37. Що називається неявною функцією?

38. Що називається дотичною площиною до поверхні $(F(x,y,z)=0)$?

39. Що називається нормаллю до поверхні $(F(x,y,z)=0)$?

40. Запишіть рівняння дотичної площини до поверхні $(F(x,y,z)=0)$.

41. Запишіть рівняння нормалі до поверхні $(F(x,y,z)=0)$.

42. Який геометричний зміст дотичної площини?

43. Що називають екстремумом функції двох змінних?

44. Сформулюйте необхідну, достатню умови існування екстремуму функції $(z=f(x,y))$.

45. Коли функція $(z=f(x,y))$ має локальний максимум, мінімум?

46. Що таке умовний екстремум функції?

47. У чому полягає метод Лагранжа для знаходження умовного екстремуму?

48. Що називається функцією Лагранжа?

49. Як складають систему рівнянь методу Лагранжа?

50. У яких задачах застосовують метод множників Лагранжа?

8.13. Завдання для самостійного виконання

1. Дано функцію $f(x,y)=\frac{x+3y}{x-3y}$. Знайти:

а) $f(1;0)$; в) $f(3;-1)$; г) $f(-x;-y)$;

б) $f(0;1)$; г) $f(1;-3)$; д) $f\left(\frac{1}{x};\frac{1}{y}\right)$.

2. Дано функцію $f(x,y)=sin\frac{y}{x}$. Знайти:

а) $f(1;0)$; в) $f(4;\pi)$;

б) $f\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$; г) $f\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Знайти область визначення функцій.

3. $f(x,y)=\frac{3xy}{2x-5y}$.

4. $f(x,y)=\ln(25-x^2-y^2)$.

5. $f(x,y)=\sqrt{ysinx}$.

6. $f(x,y)=arctg\frac{x}{x+y}$.

7. $f(x,y)=\arcsin(x-y)$.

8. $f(x,y)=\frac{x^3y}{3+x-y}$.

9. $f(x,y)=\ln(2-x-y)+\sqrt{x}$.

10. $f(x,y)=\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[6]{1-y^2}$.

11. $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$.

12. $f(x,y)=\frac{1}{x-2}-lnxy$.

13. $f(x,y)=\ln(2-x^2-y^2)+\sqrt{x-y}$.

14. $f(x,y)=\arccos(x+2y)$.

15. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-5}$.

16. $f(x,y)=\ln(6-x-y)+\frac{x}{y}$.

17. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-5}}$.

18. $f(x,y)=\arcsin\frac{2x}{y}$.

19. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.

20. $f(x,y)=\frac{2}{6-x^2-y^2}$.

21. $f(x,y)=\frac{1}{x-2}-lnxy$.

22. $f(x,y)=\arcsin(x+y)$.

23. $f(x,y)=\sqrt{\frac{xy}{x+y}}$.

24. $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2-x}$.

25. $f(x,y)=y-\sqrt{y^2-x^2}$.

26. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}$.

Знайти лінії рівня функцій і побудувати їхні графіки.

27. $f(x,y)=x+y$.

28. $f(x,y)=x^2+y^2$.

29. $f(x,y)=\frac{y}{x}$.

30. $f(x,y)=x^2-y^2$.

31. $f(x,y)=x^2-4x+y^2$.

32. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+2y^2}$.

33. $f(x,y)=\sqrt{xy}$.

34. $f(x,y)=\frac{1}{lnx+lny}$.

Знайти границі функцій.

35. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

36. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{(x+y)^2}{(x^2+y^4)^2}$.

37. $\lim\limits_{\substack{x\to4\\y\to2}}\frac{\sqrt{3xy+1}-5}{x^2y^2-64}$.

38. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\y\to3}}\frac{5^{x-y}-1}{x-y}$.

39. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

40. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

41. Показати, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$ не існує.

42. Показати, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$ не існує.

43. Показати, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Знайти частинні похідні першого порядку по кожній незалежній змінній від функцій.

44. $z = x^2y - x + y + 5$.

45. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

46. $z = 7x^5y - 4x^6 - 2y^2x + 5xy - 8$.

47. $z = 6x^3y - 5y^5x^2 - 2\sqrt{x}\cdot y$.

48. $z = \frac{y}{x}$.

49. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

50. $z = \frac{1}{x^2+y}$.

51. $z = \frac{x^2+y^2}{5}$.

52. $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

53. $z = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

54. $z = (3x^2y + 4xy^2 + 5)^3$.

55. $z = arctg(y^2 + x^2)$.

56. $z = arcsin(\sqrt{xy})$.

57. $z = arccos(x - y^2)$.

58. $z = cos\sqrt{2x^2+y^2}$.

59. $z = ln(\sqrt{xy} - 1)$.

60. $z = 2 - ln\sqrt{xy}$.

61. $z = ln(5x^2y - y)$.

62. $z = -4xy + sin5xy^2$.

63. $z = x^2ysinx - 3y$.

64. $f(x,y,z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$.

65. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

66. $f(x,y,z) = tg\frac{xy}{z}$.

67. $f(x,y,z) = \left(\frac{y}{x}\right)^z$.

68. $f(x,y,z) = 7^{xy} + sin(xz)$.

69. $f(x,y,z) = (x^2+y^3)^z$.

70. $f(x,y,z) = lntgxyz$.

71. $f(x,y,z) = \ln(x^3 + xz - 4yz^2)$.

Знайти повні диференціали першого порядку функцій.

72. $z = \frac{x+3y}{4x+5y}$.

73. $z = \sqrt{x+y}$.

74. $z = \sqrt{2x^2-4y^2}$.

75. $z = cos\sqrt{xy}$.

76. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

77. $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$.

78. $z = lnsin\frac{x}{y}$.

79. $f(x,y,z) = (xy)^z$.

80. $f(x,y,z) = xyz - \frac{x}{yz}$.

81. $f(x,y,z) = x^{z^y}$.

82. $f(x,y,z) = \sqrt{xz^2+2y}$.

83. $f(x,y,z) = tg(x+y)e^{\frac{x}{y}}$.

Знайти наближене значення.

84. $\sqrt{1{,}99^4 + 3{,}02^2}$.

85. $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

86. $3{,}01 + \sqrt{3{,}01^2 + 4{,}02^2}$.

87. $\frac{1}{1{,}03^2+2{,}97^2}$.

88. $0{,}98^{3{,}03}$.

89. $2{,}99^{2{,}02}$.

90. $\frac{2{,}03^2}{\sqrt{2{,}03^3+1{,}05^3+7}}$.

91. $0{,}99^{5{,}05}$.

92. $\frac{4}{1{,}03^2+2{,}97^2}$.

93. $3{,}03^4 + 1{,}98^3 + 2$.

94. $3{,}02^3\sqrt[5]{0{,}97}$.

95. $(3 + \sqrt{1{,}97})^{3{,}02}$.

96. $\frac{13}{3{,}98^2-6{,}03^2}$.

97. $\frac{3{,}01\cdot 2{,}03}{3{,}01^2+2{,}03^2}$.

98. $cos59^0 sin32^0$.

99. $cos61^0 sin47^0$.

100. $tg46^0 sin29^0$.

101. $arctg\frac{1{,}04^2}{0{,}98}$.

102. $\ln(\sqrt{4{,}02} - \sqrt[3]{0{,}97})$.

103. $\ln(2{,}02^2 - \sqrt[3]{0{,}98 - 8})$.

Знайти похідну складених функцій.

104. $z = e^{x-2y}$, де $x = sint, y = t^3$.

105. $z = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, де $x = sint, y = cost$.

106. $z = \sqrt{x + y + 3}$, де $x = lnt, y = t^2$.

107. $z = e^{y-2x-1}$, де $x = cost, y = sint$.

108. $z = arctg(x + y)$, де $x = t^2 + 2, y = 4 - t^2$.

109. $z = arcsin\frac{x^2}{y}$, де $x = sint, y = cost$.

110. $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, де $x = sin2t, y = tg^2 t$.

111. $z = \ln(e^{-x} + e^y)$, де $x = t^2, y = t^3$.

112. $z = \sqrt{x^2 + y + 2}$, де $x = lnt, y = t$.

113. $z = \frac{x^2}{y+1}$, де $x = 1 - 2t, y = arctgt$.

114. $z = x^y$, де $x = e^t,\ y = lnt$.

115. $z = x^2 e^y$, де $x = cost, y = sint$.

Знайти частинні похідні функцій, що задані неявно.

116. $x^2y + xy^2 + y^2 - 1 = 0$.

117. $x^4y + x^3y^2 - y^5 - 5 = 0$.

118. $xe^y + ye^x + e^{xy} = 0.$ **119.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

120. $x^2 + y^2 + z^2 - 4xz = 2.$

121. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = 15.$

122. $x^2 - y^2 - z^2 + 2x - 4y + 6z + 12 = 0.$

123. $xy = z^2 - 1.$ **124.** $\sqrt{x^2 + y^2} + z^3 - 3z = 3.$

125. $e^z - xyz - x + 1 = 0.$ **126.** $e^y + y + 2x + z = 1.$

Знайти повні диференціали функцій.

127. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$ **128.** $z^3 - 3xyz = a^2.$

129. $\frac{x}{z} = ln\frac{x}{y}.$ **130.** $yz = arctg(xz).$

Знайти повні диференціали другого порядку функцій.

131. $z = x^4 + 3x^2y^2 + y^4.$ **132.** $z = arctg\frac{y}{x}.$

133. $z = \ln(x^2 + 3xy + 2y^2).$ **134.** $z = e^{2x^2 - 5xy + 3y^2}.$

135. $z = arctg(3x^2 - 5xy).$ **136.** $z = arctg(5x - 3xy + y^2).$

137. $z = sin^2(xy + 2y^2).$ **138.** $z = cos^2(3x^2 - 2xy + 3).$

139. $z = \ln(x^3 + 3xy).$ **140.** $z = \ln(1 + e^{2xy}).$

141. $z = lnsin(2x^2 + xy).$ **142.** $z = lncos(3xy^2 + x + 2y).$

143. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$ **144.** $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}).$

145. $z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$ **146.** $z = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

147. Знайти $d^2 f(2;1)$ для $f(x,y) = \frac{x}{x-y}.$

148. Знайти $d^2 f(0;1)$ для $f(x,y) = x^2 + \frac{x}{y}.$

149. Дано функцію $z = \frac{x^2+y^2}{x-y}$. Довести, що

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(x+y)}{x-y}.$$

150. Дано функцію $z = x^2y + y^2x$. Довести, що

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3).$$

151. Дано функцію $z = xe^{\frac{y}{x}}$. Довести, що

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

152. Дано функцію $z = e^{xy}$. Довести, що

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

153. Знайти частинні похідні третього порядку функції

$$z = 2x^3 + x^2y + xy^2 + 2y^2.$$

154. Знайти частинні похідні четвертого порядку функції

$$z = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4.$$

155. $f(x,y) = \sin(x + cosy)$. Знайти $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

156. $f(x,y) = xln(xy)$. Знайти $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.

157. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, якщо $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

158. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $x + y + z = e^z$.

Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до заданих поверхонь у вказаних точках.

159. $z = 3 + x^2 - y^2$ у точці $(1;\ 2;\ 0)$.
160. $z = 3 + (x-1)^2 - (y-2)^2$ у точці $(2;\ 3;\ 4)$.
161. $z = xy$ у точці $(1;\ 1;\ 1)$.
162. $2x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 5 = 0$ у точці $(1;\ 1;\ -1)$.
163. $x^3 + xy^2 + x^2y - z^3 = 7$ у точці $(2;\ 0;\ 1)$.
164. $5xz^2 + 3x^3y^3 - 2y^4z - 5 = 0$ у точці $(0;\ 1;\ 2)$.
165. $2x^4z - 3x^2y^2 + 4y^3z^3 + 1 = 0$ у точці $(1;\ -1;\ -4)$.
166. $y^3 + 2xy^2z - 3x^2z^2 + 17 = 0$ у точці $(-1;\ 1;\ 1)$.
167. $x^3z^2 - 4y^3z + 2xy^2 - 8 = 0$ у точці $(-1;\ 1;\ 2)$.
168. $2x^4z - 3x^2y^2 + 4y^3z^3 + 1 = 0$ у точці $(1;\ -1;\ -4)$.
169. $2x^2z^3 - xy^3 + 3x^3z - 16 = 0$ у точці $(0; -1;\ 2)$.
170. $3x^2z^3 + 2x^4yz + y^3 + 1 = 0$ у точці $(-1;\ 1;\ 0)$.

171. Знайти дотичну площину до поверхні $9x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 36$, паралельну площині $x - y - z + 1 = 0$.
172. Знайти дотичну площину до поверхні $9x^2 + 16y^2 - 16z^2 = 144$, паралельну площині $x + y + z = 0$.
173. Знайти похідну функції $f(x,y) = 2^{xy^2}$ у точці $M(3;\ 1)$ за напрямом вектора $\vec{a} = (-8;\ 6)$.

174. Знайти похідну функції $f(x,y) = x\sqrt{x} - \sqrt{y}$ у точці $M(3;\ 1)$ за напрямом вектора $\vec{l}$, що утворює кут $\alpha = 30^0$ з додатним напрямом осі Ox.

175. Знайти похідну функції $f(x,y) = arctg\ xy$ у точці $M(1;\ 1)$ за напрямом вектора бісектриси першого координатного кута.

176. Знайти похідну функції $f(x,y) = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ у точці $(2;\ 1)$ за напрямом від цієї точки до початку координат.

177. Знайти похідну функції $f(x,y,z) = (x+y)^2z^3$ у точці $M(2;-1;\ 2)$ за напрямом вектора $\vec{a} = (7;6;6)$.

178. Знайти похідну функції $f(x,y,z) = yln(1+x^2)$ у точці $M(0;1;\ 1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(-1;-1;\ 3)$.

179. Знайти градієнт функції $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+6}$ у точці $(3;1)$.

180. Знайти градієнт функції $f(x,y) = x^2\ cos\ y - ln\ x \cdot sin\ y$ у точці $M\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

181. Знайти градієнт функції $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-$ $-2y-6z$ точках $O(0;0;\ 0)$, $A(2;0;\ 1)$. В яких точках градієнт дорівнює нулю?

182. Визначити градієнт і похідну функції $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ в точці $M(2;1)$ в напрямку від точки M до точки $N\ (5;5)$.

183. Визначити градієнт і похідну функції $z = x^2 + y^2$в точці $M\ (6;8)$ напрямку від точки M до точки $N\ (0;2)$.

184. Визначити градієнт і похідну функції $z = xe^y$ в точці $M\ (1;4)$ в напрямку лінії $xy = 4$ в сторону спадання аргумента x.

185. Визначити градієнт і похідну функції $z = x^2 + y^2 + xy$ в точці $M(3;1)$ в напрямку лінії $4x - 3y - 9 = 4$ в сторону зростання аргумента x.

Дослідити на екстремум функції.

186. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y.$

187. $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 8y + 1.$

188. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

189. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$

190. $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y + 3.$

191. $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}.$

192. $z = 1 - \sqrt[3]{x^2+y^2}$.

193. $z = \frac{1}{9}(3x + 2y)^3 + \frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy + y$.

194. $z = \frac{1}{9}(-3x + 2y)^3 - \frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy - 5y$.

195. $z = \frac{1}{6}(2x + y)^3 + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + y$.

196. $z = \frac{1}{3}(x + 2y)^3 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 2xy - y$.

197. $z = -\frac{1}{3}(x - 2y)^3 + \frac{1}{2}x^2 - y^2 - 2xy + 3y$.

Дослідити на екстремум неявно задані функції.

198. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

199. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0$.

200. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - -y^2 - 4x$ в трикутнику зі сторонами $y = x + 1, y = 0, x = 3$.

201. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - 2xy - -y^2 + 4x + 1$ в трикутнику зі сторонами $x + y + 1 = 0, y = 0, x = -3$.

202. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 + +2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ в трикутнику зі сторонами $y = 2x, y = 2, x = 0$.

203. Знайти найбільше і найменше значення функції в $z = x^2 - -2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$ в квадраті $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$.

204. Знайти найбільше і найменше значення функції в $z = 5x^2 + +3xy + y^2 + 4$ в квадраті $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$.

205. Знайти найбільше і найменше значення функції в $z = 2x^2 - -4xy + 5y^2 - 8 + 4$ в квадраті $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4$.

206. Знайти найбільше і найменше значення функції в $z = (x^3 - -3x)(2 - y^2)$ в прямокутнику $-2 \le x \le 2, -1 \le y \le 1$.

207. Знайти найбільше і найменше значення функції в $z = x^2 + +2xy - y^2 - 2x + 2y$ в області, обмеженій параболою $y = x^2 - 4$ і віссю OX.

208. Знайти найбільше і найменше значення функції в $z = x^2 - y^2$ у крузі $x^2 + y^2 \le 4$.

209. Знайти найбільше і найменше значення функції в $z = xy$ у крузі $x^2 + y^2 \le 1$.

210. Знайти найбільше і найменше значення функції в $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ у замкненій області, обмеженій прямими $x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0$.

211. Знайти найбільше і найменше значення функції в $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ у замкненій області, обмеженій прямими $x = 0, y = 0, x + y + 3 = 0$.

Знайти умовні екстремуми функцій

212. $z = x^2 + y^2$, якщо $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

213. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, якщо $x + y + 3 = 0$.

214. $z = xy$, якщо $x + y = 1$.

215. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, якщо $x + y = 2$.

216. $z = xy^2$, якщо $x + 2y = 1$.

217. $z = 2x + y$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

218. $z = x^2 + y^2$, якщо $3x + 4y = 12$.

219. $z = x^3 + y^3$, якщо $x + y = 2$.

220. $z = 6 - 4x - 3y$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

221. $z = x^4 + y^4$, якщо $x + y = 4$.

222. $z = \frac{x}{2} + y$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

223. $z = x + 2y$, якщо $x^2 + y^2 = 5$.

Розділ 9

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

9.1. Подвійний інтеграл

Поняття визначеного інтеграла безпосередньо пов'язане зі задачею обчислення площі плоскої фігури та є одним із фундаментальних понять математичного аналізу. Подальший розвиток інтегрального числення та дослідження функцій кількох змінних зумовлюють необхідність узагальнення цього поняття на випадок функцій двох змінних. Таке узагальнення приводить до введення подвійного інтеграла, який використовується для дослідження та обчислення величин, що залежать від двох незалежних змінних.

Подвійний інтеграл широко застосовується під час розв'язування задач геометрії, механіки та фізики. За його допомогою можна знаходити об'єми тіл, маси неоднорідних пластин, координати центра мас та інші величини, пов'язані з розподілом функції на певній області. У цьому розділі розглянемо означення подвійного інтеграла, його властивості та основні методи обчислення.

9.1.1. Означення та основні властивості подвійного інтеграла

Нехай в обмеженій замкненій області D з кусково гладкою межею Г задана неперервна функція $z = f(x, y)$. Розіб'ємо область D на n довільних частин $D_1, D_2, \dots, D_n$, які не мають спільних внутрішніх точок. Площі областей D_i (елементарних областей) позначимо $\Delta S_i, i = 1,2, \dots, n$.

Діаметром області D_i назвемо число $d_i = \max\limits_{M,N \in D_i} |MN|$, тобто довжину найбільшої хорди, яка з'єднує дві довільні точки області D_i.

Число $d = \max\{d_1, \dots, d_n\}$ назвемо ***діаметром розбиття***.

У кожній елементарній області D_i виберемо довільним чином точку $P_i(\varepsilon_i, \eta_i)$ (рис. 9.1.1.1). Позначимо $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ значення функції $f(x, y)$ у вибраних точках.

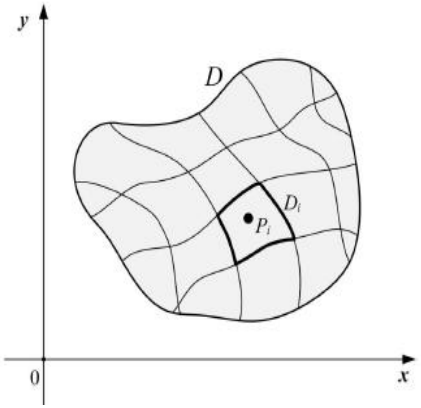


Рис. 9.1.1.1. Область D на площині.

Складемо суму вигляду

$$f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \cdots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i,$$

яку назвемо ***інтегральною сумою.***

Кожному розбиттю і вибору точок P_i ($i = \overline{1,n}$) відповідає певне значення інтегральної суми.

Розглянемо таку послідовність розбиттів області D, що $d \to 0$ при $n \to \infty$.

Якщо при $d \to 0$ існує границя послідовності інтегральних сум

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i,$$

яка не залежить ні від розбиття області D на елементарні області D_i, ні від способу вибору точок $P_i(\varepsilon_i, \eta_i)$, то її називають ***подвійним інтегралом від функції*** по області D і позначають

$$\iint_D f(x, y)\, dS \quad \text{або} \quad \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

Отже, за означенням

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

(9.1.1.1)

У цьому випадку функцію $f(x,y)$ називають ***інтегровною (інтегровною за Ріманом) в області D***, область D – областю інтегрування, dS (або $dxdy$) – диференціалом площі.

Теорема. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, то існує подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по області D.

***Геометричний зміст подвійного інтеграла*:** якщо $f(x,y) \geq 0$, то чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла Q, нижня основа якого є область D, верхня – частина поверхні $z = f(x,y)$, яка проєктується в область D, а бічна поверхня – циліндрична поверхня з твірною, паралельною до осі Oz, і з напрямною Г – межею області D: $V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ (рис. 9.1.1.2).

***Механічний зміст подвійного інтеграла*:** якщо функція $\gamma(x,y) \geq 0$ визначає густину в кожній точці плоскої неоднорідної пластини, яка має форму області D, то $\iint_D \gamma(x,y)\,dxdy$ чисельно дорівнює масі m цієї пластини:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)\,dxdy$$

(9.1.1.2)

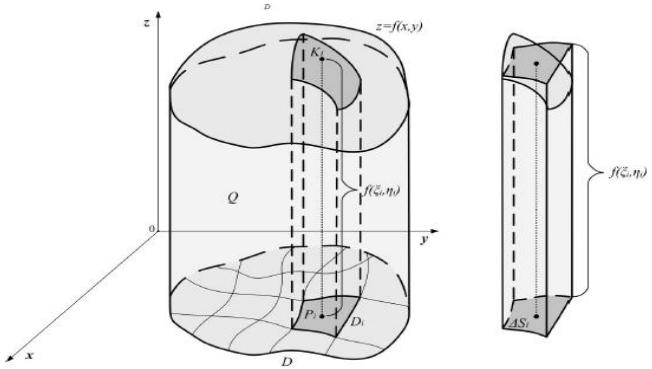


Рис. 9.1.1.2. Геометричний зміст подвійного інтеграла

Властивості подвійного інтеграла.

1) Подвійний інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі подвійних інтегралів від цих функцій:

$$\iint\limits_D [\varphi(x,y) \pm \psi(x,y)]\, dxdy = \iint\limits_D \varphi(x,y)\, dxdy \pm \iint\limits_D \psi(x,y)\, dxdy.$$

2) Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\iint_D Cf(x,y)\, dxdy = C \iint_D f(x,y)\, dxdy, \text{ де } C = const$$

3) Якщо область D розбита на дві частини D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок ($D = D_1 \cup D_2,\ D_1 \cap \cup D_2 = \emptyset$), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dxdy$$

4) Якщо $\forall (x,y) \in D \quad f(x,y) \geq \varphi(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \geq \iint\limits_D \varphi(x,y)\, dxdy$$

5) Якщо $f(x,y)$ неперервна в області D, яка має площу S, і $m = \min_D f(x,y), \quad M = \max_D f(x,y)$, то

$$mS \leq \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \leq MS.$$

6) Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то в цій області існує хоча б одна точка $P(\varepsilon,\eta)$ така, що

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = f(P)S.$$

Число $f(P)$ називають ***середнім значенням функції*** $f(x,y)$ в області D.

Вказані властивості є правильними лише для інтегрованих в області D функцій.

9.1.2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

Розглянемо методику обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах.

Область D називається ***правильною*** в напрямку осі Oy, якщо пряма, яка проходить через довільну внутрішню точку області паралельно до координатної осі Oy, перетинає межу області лише в двох точках (рис.9.1.2.1).

Аналогічно формулюється означення області, правильної в напрямку осі Ox (рис. 9.1.2.2).

Область, правильна в напрямку осі Oy і в напрямку осі Ox, називається ***правильною***.

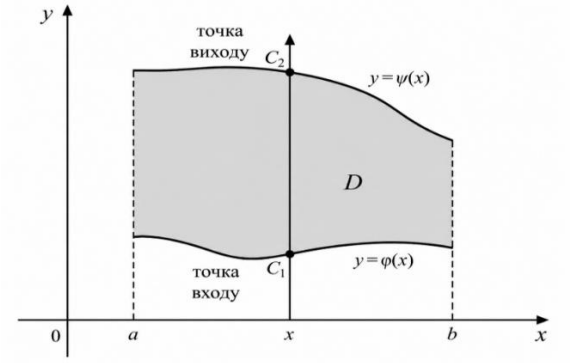


Рис. 9.1.2.1. Правильна область D у напрямку осі Oy

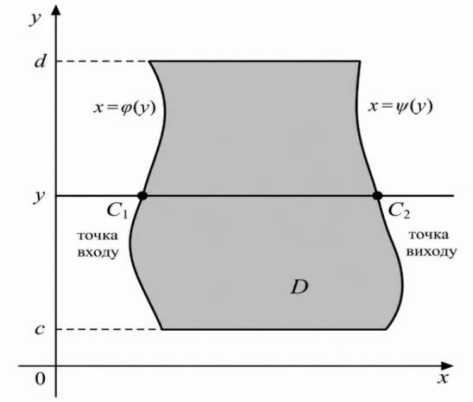


Рис. 9.1.2.2. Правильна область D у напрямку осі Ox

Правильна в напрямку осі Oy область D називається ***простою в напрямку осі Oy***, якщо кожна з кривих, що обмежує цю область зверху і знизу, задана одним аналітичним виразом.

Аналогічно формулюється означення області, простої в напрямку осі Ox.

На рис. 9.1.2.3 зображено область, яка не є простою в напрямку осі Oy**,** оскільки її межа не може бути задана зверху і знизу лише двома функціями, визначеними одним аналітичним виразом на всьому проміжку зміни x.

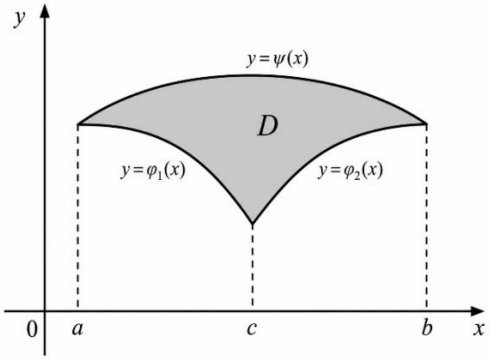


Рис. 9.1.2.3. Область, що не є простою в напрямку осі Oy

Нехай область D – правильна в напрямку осі Oy (рис. 9.1.2.1). Через внутрішню точку області D проведемо пряму, паралельну до осі Oy. Точку C_1 перетину цієї прямої з лінією $y = \varphi(x)$ називають ***точкою входу в область*** D, а точку C_2 перетину з лінією $y = \psi(x)$ – ***точкою виходу з області*** D. Ординати цих точок позначимо $y_{\text{вх}}$ і $y_{\text{вих}}$ відповідно. Очевидно, що $y_{\text{вх}} = \varphi(x), y_{\text{вих}} = \psi(x)$.

Вираз $\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$ називається ***двократним (повторним) інтегралом*** від функції $f(x,y)$ по області*і* D.

Інтеграл $I(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy$ називається ***внутрішнім інтегралом.*** При його обчисленні змінна x вважається параметром.

Інтеграл $\int_a^b I(x)\, dx$ називається ***зовнішнім інтегралом.***

Часто для зручності повторний інтеграл записують у вигляді:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{9.1.2.1}$$

Якщо область інтегрування є правильною, але не є простою в напрямку осі Oy, то прямими, паралельними до осі Oy, цю область розбивають на прості області і двократний інтеграл обчислюють як суму двократних інтегралів по цих областях.

Наприклад, двократний інтеграл по області D, яка зображена на рис. 9.1.2.3, має вигляд:

$$\int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_2(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Обчислення подвійного інтеграла зведенням до двократного.

Подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по області D дорівнює двократному інтегралу від функції $f(x,y)$ по області D, зокрема:

1) якщо область D правильна вздовж осі Oy (рис. 9.1.2.1), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,;$$

2) якщо область D правильна вздовж осі Ox (рис. 9.1.2.2), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

Вказаний вище спосіб зведення подвійного інтеграла до повторного має назву ***теореми Фубіні***.

Очевидно, що внутрішні та зовнішні інтеграли у вказаних вище формулах повинні існувати.

9.1.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Визначник Якобі

Нехай в області D' площини $O'uv$ задана пара функцій

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

які є неперервними в цій області і мають неперервні частинні похідні.

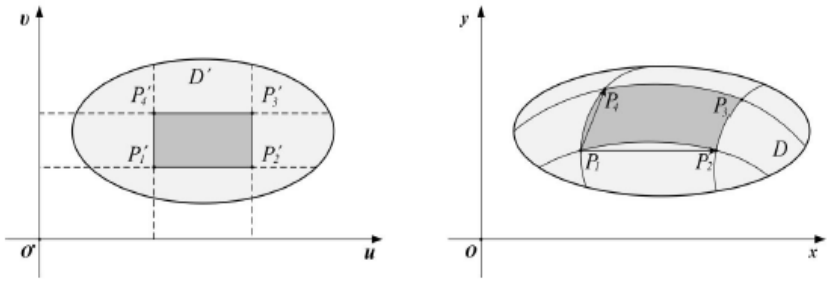


Рис. 9.1.3.1. Перетворення координат $(u,v) \to (x,y)$

Кожній точці $P'(u,v) \in D'$ відповідає одна визначена точка $P(x,y)$ площини Oxy, тобто точкам області D' площини $O'uv$ відповідає деяка множина точок D площини Oxy. В цьому випадку кажуть, що функції $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ здійснюють відображення області D' на область D. Нехай різним точкам (u,v) відповідають різні точки (x,y). Це означає, що з рівностей $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ змінні u та v можна однозначно визначити через x та y. У цьому випадку відображення називають ***взаємно однозначним*** відображенням області D' на область D. За заданою парою (u_0, v_0) значень змінних u та v можна однозначно визначити не тільки положення точки $P'(u_0, v_0) \in D'$, але й положення точки $P(x_0, y_0) \in D$: $x_0 = x(u_0, v_0),\ y_0 = y(u_0, v_0)$. Це дає змогу розглядати змінні u та v як деякі нові координати точки $P(x,y)$ області D на площині Oxy. Їх називають ***криволінійними координатами*** точки P. Тобто u і v – прямокутні декартові координати точок області D' і криволінійні координати точок області D. Якщо в площині Oxy точка описує замкнену лінію L, що обмежує область D, то в площині $O'uv$ відповідна точка опише замкнену лінію L', що обмежує область D'.

Розглянемо в області D' прямокутник $P_1'P_2'P_3'P_4'$, сторони якого паралельні до осей координат $O'u$ та $O'v$, а їх довжини дорівнюють Δu і Δv ($\Delta u>0, \Delta v>0$). Площа цього прямокутника $\Delta S' = \Delta u \Delta v$. При відображенні $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ прямокутник $P_1'P_2'P_3'P_4'$ переходить в криволінійний чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ в області D. Нехай вершини $P_i',\ i = 1,2,3,4$, мають координати:

$$P_1'(u,v),\ \ P_2'(u+\Delta u, v),\ \ P_3'(u+\Delta u, v+\Delta v),\ \ P_4'(u, v+\Delta v).$$

Тоді за формулами $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ відповідні їм вершини P_1, P_2, P_3, P_4 мають координати:

$P_1\big(x(u,v), y(u,v)\big)$, $P_2\big(x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v)\big)$,
$P_3\big(x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v)\big)$, $P_4\big(x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v)\big)$.

Застосовуючи диференціал функції двох змінних, отримаємо такі наближені значення координат чотирикутника $P_1P_2P_3P_4$:

$P_1(x,y)$, $P_2\left(x+\dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u, y+\dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right)$,
$P_3\left(x+\dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v, y+\dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right)$, $P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, y+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right)$.

Криволінійний чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ можна наближено розглядати (зменшуючи за необхідності діаметр розбиття) як паралелограм, площу якого обчислимо як модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{P_1P_2}$ і $\overrightarrow{P_1P_4}$, на яких побудований паралелограм:

$$\Delta S \approx \left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta S'$$

Функціональний визначник

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (9.1.3.1)$$

називається ***визначником Якобі (якобіаном)*** заміни змінних $x = x(u,v),\ \ y = y(u,v)$.

Вираз $|J|\Delta S'$ називають ***елементом площі в криволінійних координатах***. Таким чином, величина $|J| \approx \frac{\Delta S}{\Delta S'}$, але при переході

до границі, коли діаметри площадок $\Delta S'$та ΔS прямують до нуля, ця наближена величина переходить у точну:

$$|J| = \lim_{d(\Delta S')\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'}.$$

Геометричний зміст якобіана. Модуль якобіана чисельно дорівнює відношенню нескінченно малих площ при відображенні $x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),$ в точці (u,v). Іншими словами, абсолютне значення якобіана відіграє роль локального коефіцієнта деформації області D' при відображенні її на область D.

Теорема. Нехай функції $x = x(u,v),\ \ y = y(u,v)$*:*

1) здійснюють взаємно однозначне відображення області D' площини $O'uv$ на область D площини Oxy*;*

2) неперервно диференційовні в області D'*;*

3) мають відмінний від нуля якобіан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то правильна формула

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v);y(u,v))|J|\,dudv, \tag{9.1.3.2}$$

яку називають ***формулою заміни змінних*** y подвійному інтегралі.

9.1.4. Подвійний інтеграл в полярних координатах

Найбільш поширена система криволінійних координат на площині – це полярна система координат (ρ,φ). Формули переходу від декартових координат x,y до полярних координат ρ,φ мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\,, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Обчислимо визначник Якобі в полярних координатах:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho cos^{\,2}\varphi + \rho sin^2\varphi =$$
$$= \rho(cos^{\,2}\varphi + sin^2\varphi) = \rho.$$

Таким чином, формула переходу від інтеграла в декартових координатах до інтеграла в полярних координатах матиме вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi\,,\rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi, \tag{9.1.4.1}$$

де область D задана в системі координат Oxy, а D' – відповідна їй область в полярній системі координат.

Перехід до полярних координат доцільно здійснювати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння границі області містить суму

$$x^2 + y^2,$$

оскільки ця сума в полярних координатах має досить простий вигляд:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 cos^{\,2}\varphi + \rho^2 sin^2\varphi = \rho^2(cos^{\,2}\varphi + sin^2\varphi) = \rho^2.$$

Зазвичай такий перехід здійснюють для так званих ***кругоподібних областей***.

Як і у випадку прямокутних декартових координат, обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах здійснюється зведенням подвійного інтеграла до повторного.

Щоби знайти межі інтегрування в повторному інтегралі, часто немає потреби будувати область D', а можна скористатися певними правилами:

1. Нехай полюс (початок координат) лежить зовні області інтегрування D, а область розташована в куті між променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ та є простою в напрямі променя $\varphi = \varphi_0$, тобто промінь $\varphi = \varphi_0$, що проходить через довільну внутрішню точку області, перетинає межу області лише у двох точках (рис. 9.1.4.1).

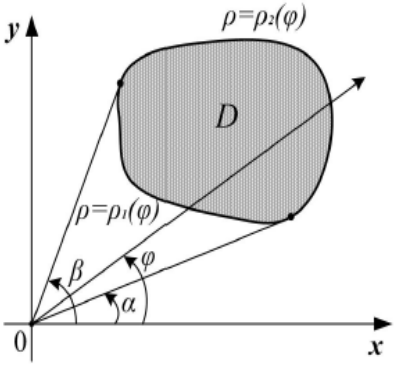


Рис. 9.1.4.1.

Тоді

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi\,,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

2. Нехай полюс (початок координат) лежить всередині області інтегрування D, а промінь $\varphi = \varphi_0$, що проходить через довільну внутрішню точку області, перетинає межу області, рівняння якої $\rho = \rho(\varphi)$, лише в одній точці (рис. 9.1.4.2). Тоді

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi\,,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

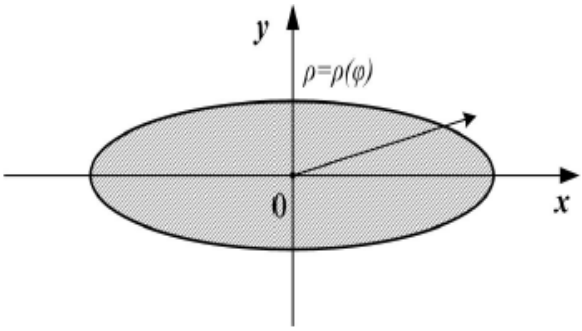


Рис. 9.1.4.2.

При переході в полярних координатах від подвійного інтеграла до повторного рекомендується зовнішній інтеграл обчислювати за змінною φ, а внутрішній – за змінною ρ.

Правило обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах.

1. Побудувати область інтегрування D.

2. Замінити змінні x і y, від яких залежить підінтегральна функція, на $r\ cos\varphi$ і $r\ sin\varphi$ відповідно, а елемент площі $dxdy$ на $rdrd\varphi$.

3. Перейти до повторного інтеграла, пам'ятаючи при цьому, що зовнішній інтеграл завжди береться за змінною φ, а внутрішній – за змінною r.

4. Розставити межі інтегрування. Для цього перевести рівняння меж області в полярну систему координат і визначити межі зміни полярного кута φ і полярного радіуса r в області D.

5. Виконати обчислення.

Слід зазначити, якщо область інтегрування є круг або його частина, тоді вигідно перейти до полярних координат.

9.1.5. Застосування подвійного інтеграла

1. Площа плоскої фігури.

Якщо в площині Oxy задана фігура, що має форму обмеженої замкненої області D (*рис. 9.1.5.1),* то площа S цієї фігури обчислюється за формулою

$$S = \iint_D dxdy \tag{9.1.5.1}$$

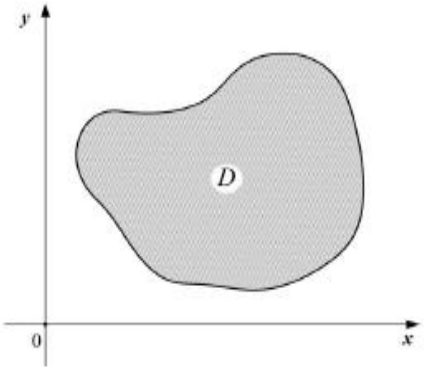


Рис. 9.1.5.1. Обмежена замкнена область D

2. Об'єм тіла.

Об'єм V циліндричного тіла (рис. 9.1.5.2)

$$T = \{(x, y, z)|\ (x, y) \in D, f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)\},$$

обмеженого знизу поверхнею $z = f_1(x, y)$, зверху поверхнею $z = f_2(x, y)$, а збоку циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні до осі Oz і вирізають на площині Oxy область D, обчислюється за формулою

$$V = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)]dxdy \tag{9.1.5.2}$$

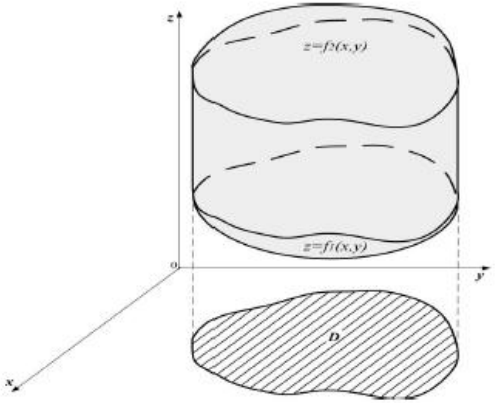


Рис. 9.1.5.2. Циліндричне тіло, обмежене поверхнями

$z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$.

3. Площа поверхні.

Площа S частини гладкої однозначної поверхні, заданої рівнянням $z = f(x, y)$, виражається формулою

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy, \tag{9.1.5.3}$$

де D – проєкція заданої поверхні на координатну площину Oxy.

Поверхня S, задана рівнянням $z = f(x, y)$, називається ***гладкою***, якщо $f(x, y)$ – неперервно диференційовна функція (рис 9.1.5.3).

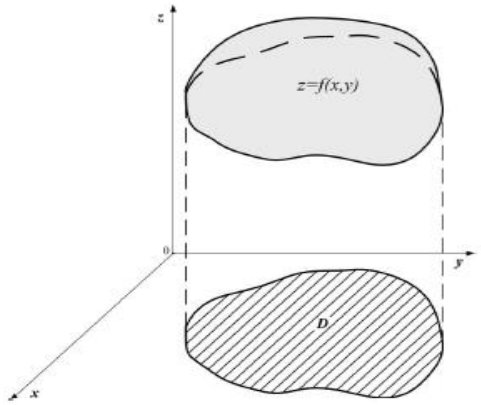


Рис. 9.1.5.3. Гладка поверхня

4. Застосування до задач механіки.

Нехай пластина займає область D площини Oxy і має змінну густину $\gamma(x, y)$, де $(x, y) \in D$.

Маса пластини обчислюється за формулою

$$m = \iint_D \gamma(x, y)dxdy$$

Статичні моменти пластини відносно осей Ox і Oy відповідно дорівнюють:

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y)dxdy, \qquad M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y)dxdy.$$

Координати центра ваги пластини (точки $C(x_C, y_C)$) обчислюються за формулами:

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \qquad y_C = \frac{M_x}{m}.$$

Моменти інерції пластини відносно осей Ox і Oy відповідно дорівнюють:

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x, y)dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2\gamma(x, y)dxdy.$$

Момент інерції пластини відносно початку координат:

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2)\gamma(x, y)dxdy.$$

9.2. Потрійний інтеграл

Потрійний інтеграл широко застосовується під час розв'язування задач геометрії, фізики та механіки. За його допомогою обчислюють об'єми просторових тіл, маси неоднорідних тіл, координати центра мас, статичні моменти та моменти інерції. Також потрійний інтеграл використовується для дослідження просторового розподілу фізичних величин, густини, температури та інших характеристик.

У цьому розділі буде введено означення потрійного інтеграла, розглянуто його основні властивості, способи зведення до трикратного інтеграла та методи обчислення в декартових, циліндричних і сферичних координатах.

9.2.1. Означення та основні властивості потрійного інтеграла

Нехай в обмеженій замкненій області $\Omega \in \mathbb{R}^3$ визначена деяка неперервна функція $f(x, y, z)$. Розіб'ємо область Ω на n елементарних областей Ω_i, які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють $\Delta V_i, i = 1,2, \dots, n$.

Діаметром елементарної області Ω_i назвемо число $d_i = \max_{M,N\in\Omega_i}|MN|$, а число $d = \max\ \{d_1, \dots, d_n\}$ назвемо ***діаметром розбиття***. У кожній елементарній області Ω_i виберемо довільним чином точку P_i. Позначимо $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ – значення функції $f(x, y, z)$ у вибраних точках. Складемо суму вигляду

$$f(P_1)\Delta V_1 + f(P_2)\Delta V_2 + \cdots + f(P_n)\Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i,$$

яка називається ***інтегральною сумою (інтегральною сумою Рімана) для функції*** $f(x, y, z)$ по області Ω. Кожному розбиттю і вибору точок P_i $(i = \overline{1, n})$ відповідає певне значення інтегральної суми. Розглянемо таку послідовність розбиттів, що $d \to 0$ при $n \to \infty$.

Якщо існує границя при $d \to 0$ послідовності інтегральних сум, яка не залежить ні від способу розбиття області Ω на елементарні області Ω_i, ні від вибору точок $P_i \in \Omega_i,\ i = 1,2, \dots, n,$ то її називають ***потрійним інтегралом від функції*** $f(x,y,z)$ по області Ω і позначають $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV$ або $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$

Таким чином, за означенням

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i\,. \tag{9.2.1.1}$$

Якщо потрійний інтеграл існує, то функцію $f(x,y,z)$ називають ***інтегровною (інтегровною за Ріманом) в області*** Ω, Ω ***– область інтегрування***, $dV = dxdydz$ – елемент (диференціал) об'єму.

Механічний зміст потрійного інтеграла*:* якщо в області Ω розподілена речовина, об'ємна густина якої в точці $(x,y,z) \in \Omega$ дорівнює $\gamma(x,y,z) \geq 0$, то $\iiint_{\Omega} \gamma(x,y,z)\,dxdydz$ чисельно дорівнює масі тіла Ω:

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\,dxdydz \tag{9.2.1.2}$$

Теорема. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області Ω, то вона інтегровна в цій області.

Властивості потрійного інтеграла.

Потрійний інтеграл є узагальненням подвійного інтеграла на випадок просторової області. Властивості подвійного інтеграла разом із доведеннями переносяться на випадок потрійного інтеграла.

1) Потрійний інтеграл від суми кількох інтегрованих функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від доданків:

$$\iiint\limits_{\Omega} [\varphi(x,y,z) + \psi(x,y,z)]\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \varphi(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{\Omega} \psi(x,y,z)\,dxdydz.$$

2) Сталий множник можна винести за знак потрійного інтеграла:

$$\iiint\limits_{\Omega} C\,f(x,y,z)dxdydz = C\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz, \qquad \text{де } C - const.$$

3) Якщо область Ω розбита на дві області Ω_1 і Ω_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

4) Якщо $\forall(x,y,z) \in \Omega$: $f(x,y,z) \geq \varphi(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \geq \iiint\limits_{\Omega} \varphi(x,y,z)\,dxdydz.$$

5) Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в області Ω, причому $m = \min_{\Omega} f(x,y,z)$, $M = \max_{\Omega} f(x,y,z)$, то

$$mV \leq \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \leq MV, \qquad \text{де } V - \text{об'єм області } \Omega.$$

6) Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна обмеженій замкненій області Ω, то всередині області Ω існує така точка P, що

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = f(P)V,$$

де V – об'єм області Ω.

Число $f(P)$ називають ***середнім значенням функції*** $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ в області Ω.

Вказані властивості є правильними лише у випадку інтегровних в області Ω функцій.

9.2.2. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Як і у випадку подвійного інтеграла, обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення повторного (трикратного), тобто до інтегрування за кожною змінною окремо.

Обмежена замкнена просторова область Ω називається ***правильною в напрямку осі*** Oz, якщо (рис. 9.2.2.1):

1) пряма, яка проходить через довільну внутрішню точку області Ω паралельно до осі Oz, перетинає межу цієї області у двох точках;

2) область Ω проєктується на площину Oxy у правильну область.

Аналогічно вводиться означення правильної області в напрямку осей Ox і Oy.

Нехай область Ω правильна в напрямку осі Oz, обмежена знизу і зверху поверхнями $z = \psi_1(x, y)$ і $z = \psi_2(x, y)$ відповідно, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні до осі Oz (рис. 9.2.2.1).

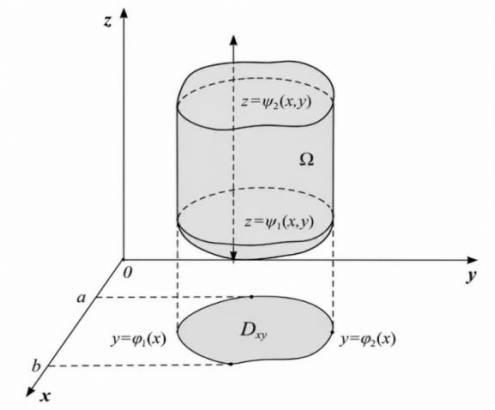


Рис. 9.2.2.1. Правильна область в напрямку осі Oz

Через внутрішню точку області Ω проведемо пряму, паралельну до осі Oz. Точку перетину цієї прямої з поверхнею $z = \psi_1(x, y)$ називають ***точкою входу в область*** Ω, а з поверхнею $z = \psi_2(x, y)$ – ***точкою виходу з області*** Ω. Аплікати цих точок позначимо $z_{\text{вх}}$ і $z_{\text{вих}}$

відповідно. Очевидно, що $z_{\text{вх}} = \psi_1(x,y)$, $z_{\text{вих}} = \psi_2(x,y)$. Позначимо через D_{xy} проєкцію області Ω на площину Oxy, тобто $D_{xy} = \text{пр}_{Oxy}\Omega$. Для такої області Ω правильна формула:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Тобто, щоб обчислити потрійний інтеграл, спочатку треба обчислити інтеграл

$$I(x,y) = \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

за змінною z, вважаючи змінні x і y сталими.

Інтеграл $I(x,y)$ називають ***внутрішнім інтегралом***, бо

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy.$$

Права частина цієї формули є подвійним інтегралом по області D_{xy} із підінтегральною функцією $I(x,y)$. Таким чином, обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Якщо область D_{xy} є правильною в напрямку осі Oy і обмежена кривими $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$, $(a \le x \le b)$, то подвійний інтеграл по області D_{xy} можна звести до повторного.

Таким чином, маємо

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (9.2.2.1)$$

Отже, обчислення потрійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів: функцію $f(x,y,z)$ спершу інтегрують за змінною z при фіксованих x і y, потім результат інтегрують за змінною y, вважаючи змінну x сталою, і, нарешті, останній визначений інтеграл обчислюють за змінною x в межах від a до b.

Зауваження.

1) Якщо область Ω правильна в напрямку осі Ox, тобто $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in D_{yz},\ x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z)\}$, де правильна область $D_{yz} = \text{пр}_{Oyz}\Omega$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{yz}} \left[\int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right] dydz.$$

2) Якщо область Ω правильна в напрямку осі Oy, тобто $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,z) \in D_{xz},\ y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z)\}$, де правильна область $D_{xz} = \text{пр}_{Oxz}\Omega$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xz}} \left[\int\limits_{y(x,z)}^{y(x,z)} f(x,y,z)dy \right] dxdz.$$

3) Якщо область інтегрування неправильна (рис. 9.2.2.2), то для обчислення потрійного інтеграла необхідно (по можливості) розбити її на правильні області та застосувати властивість 3 потрійного інтеграла.

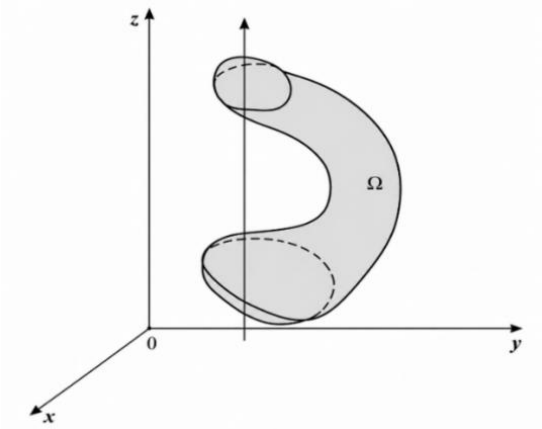


Рис. 9.2.2.2. Неправильна область в напрямку осі Oz

9.2.3. Заміна змінних в потрійному інтегралі

Нехай задано дві прямокутні декартові системи координат $Oxyz$ та $O'uvw$, причому змінні x, y, z та u, v, w зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

що встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками областей Ω і Ω', розташованих відповідно в просторах $Oxyz$ та $O'uvw$.

Якщо диференційовні за усіма своїми аргументами функції $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ задовольняють умову

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то правильною є ***формула заміни змінних у потрійному інтегралі***:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big) \cdot |J|\, dudvdw \tag{9.2.3.1}$$

Визначник J називаються ***визначником Якобі*** або ***якобіаном*** заміни змінних.

Геометрично модуль якобіана характеризує коефіцієнт зміни площі або об'єму при переході від однієї системи координат до іншої. Якобіан широко використовується у формулах заміни змінних у кратних інтегралах, зокрема при переході до полярних, циліндричних і сферичних координат.

9.2.4. Потрійний інтеграл в циліндричних координатах

Визначимо положення точки P у просторі її декартовою координатою z і полярними координатами ρ і φ її проєкції P' на площину Oxy (рис. 9.2.4.1).

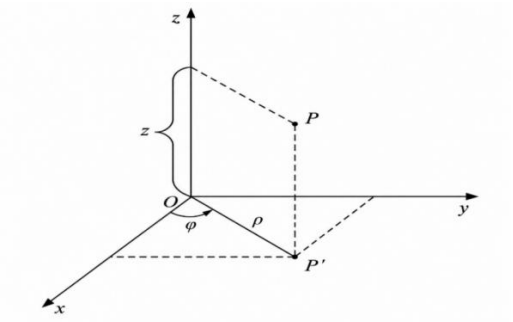


Рис. 9.2.4.1. Циліндричні координати точки P

Величини ρ, φ, z називаються ***циліндричними координатами*** точки.

З рис. 9.2.4.1 видно, що циліндричні координати ρ, φ, z і декартові координати точки P зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

які називають ***формулами переходу від декартових до циліндричних координат***.

Ці співвідношення відображають область $0 \le \rho \le +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, -\infty \le z \le +\infty$ на весь простір $Oxyz$.

Обчислимо якобіан заміни змінних у циліндричних координатах:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Таким чином, ***потрійний інтеграл у циліндричних координатах має вигляд***:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \cdot \rho \, d\rho d\varphi dz,$$

де Ω – область у декартовій системі координат $Oxyz$, а Ω' – образ області у системі координат $O'\rho\varphi z$.

9.2.5. Потрійний інтеграл у сферичних координатах

Визначимо положення точки P у просторі за допомогою трьох величин, а саме: відстані r від початку координат O до точки P, кута φ між додатним напрямом осі Ox та проекцією OP' відрізка OP на площину Oxy, кута θ між додатним напрямом осі Oz та відрізком OP (рис. 9.2.5.1).

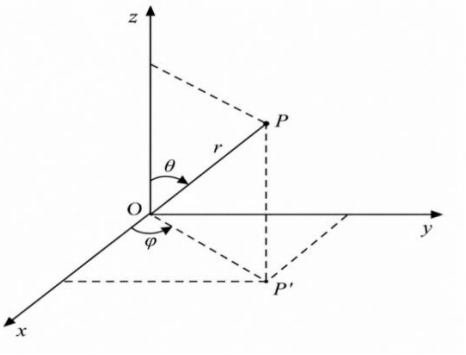


Рис. 9.2.5.1. Сферичні координати точки P

Величини r, φ, θ називають ***сферичними координатами*** точки P.

З рис. 9.2.5.1. видно, що сферичні координати r, φ, θ і декартові координати x, y, z точки P зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

які називають ***формулами переходу від декартових до сферичних координат***.

Ці співвідношення відображають область $0 \le r \le +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$ на весь простір $Oxyz$.

Обчислимо якобіан заміни змінних у сферичних координатах:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta.$$

Таким чином, ***формула обчислення потрійного інтеграла у сферичних координатах має вигляд:***

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\sin\theta\cos\varphi\,, r\sin\theta\sin\varphi\,, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta. \tag{9.2.5.1}$$

де Ω – область у декартовій системі координат $Oxyz$, а Ω' – образ області у системі координат $O'r\varphi\theta$.

Зауваження.

1. При обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних чи сферичних координатах область Ω' зазвичай не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю Ω, користуючись геометричним змістом нових координат. Часто до циліндричних координат доцільно переходити, якщо область інтегрування є круговим циліндром, параболоїдом або конусом, до сферичних координат – коли область інтегрування є куля або її частина.

2. При переході в обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних координатах до трикратного інтеграла рекомендується внутрішнє інтегрування здійснювати за змінною z, після цього – за змінною ρ, а зовнішній інтеграл обчислювати за змінною φ.

3. При переході в обчисленні потрійного інтеграла у сферичних координатах до трикратного інтеграла рекомендується внутрішнє інтегрування здійснювати за змінною r, після цього – за змінною φ, а зовнішній інтеграл обчислювати за змінною θ.

9.2.6. Застосування потрійного інтеграла

1. Обчислення об'ємів.

Якщо деяке тіло є обмеженою і замкненою областю G, що має об'єм V, то

$$V = \iiint\limits_{G} dxdydz$$

Якщо G обмежена і замкнена область, яку займає тіло з густиною $\gamma(x,y,z)$, де $\gamma(x,y,z)$ – неперервна функція в області G, тоді:

2. Маса тіла

$$m = \iiint_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz.$$

3. Статичний момент M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тіла відносно координат площин:

1) Oxy: $M_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz;$

2) Oxz: $M_{xz} = \iiint\limits_V y \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz;$

3) Oyz: $M_{yz} = \iiint\limits_V x \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz.$

4. Координати центра мас пластини

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint_V x \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz};$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint_V y \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz};$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_V z \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz}.$$

5. Моменти інерції пластини

1) щодо осі Ox:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz;$$

2) щодо осі Oy:

$$I_x = \iiint\limits_V (x^2+z^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz;$$

3) щодо осі Oz:

$$I_x = \iiint\limits_V (x^2+y^2) \cdot \gamma(x,y,z)\,dxdydz;$$

4) щодо площини Oxy:

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 \cdot \gamma(x,y,z)\, dxdydz;$$

5) щодо площини Oyz:

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \cdot \gamma(x,y,z)\, dxdydz;$$

6) щодо площини Oxz:

$$I_{xz} = \iiint_V y^2 \cdot \gamma(x,y,z)\, dxdydz.$$

6. Момент інерції щодо початку координат (полярний момент інерції)

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x,y,z)\, dxdydz.$$

7. Електричний заряд Q розподілений по тілу об'ємом V так, що об'ємна густина заряду від точки до точки змінюється за законом $\sigma(x,y,z)$

$$Q = \iiint_V \sigma(x,y,z)\, dxdydz.$$

9.3. Криволінійні інтеграли першого роду

9.3.1. Поняття криволінійного інтеграла першого роду

До узагальненого поняття визначеного інтеграла, коли областю інтегрування є не пряма, а деяка крива, відносять криволінійні інтеграли.

Спрямлюваною називають криву, яка має скінченну довжину. ***Неспрямлюваною*** – нескінченну.

Гладка крива – неперервна крива, яка в кожній точці має похідну.

Нехай на площині xy задано гладку криву l, у точках якої визначено неперервну функцію $f(x,y)$. Криву l довільно розіб'ємо (рис. 9.3.1.1) на частини l_i завдовжки $\Delta l_i, i = 1, 2, \ldots, n$. У частині l_i виберемо довільну точку (x_i, y_i) і утворимо ***інтегральну суму:***

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta l_i. \qquad (9.3.1.1)$$

Нехай $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$.

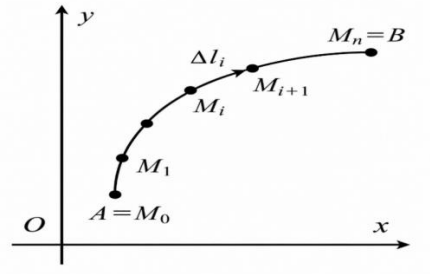


Рис. 9.3.1.1.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta l_i$, яка не залежить ні від способу розбиття дуги l на частини l_i, ні від вибору точок $x_i, y_i \in l_i$, то ця границя називається ***криволінійним інтегралом 1-го роду за дугою l від функції f(x, y)*** і позначається $\int_l f(x,y)dl$.

Отже, за означенням:

$$\int_l f(x,y)dl = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i. \qquad (9.3.1.2)$$

Теорема (*достатня умова існування криволінійного інтеграла*).

Якщо функція $f(x; y)$ неперервна в кожній точці гладкої кривої, криволінійний інтеграл першого роду і його величина не залежить ні від способу розбиття на частини, ні від вибору точок на них.

Властивості криволінійних інтегралів першого роду

1. Якщо функція $f(x; y)$ інтегрована на кривій, то інтегрованою на цій кривій $\overset{\frown}{AB}$ є й функція $C \cdot f(x; y)$, де $C = const$ – константа, і виконується рівність

$$\int_{AB} C \cdot f(x,y)dl = C \int_{AB} f(x,y)dl.$$

2. Значення криволінійного інтеграла від функції $f(x; y)$ по заданій кривій не залежить від напрямку інтегрування

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl.$$

3. Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ інтегровані на кривій $\overset{\smile}{AB}$, то функції $f(x;y) \pm g(x;y)$ також інтегровані на цій кривій і

$$\int_{AB} (f\ (x;y) \pm\ g(x;y))\ dl = \int_{AB} f(x,y)dl \pm \int_{AB} g(x,y)dl.$$

4. Якщо $f(x;y)$ невід'ємна інтегрована функція на кривій $\overset{\smile}{AB}$, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl \geq 0.$$

5. Якщо $f(x;y) \geq g(x;y)$, $(x;y) \in \overset{\smile}{AB}$ і кожна з функцій $f(x;y)$ і $g(x;y)$ інтегрована на кривій $\overset{\smile}{AB}$, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl \geq \int_{AB} g(x,y)dl.$$

6. Якщо крива складається із двох кривих $\overset{\smile}{AC}$ і $\overset{\smile}{CB}$, то функція $f(x,y)$ (рис. 9.3.1.2) інтегрована на кривій $\overset{\smile}{AB}$, причому

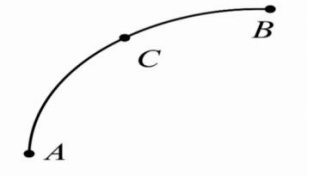


Рис. 9.3.1.2.

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{AC} f(x,y)dl + \int_{CB} f(x,y)dl$$

7. Якщо функція $f(x;y)$ інтегрована на кривій $\overset{\smile}{AB}$, то функція $|f(x;y)|$ також інтегрована на цій кривій і

$$\left|\int_{AB} f(x,y)dl\right| \leq \int_{AB} f(x,y)dl$$

8. **Теорема** (*про середнє значення*).

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на кривій, то на цій кривій $\overset{\smile}{AB}$ знайдеться така точка $f(x_0;y_0)$, що

$$\int_{AB} f(x,y)dl = f(x_0;y_0) \cdot l,$$

де l – довжина дуги кривої.

9.3.2. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Під час обчислення криволінійних інтегралів першого роду завжди керуються такими правилами:

1) щоб обчислити криволінійний інтеграл першого роду, його необхідно звести до визначеного інтеграла;

2) завжди брати межі інтегрування від меншого числа до більшого, щоби зберігалась умова означення криволінійного інтегралу першого роду;

3) dx і dy брати завжди із знаком «+», оскільки $dl = \sqrt{1 + (y_x\,')^2}dx$, інтегральна сума (9.16) набирає вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, g(x_i))\sqrt{1 + g'^2(x_i)}\,\Delta x_i. \qquad (9.3.2.1)$$

границя виразу (9.18) при $\Delta \to 0$ являє собою інтеграл

$$\int_l f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y)\sqrt{1 + (y_x\,')^2}\,dx. \qquad (9.3.2.2)$$

4) якщо криволінійний інтеграл береться по замкнутому контуру, то жодних напрямків не вказувати, а контур завжди вибирати так, щоб змінна, за якою інтегруємо, відкладалася від меншого до більшого.

Крива інтегрування задана функцією в явному вигляді.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на деякому відрізку $[a; b]$, то довжина дуги, що задана цим рівнянням, визначається співвідношенням

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

1) $L\colon y = \varphi(x);\ x \in [a; b]$

$$\int_l f(x,y)dl = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi_x\,')^2}\,dx.$$

2) $L\colon x = \psi(x);\ y \in [c; d]$

$$\int_l f(x,y)dl = \int_c^d f(\psi(x),y)\sqrt{1 + (\psi_y\,')^2}\,dy.$$

де $\psi(x); \varphi(x)$ – неперервні диференційовні функції.

Функція задана параметрично:

1) Якщо крива l задана параметрично: $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int_l f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$$

2) Якщо крива l задана параметрично: $x = x(t), y = y(t)$, $z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int_l f(x,y,z)\,dl = \int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt. \quad (9.3.2.3)$$

$x(t), y(t), z(t)$ неперервні диференційовні функції параметра.

Функція задана полярним рівнянням:

$$L\colon \rho = \rho(\varphi);\ \varphi \in [\alpha;\beta]$$

$$\int_l f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi, \rho sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}d\varphi. \quad (9.3.2.4)$$

Зауваження:

1) у разі застосування формули (9.3.2.4) функцію ρ обов'язково прописати так, щоб під знаком інтеграла одержати формулу однієї змінної;

2) кут φ потрібно задавати так, щоб верхня межа була записана більшим числом.

9.3.3. Застосування криволінійного інтеграла першого роду до розв'язання задач механіки

Нехай L є плоска крива, яка має змінну лінійну густину $\gamma\ (x,y)$, тоді:

1. Маса m кривої L обчислюється за формулою:

$$m = \int_L \gamma\ (x,y)\,ds.$$

2. Статичні моменти дуги кривої відносно осей координат знаходять за формулами:

$$M_x = \int_L \gamma\ (x,y)\,yds, \qquad M_y = \int_L \gamma\ (x,y)x\,ds.$$

3. Координати центра ваги дуги кривої обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_x}{m}, \qquad y_c = \frac{M_y}{m}.$$

4. Моменти інерції дуги кривої відносно осей координат і початку координат знаходяться за формулами:

$$I_x = \int_L y^2 \gamma\,(x,y)\,ds, \qquad I_y = \int_L x^2 \gamma\,(x,y)\,ds,$$

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\gamma\,(x,y)\,ds.$$

9.4. Криволінійні інтеграли другого роду

Криволінійний інтеграл другого роду є узагальненням визначеного інтеграла на випадок, коли інтегрування виконується не по відрізку прямої, а вздовж деякої кривої. Такі інтеграли застосовуються для обчислення роботи сили вздовж траєкторії руху, циркуляції векторного поля, а також у задачах фізики, механіки та прикладної математики.

9.4.1. Поняття криволінійного інтеграла другого роду

Нехай у деякій області площини задана крива l , вектор-функція $\vec{F} = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$, яка визначена в точках кривої.

$$l = \{x = x(t),\ y = y(t)\},\ t \in [\alpha, \beta].$$

Точка $A = (x(\alpha), y(\alpha))$ називається ***початковою точкою кривої*** l, а точка $B = (x(\beta), y(\beta))$ – ***кінцевою точкою*** цієї кривої.

Припустимо, що рух по кривій l відбувається від початкової точки A до кінцевої точки B.

Крива, для якої вибрано початкову і кінцеву точки і вказано напрям руху, називається ***орієнтованою***: l^+ означає, що крива l орієнтована і рух відбувається від точки A до точки B, а l^- – рух відбувається від точки B до точки A (рис. 9.4.1.1).

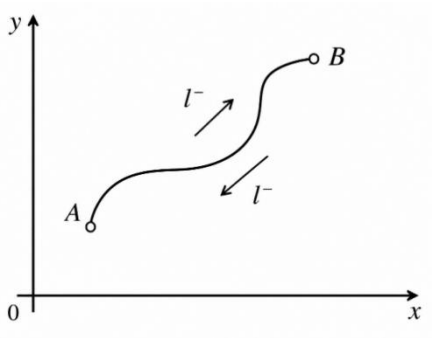


Рис. 9.4.1.1.

Розіб'ємо криву l на частини l_i точками

$$M_0 = A,\ M_1,\ M_2, \dots,\ M_n = B.$$

У кожній частині l_i виберемо довільно точку $N_i = (\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

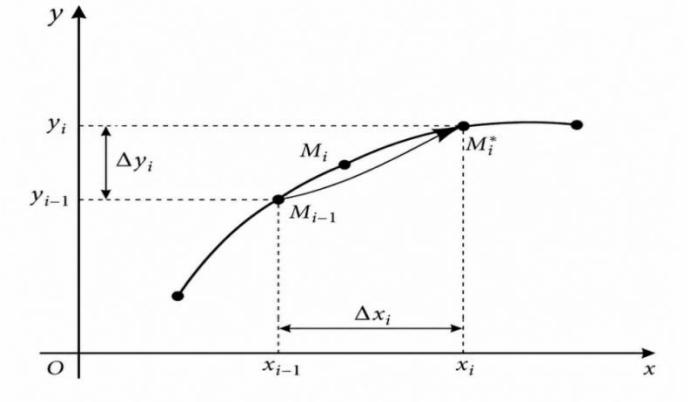


Рис. 9.4.1.2.

Складаємо суму

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\ \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i \qquad (9.4.1.1)$$

Δx_i, Δy_i– проєкції i-тої часткової дуги $M_{i-1}\ M_i$ на осі координат (тобто проєкції вектора $\overrightarrow{M_{i-1}\ M_i}$).

Така сума називається ***інтегральною***.

Нехай λ – найбільша з довжин дуг , $M_{i-1}\ M_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Якщо при $\lambda \to 0$ існує границя інтегральних сум (9.4.1.2), яка не залежить ні від способу розбиття кривої l на частини l_i, ні від вибору точок $N_i \in l_i$, її називають ***криволінійним інтегралом 2-го роду*** від вектор-функції $\vec{F}$ за кривою l.

Позначають криволінійний інтеграл другого роду так:

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\ \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i. \tag{9.4.1.2}$$

Теорема (*існування криволінійного інтеграла*).

Нехай крива АВ задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $x(t)$, $y(t)$ – неперервні функції разом із похідними першого порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$.Тоді для будь-якої вектора функції $\vec{F} = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$, неперервної вздовж цієї кривої, криволінійний інтеграл другого роду існує.

Зазначимо, що вектор-функції $\vec{F} = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$ називається ***неперервним***, якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ є неперервними.

Криволінійний інтеграл другого роду є робота, яку здійснює змінна сила $\vec{F} = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$ на криволінійному шляху АВ (в цьому полягає ***механічний зміст криволінійного інтеграла***).

Робота сили вздовж шляху не залежить від вибору системи координат, а отже, криволінійний інтеграл другого роду визначається лише кривою та вектором функції на цій кривій.

Аналогічно можна визначити криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

для вектор-функції $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$ і просторової кривої $\overset{\frown}{AB}$.

Властивості криволінійних інтегралів другого роду:

1. Значення криволінійного інтеграла залежить від напряму руху вздовж кривої $\overset{\smile}{AB}$.

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

2. $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy.$

3. Якщо крива $\overset{\smile}{AB}$ складається з двох частин, тоді

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int_{l_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{l_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

(9.4.1.3)

9.4.2. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

1. Нехай крива $\overset{\smile}{AB}$ задана параметрично $\mathrm{x} = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Напряму руху вздовж кривої $\overset{\smile}{AB}$ від точки А до точки В відповідає зміна параметра t від α до β, тоді

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),\ y(t))y'(t))dt.$$

Для кривої $\overset{\smile}{AB}$, яка задана параметрично

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha; \beta].$$

$$\int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dz + R(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) +$$
$$+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

(9.4.2.1)

2. Нехай плоска крива l задана явно рівнянням $\mathrm{y} = f(x)$, $x \in [a,b]$, де $f(x)$ – гладка функція. Цю криву можна задати параметрично:

$$x = x,\ \mathrm{y} = f(x),\ x \in [a,b].$$

Тоді:

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x_1 f(x)) + Q(x)f(x))f(x))dx.$$

Одиничний вектор дотичної $(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$, де cosα, cosβ, cosγ – напрямні косинуси вектора, дотичного до кривої l, тому з рівностей (9.4.2.1) отримаємо:

$$\int_l (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl = \int_l Pdx + Qdy + Rdz. \quad (9.4.2.3)$$

Формула (9.4.2.3) встановлює ***зв'язок між криволінійними інтегралами 1-го і 2-го родів***.

Якщо l – плоска крива, формула (9.4.2.3) набирає вигляду:

$$\int_l (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)dl = \int_l Pdx + Qdy, \quad (9.4.2.4)$$

оскільки в цьому разі одиничний вектор дотичної $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Правило обчислення криволінійного інтеграла за координатами.

1. Задати криву L параметричними рівняннями $x = x(t)$і $y = y(t)$.

2. Замінити в підінтегральному виразі змінні x і y на їх вирази через параметр t, а dx і dy – відповідно диференціалами функцій $x = x(t)$ і $y = y(t)$, тобто покласти d $dx = x'(t)dt$, а $dy = y'(t)dt$.

3. За нижню межу в одержаному визначеному інтегралі потрібно прийняти значення параметра, що відповідає початку дуги, а за верхню межу – значення параметра, що відповідає кінцю дуги.

Зазначимо, що коли плоска крива L задана рівнянням $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, за параметр треба прийняти змінну x, тоді параметричними рівняннями кривої L будуть: $x = x, y = f(x)$, а x змінюється від a до b.

Якщо плоска крива L задана рівнянням $x = \psi(y)$ $(c \le y \le d)$, прийняти за параметр треба змінну y, тоді параметричними рівняннями кривої L будуть: $y = y, x = \psi(y)$, а y змінюється від c до d.

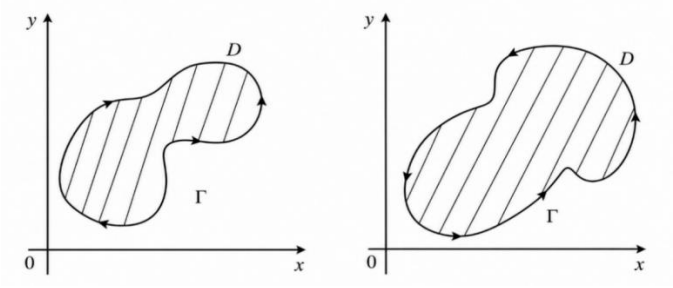
9.4.3. Формула Гріна

Формула Гріна пов'язує криволінійний інтеграл другого роду за замкненою кривою з подвійним інтегралом за областю, обмеженою цією кривою.

Нехай на площині xy задано замкнену область D з межею γ.

Межа γ області D орієнтована додатно (від'ємно), якщо під час руху по γ область D бачимо розміщеною ліворуч (праворуч) (рис. 9.4.3.1. а)).

Область D орієнтована додатно (від'ємно), якщо її межа орієн-тована додатно (від'ємно) (рис. 9.4.3.1. б)).



а) *б)*

Рис. 9.4.3.1.

Область D називається ***областю 1-го типу***, якщо вона обмежена знизу кривою $\gamma_1: y = y_1(x)$, згори – кривою $\gamma_2: y = y_2(x)$, і, можливо, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, причому будь-яка пряма, паралельна осі y, перетинає межі γ_1 і γ_2 не більш ніж у двох точках (рис. 9.4.3.2).

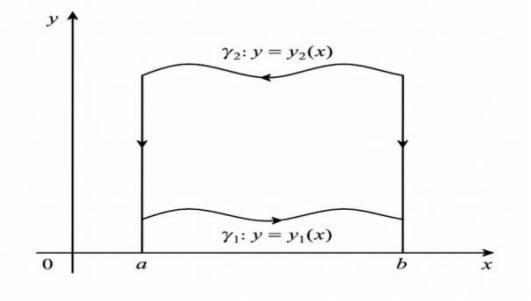


Рис. 9.4.3.2. Область першого типу

Область D називається ***областю 2-го типу***, якщо вона обмежена ліворуч кривою $\gamma_1: x = x_1(y)$, праворуч – кривою $\gamma_2: x = x_2(y)$, і, можливо, відрізками прямих $y = c$ і $y = d$, причому будь-яка пряма, паралельна осі x, перетинає межі γ_1 і γ_2 не більш ніж у двох точках (рис. 9.4.3.3).

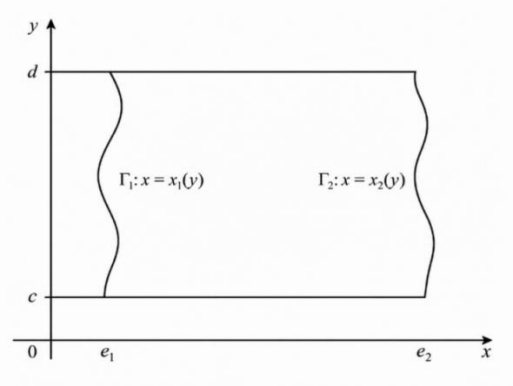


Рис. 9.4.3.3. Область другого типу

Теорема. Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ у замкненій однозв'язній області D, обмеженій кусково-гладкою кривою j. Тоді

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \tag{9.4.3.1}$$

де криволінійний інтеграл обчислюється за межею γ області D, орієнтованою додатно. Вираз (9.4.3.1) називається ***формулою Гріна.***

9.4.4. Застосування криволінійного інтеграла другого роду до розв'язання задач геометрії й механіки

Площа S фігури, обмеженої простим замкненим контуром L, обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2} \oint_{L} xdy - ydx \tag{9.4.4.1}$$

Ця формула безпосередньо випливає з формули Гріна ($P = -y, Q = x$).

Контур інтегрування пробігається таким чином, щоб обмежена ним область залишається зліва (додатний напрямок).

Відзначимо, що для обчислення площі можна застосувати й інші формули, а саме:

$$S = \oint_L x dy, \qquad S = -\oint_L y dx$$

Робота, що здійснюється змінною силою $\vec{F} = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$, на криволінійному шляху L обчислюється за формулою

$$A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{9.4.4.2}$$

Зауважимо, що $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ являють собою проєкції сили $\vec{F}$ на осі координат, тобто $P(x,y) = F_x$, а у $Q(x,y) = F_y$.

9.5. Поверхневі інтеграли

9.5.1. Поверхневий інтеграл першого роду

Поверхня називається ***гладкою***, якщо в кожній її точці існує дотична площина, положення якої неперервно змінюється разом із точкою дотику.

Гладкими є, наприклад, площина, сфера, еліпсоїд, параболоїд.

Поверхня називається ***кусково-гладкою***, якщо вона складається зі скінченого числа гладких частин, що примикають одна до одної по кусково-гладких або просто гладких лініях. Найпростішим прикладом кусково-гладкої поверхні є поверхня будь-якого багатогранника.

Фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду полягає в тому, що маса поверхні S вигнутої пластини, густина розподілу маси якої описує функція $\gamma\,(x,y,z)$, визначається за співвідношенням

$$m = \iint_S \gamma\,(x,y,z)\,dS$$

Якщо оболонка є однорідною $\gamma\,(x,y,z)=1$, то інтеграл $\iint_S dS$ чисельно рівний площі поверхні, за якою проводиться інтегрування

$$S=\iint_S dS.$$

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\substack{d_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}\gamma\,(x,y,z)\Delta S_i$, яка не залежить ні від способу поділу тонкостінної оболонки на частини S_i, ні від вибору точок $M_i(x_i,y_i,z_i)\in\Delta S$ (рис. 9.5.1.1), то ця границя називається ***поверхневим інтегралом першого роду по поверхні S*** від функції $\gamma\,(x,y,z)$ і позначається

$$\iint_S \gamma\,(x,y,z)\,dS.$$

Отже,

$$\lim_{\substack{d_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}\gamma\,(x,y,z)\Delta S_i=\iint_S \gamma\,(x,y,z)\,dS. \tag{9.5.1.1}$$

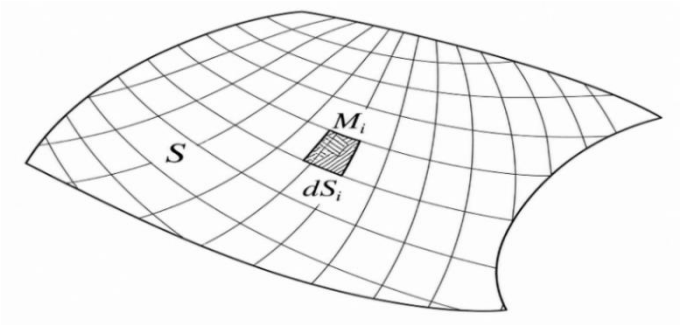


Рис. 9. 5.1.1.

Теорема (*достатня умова існування поверхневого інтеграла першого роду*).

Якщо поверхня S гладка або кусково-гладка, а функція $f\,(x;y;z)$ неперервна в кожній точці цієї гладкої поверхні, то поверхневий інтеграл першого роду існує і його величина не залежить ні від способу розбиття поверхні на частини, ні від вибору точок на них.

Властивості поверхневих інтегралів першого роду.

1. $\iint_S C \cdot f(x,y,z)\,dS = C \cdot \iint_S f(x,y,z)\,dS, \quad C = const$

2. Якщо для функції $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$ існує поверхневий інтеграл першого роду, то для функції $f(x,y,z) \pm g(x,y,z)$ також існує поверхневий інтеграл першого роду, причому

$$\iint_S f(x,y,z) \pm g(x,y,z)\,dS = \iint_S f(x,y,z)\,dS \pm \iint_S g(x,y,z)\,dS.$$

3. Якщо поверхню S розбити на дві частини S_1 і S_2 , такі що спільною для них буде лише границя розділу, то

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)\,dS.$$

4. Якщо на поверхні S функція $f(x,y,z) \geq 0$, то $\iint_S f(x,y,z)\,dS \geq 0$.

5. Якщо на поверхні S виконується нерівність $f_1(x,y,z) \leq f_2(x,y,z)$, то

$$\iint_S f_1(x,y,z)\,dS \leq \iint_S f_2(x,y,z)\,dS.$$

для інтегрованої на поверхні S функції $f(x,y,z)$ справедлива нерівність

$$\left| \iint_S f(x,y,z)\,dS \right| \leq \iint_S |f(x,y,z)|\,dS.$$

7. **Теорема про середнє**: якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна на поверхні S , то на цій поверхні існує точка $M(x_c, y_c, z_c)$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = f(x_c, y_c, z_c) \cdot S.$$

Зауваження.

Якщо функція $z = z(x,y)$ і її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ неперервні в замкнутій області D, то елемент площі поверхні визначається формулою

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Таким чином поверхневий інтеграл першого роду перетворюється на подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{\sigma} F(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} F[x,y,z(x,y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \tag{9.5.1.2}$$

Аналогічно записуються формули, що виражають за відповідних умов інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли за її проєкціями на інші координатні площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $y = y(x,z)$ і проєктується на площину xOz в область D_i , тоді

$$\iint\limits_{\sigma} F\,(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} F\,[x,y(x,z),z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz. \tag{9.5.1.3}$$

Якщо поверхня задана рівнянням $x = x(y,z)$

$$\iint\limits_{\sigma} F\,(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} F\,[x(y,z),y,z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz. \tag{9.5.1.4}$$

Фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду.

Поверхневий інтеграл першого роду є ***масою поверхні σ***, що має змінну поверхневу густину $\mu = \mu(x,y,z)$

$$m = \iint\limits_{\sigma} \mu\,(x,y,z)\, d\sigma.$$

Якщо поверхня однорідна, μ = const.

Застосування поверхневого інтеграла першого роду.

1 Якщо підінтегральна функція $F(x,y,z) = 1$, тоді поверхневий інтеграл дорівнює ***площі поверхні σ***.

$$S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma.$$

2. Якщо маса в кожній точці поверхні σ розподілена неперервно з густиною $\mu(x,y,z)$, тоді ***статичні моменти поверхні σ*** відносно координатних площин $x0y, x0z, y0z$ мають вигляд:

$$M_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z\mu d\sigma, \qquad M_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y\mu d\sigma, \qquad M_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x\mu d\sigma.$$

3. ***Координати центра ваги*** поверхні σ мають вигляд:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \qquad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \qquad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

4. ***Моменти інерції поверхні σ*** відносно початку координат і осей координат виражаються за допомогою формул:

$$I_0 = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mu d\sigma;\ I_x = \iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2)\mu d\sigma\,;$$

$$I_y = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + z^2)\mu d\sigma\,;\ I_z = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\mu d\sigma.$$

9.5.2. Поверхневі інтеграли другого роду

Поверхневі інтеграли другого роду є узагальненням криволінійних інтегралів другого роду на випадок інтегрування по поверхні. Вони застосовуються для обчислення потоку векторного поля через поверхню, а також у задачах фізики, механіки, гідродинаміки та електродинаміки.

Введемо поняття сторони поверхні. Візьмемо на гладкій поверхні σ довільну точку М, проведемо в ній нормаль $\vec{n}$ певного напряму і розглянемо на поверхні σ довільний замкнений контур, який виходить з точки М і повертається в точку М, не перетинаючи при цьому межі поверхні σ. Переміщатимемо точку М по замкненому контуру разом з вектором $\vec{n}$ так, щоб вектор $\vec{n}$ весь час залишався нормальним до σ. При обході заданого контура ми можемо повернутися в точку М з тим самим або з протилежним напрямом нормалі.

Якщо у довільну точку М поверхні σ після обходу довільного замкненого контура, розміщеного на поверхні σ, який не перетинає

її межу, ми повертаємося з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$, то поверхню називають ***двосторонньою***.

Якщо при обході деякого контура напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхню називають ***односторонньою***.

Прикладами двосторонніх поверхонь є площина, сфера, довільна замкнена поверхня без самоперетинів.

Прикладом односторонньої поверхні є так званий лист Мебіуса.

Двосторонню поверхню називають ***орієнтовною***, а вибір певної її сторони ***орієнтацією поверхні***. Напрямивши в кожній точці замкненої поверхні нормаль всередину об'єму, обмеженого поверхнею, дістанемо внутрішню сторону поверхні, а напрямивши нормаль зовні поверхні – зовнішню її сторону. Надалі розглядатимемо двосторонні поверхні. Односторонні поверхні неорієнтовні.

Нехай σ – орієнтовна (сторона вже обрана) поверхня, обмежена контуром L, який не має точок самоперетину. Вважатимемо за додатний той напрям обходу контура L, при якому спостерігач, розміщений так, що напрям нормалі збігається з напрямом від ніг до голови при русі, залишає поверхню зліва від себе (рис. 9.5.2.1).

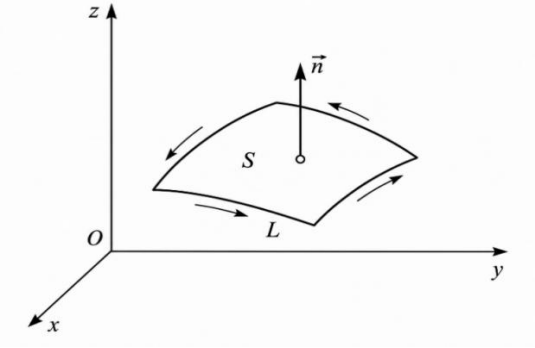


Рис. 9.5.2.1.

Протилежний напрям обходу називається ***від'ємним***. Якщо змінити орієнтацію поверхні на протилежну, то додатний і від'ємний напрями обходу контура L поміняються місцями.

З'ясуємо тепер поняття поверхневого інтеграла другого роду.

Нехай σ – гладка поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $R(x, y, z)$ – обмежена функція, визначена в точках поверхні σ.

Розіб'ємо σ довільно на n частин. Позначимо через D_i проєкцію i-ї частини поверхні σ на площину Oxy, а через ΔS_i – площу D_i, взяту зі знаком плюс, якщо обрана зовнішня сторона поверхні σ, і зі знаком мінус, якщо обрана внутрішня сторона поверхні σ. Виберемо в кожній частині σ довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\, \Delta S_i \tag{9.5.2.1}$$

Вираз (9.5.2.1) називається ***інтегральною сумою***.

Нехай $\lambda = \max d(\sigma_i)$ максимальний діаметр поверхонь σ_i.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\, \Delta S_i$, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частини, ні від вибору точок і M_i у кожній із них, то таку границю називають поверхневим ***інтегралом другого роду (за координатами) по поверхні σ***. Отже,

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\, \Delta S_i. \tag{9.5.2.2}$$

Поверхню σ можна також проєктувати на координатні площини Oxz та Oyz. Тоді матимемо ще два поверхневі інтеграли

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)dxdz; \qquad \iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)dydz$$

$P(x, y, z), Q(x, y, z)$ – функції, визначені в точках поверхні σ.

На практиці найпоширенішими є поверхневі інтеграли, які об'єднують усі названі, тобто

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)dxdz + Q(x, y, z)dydz + R(x, y, z)dxdy. \tag{9.5.2.3}$$

Якщо, наприклад, вектор $F = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ є швидкість рідини, то кількість П рідини, яка протікає через поверхню σ за одиницю

часу, називається ***потоком вектора*** $\vec{F}$ через поверхню σ і знаходиться за формулою:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)d\sigma.$$

Властивості поверхневого інтеграла за координатами.

1. Постійний множник можна виносити за знак поверхневого інтеграла

$$\iint_{\sigma} C \cdot R\,(x,y,z)dxdy = C \iint_{\sigma} R\,(x,y,z)dxdy,\ C = const\,.$$

2. Поверхневий інтеграл за координатами змінює свій знак у разі зміни сторони поверхні.

3. Якщо $S = S_1 \cup S_2$, а S_1 і S_2 із спільних внутрішніх точок мають лише межу розділу поверхонь, то поверхневий інтеграл за координатами по всій поверхні S рівний сумі інтегралів по її частинах S_1 і S_2 .

Обчислення поверхневих інтегралів другого роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів за допомогою проєктування поверхні S на координатні площини Oxy, Oxz, Oyz

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)dxdz + Q(x,y,z)dydz + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{Oxy}} P(x\,(y,z),y,z)dxdz$$

$$\pm \iint\limits_{D_{Oxz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint\limits_{D_{Oyz}} R(x,y,z(x,y))dxdz \qquad (9.5.2.4)$$

D_{Oxy}, D_{Oxz}, D_{Oyz}– проєкції поверхні S на площини Oxy; Oxz; Oyz відповідно.

Примітка: знак «$\pm$» вибираємо за «правилом косинусів».

Алгоритм роботи із «правилом косинусів»:

1) розбираємося, за якою поверхнею S – зовнішньою чи внутрішньою проводиться інтегрування;

2) будуємо вектор нормалі $\vec{n} = (\cos\alpha; \cos\beta\,; \cos\gamma\,)$ до поверхні в довільно вибраній точці М;

3) якщо $\alpha;\beta;\gamma$ – гострі, то косинуси цих кутів додатні «$\pm$» заміняємо на «+»; якщо $\alpha;\beta;\gamma$ – тупі, то косинуси таких кутів від'ємні «$\pm$» заміняємо на «$-$».

9.6. Розв'язування прикладів та задач

◊◊◊

1. Обчислити двократний інтеграл $\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy\right) dx$.

Розв'язання.

Спочатку обчислюємо внутрішній інтеграл за змінною y, вважаючи x сталою величиною. Після цього отриманий вираз інтегруємо за змінною x на проміжку від 0 до 1.

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^4+\frac{y^6}{3}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{21}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}+\frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

◊◊◊

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (4-x^2-y^2)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $D: x=0, x=1, y=0, y=\frac{3}{2}$.

Розв'язання.

Область D є правильною і простою як в напрямку осі Oy, так і в напрямку осі Ox.

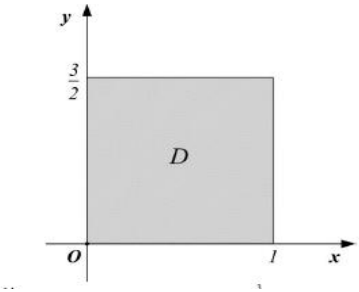


Рис. 9.6.1.

Область D є прямокутником: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{3}{2}$.

Отже, подвійний інтеграл запишемо у вигляді:

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{3/2} (4 - x^2 - y^2)\,dy = \int_0^1 \left(4y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{3/2} dx = \int_0^1 \left(6 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}\right) dx = \left(6x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{8}x\right)\Big|_0^1 = 6 - \frac{1}{2} - \frac{9}{8} = \frac{48-4-9}{8} = \frac{35}{8}.$$

3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (1 + x + y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $D: y = -x, x = \sqrt{y},\ y = 2$.

Розв'язання.

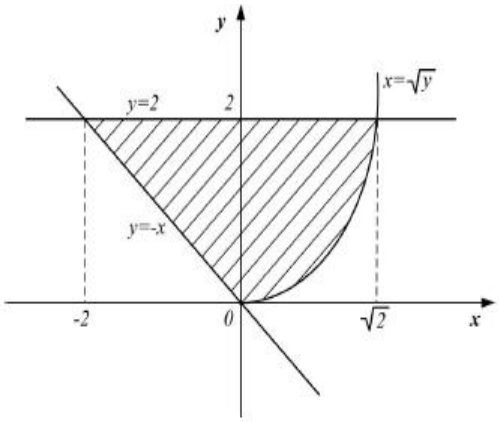


Рис. 9.6.2.

Область D є правильною, але не є простою в напрямку осі Oy.

Якщо внутрішній інтеграл обчислювати за змінною y, то подвійний інтеграл зведеться до суми двох повторних інтегралів:

$$\iint_D (1 + x + y)\,dxdy = \int_{-2}^{0} dx \int_{-x}^{2} (1 + x + y)\,dy + \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{2} (1 + x + y)\,dy$$

Але область є правильною і простою в напрямку осі Ox.

Тому при обчисленні інтеграла раціональніше внутрішній інтеграл обчислювати за змінною x:

$$\iint\limits_D (1+x+y)\,dxdy = \int_0^2 dy \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1+x+y)\,dx = \int_0^2 \left(x + \frac{x^2}{2} + xy\right)\Big|_{-y}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\sqrt{y} + \frac{y}{2} + y\sqrt{y} + y - \frac{y^2}{2} + y^2\right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(\sqrt{y} + \frac{3y}{2} + y\sqrt{y} + \frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(y^{1/2} + \frac{3y}{2} + y^{3/2} + \frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \left(\frac{2}{3}y^{3/2} + \frac{3y^2}{4} + \frac{2}{5}y^{5/2} + \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} + \frac{3\cdot 2^2}{4} + \frac{2}{5}\cdot 2^{\frac{5}{2}} + \frac{2^3}{6} - 0 = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 3 + \frac{8\sqrt{2}}{5} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{44\sqrt{2}}{15} + \frac{13}{3}.$$

Якщо область інтегрування не є правильною ні в напрямку осі Ox, ні в напрямку осі Oy, то необхідно таку неправильну область розбити на скінченне число правильних (або в напрямку Ox, або в напрямку Oy) областей і звести обчислення подвійного інтеграла до обчислення двократних інтегралів по цих правильних областях.



4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D e^{x+y}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $D: x = \pm 1,\ x = \pm 2,\ y = \pm 1,\ y = \pm 2$.

Розв'язання.

Область D не є правильною ні в напрямку осі Ox, ні в напрямку осі Oy. Тому розіб'ємо область на чотири правильні і прості в напрямку осі Oy області:

$$D_1 = \{(x;y) \in D | -2 \le x \le -1, -2 \le y \le 2\},$$
$$D_2 = \{(x;y) \in D | -1 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\},$$
$$D_3 = \{(x;y) \in D | -1 \le x \le 1, -2 \le y \le -1\},$$
$$D_4 = \{(x;y) \in D |\ 1 \le x \le 2, -2 \le y \le 2\},$$

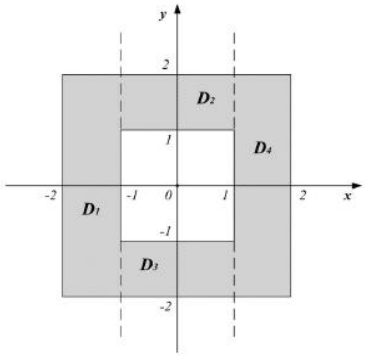


Рис. 9.6.3.

Тепер

$$\iint_D e^{x+y}\,dxdy = \iint_{D_1} e^{x+y}\,dxdy + \iint_{D_2} e^{x+y}\,dxdy + \iint_{D_3} e^{x+y}\,dxdy + \iint_{D_4} e^{x+y}\,dxdy = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-2}^{2} e^x e^y\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{1}^{2} e^x e^y\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{-1} e^x e^y\,dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-2}^{2} e^x e^y\,dy = e^x|_{-2}^{-1} \cdot e^y|_{-2}^{2} + e^x|_{-1}^{1} \cdot e^y|_{1}^{2} + e^x|_{-1}^{1} \cdot e^y|_{-2}^{-1} + e^x|_{1}^{2} \cdot e^y|_{-2}^{2} = (e^{-1} - e^{-2})(e^2 - e^{-2}) + (e^1 - e^{-1})(e^2 - e^1) + (e^1 - e^{-1})(e^{-1} - e^{-2}) + (e^2 - e^1)(e^2 - e^{-2}) = e^4 - e^2 - e^{-2} + e^{-4}.$$



5. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_0^{e^y} f(x,y)dx.$$

Розв'язання.

Область інтегрування D обмежена лініями $y = 0, y = 1, x = 0$, $x = e^y$ або $x = lny$.

Якщо внутрішнє інтегрування провести по y , а зовнішнє – по x, то задану область D треба розглядати як правильну в напрямку осі Oy. Оскільки лінія, на якій містяться точки входу в область, задана двома різними рівняннями, то дану область треба розбити на дві частини.

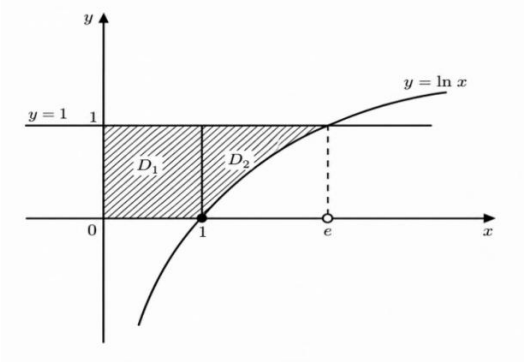


Рис. 9.6.4.

$$D_1 = \{(x;y) \in D |\ 0 \le y \le 1, \qquad 0 \le x \le 1\},$$
$$D_2 = \{(x;y) \in D | lnx \le y \le 1, \qquad 1 \le x \le e\ \}.$$

$$\int_0^1 dy \int_0^{e^y} f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_0^e dx \int_{lnx}^1 f(x,y)dy.$$

✧✧✧

6. Застосовуючи заміну змінних $u = y - x,\ v = y + \frac{1}{3}x$, обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (y - x)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями

$$D: y = x + 1, y = x - 3, y = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{7}{3}, y = -\tfrac{1}{3}x + 5.$$

Розв'язання.

Запишемо рівняння ліній, що обмежують область D, в нових змінних u, v:

$$y = x + 1 \Rightarrow u = 1, y = x - 3 \Rightarrow u = -3,$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Rightarrow v = \frac{7}{3}, y = -\frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow v = 5.$$

Таким чином, область D після заміни змінних переходить в область D' – прямокутник, обмежений прямими $u = -3, u = 1$, $v = \frac{7}{3}, v = 5$.

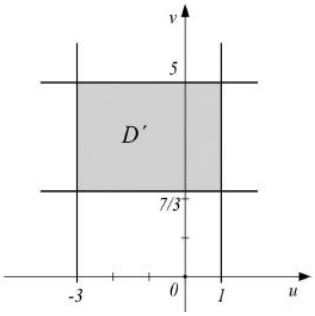


Рис. 9.6.5.

Щоб обчислити якобіан заміни змінних, виразимо змінні x, y через змінні u, v:

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + \frac{1}{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - u \\ v = y + \frac{1}{3}(y - u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \\ y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \end{cases}$$

Отже,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4},$$

$$\iint\limits_D (y - x)\,dxdy = \iint\limits_{D'} u \cdot \frac{3}{4}\,dudv = \frac{3}{4}\int_{-3}^{1} du \int_{\frac{7}{3}}^{5} u\,dv = \frac{3}{4}\int_{-3}^{1} [uv]\Big|_{\frac{7}{3}}^{5} du$$

$$= \frac{3}{4}\int_{-3}^{1} u\left(5 - \frac{7}{3}\right) du = \frac{3}{4}\int_{-3}^{1} \frac{8}{3}u\,du = 2\int_{-3}^{1} u\,du = 2 \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_{-3}^{1}$$

$$= 1^2 - (-3)^2 = 1 - 9 = -8.$$

✧✧✧

7. Обчислити $\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, де область обмежена колами $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$ і прямими $y = x,\ y = 2x$.

Розв'язання.

Побудуємо область D, попередньо перетворивши рівняння кіл:

$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4,$$
$$x^2 + y^2 = 8x \Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 16.$$

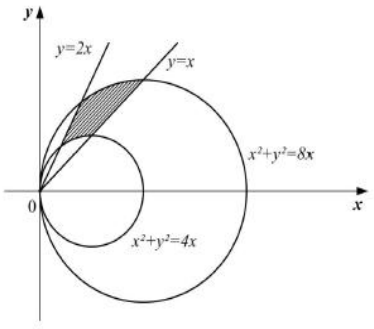


Рис. 9.6.6.

Перейдемо до полярних координат.

Тоді підінтегральна функція $\frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{\rho^4}$.

Запишемо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування, в полярних координатах:

$$x^2 + y^2 = 4x \;\Rightarrow\; \rho^2 = 4\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; \rho = 4\cos\varphi,$$
$$x^2 + y^2 = 8x \;\Rightarrow\; \rho^2 = 8\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; \rho = 8\cos\varphi,$$
$$y = x \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; tg\,\varphi = 1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4},$$
$$y = 2x \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi = 2\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; tg\,\varphi = 2, \qquad \varphi = arctg\,2.$$

Таким чином, $D' = \left\{(\rho,\varphi): \frac{\pi}{4} \le \varphi \le arctg\,2,\ 4\cos\varphi \le \rho \le 8\cos\varphi\right\}$.

Отже,

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} = \iint_{D'} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^4} = \iint_{D'} \frac{d\rho d\varphi}{\rho^3} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg\,2} \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \frac{d\rho d\varphi}{\rho^3}$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg\,2} \frac{1}{\rho^2}\Big|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg\,2} \left(\frac{1}{64cos^{\,2}\varphi} - \frac{1}{16cos^{\,2}\varphi}\right) d\varphi$$
$$= \frac{3}{128}\int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg\,2} \frac{1}{cos^{\,2}\varphi} d\varphi = \frac{3}{128} tg\,\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{arctg\,2}$$
$$= \frac{3}{128}\left(tg(arctg\,2) - tg\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{128}(2-1) = \frac{3}{128}.$$

✧✧✧

8. Обчислити $\iint_D dxdy$, де D – область, яка обмежена колом $\rho = 2$, кардіоїдою $\rho = 2(1-\cos\varphi)$ та розміщена зовні кардіоїди в першій і четвертій чвертях.

Розв'язання.

Побудуємо область D.

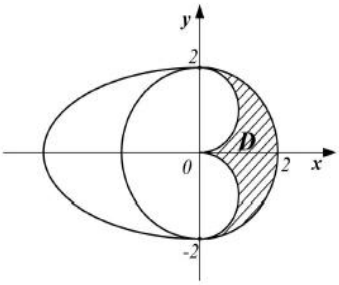


Рис. 9.6.7.

Очевидно, що $D' = \left\{(\rho,\varphi): -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 2(1-\cos\varphi) \le \rho \le 2\right\}$ і

$$\iint_D dxdy = \iint_{D'} \rho d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2(1-\cos\varphi)}^{2} \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_{2(1-\cos\varphi)}^{2} d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{4(1-\cos\varphi)^2}{2}\right) d\varphi = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-(1-\cos\varphi)^2) d\varphi$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-(1-2\cos\varphi + cos^{\,2}\varphi) d\varphi$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi - cos^{\,2}\varphi) d\varphi$$

$$= 4\sin\varphi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi) d\varphi$$

$$= 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \varphi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 8 - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}(\sin\pi + \sin\pi) = 8 - \pi - 0 = 8 - \pi.$$

✧✧✧

9. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x = y^2 - 2y$, $x - y = 0$.

Розв'язання.

Знайдемо ординати точок перетину даних ліній. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

Отримаємо:

$$y = y^2 - 2y, \qquad y_1 = 0, \qquad y_2 = 3.$$

На рисунку зображено фігуру, обмежену лініями $x = y^2 - 2y$, $x - y = 0$.

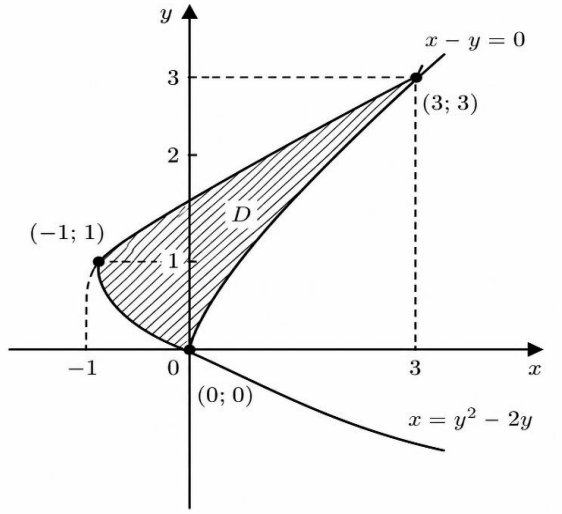


Рис. 9.6.8.

Площу фігури обчислюємо за формулою:

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^3 dy \int_{y^2-2y}^{y} dx = \int_0^3 (y - y^2 + 2y)dy = \int_0^3 (3y - y^2)dy = 4{,}5.$$

Отже, $S = 4{,}5$.

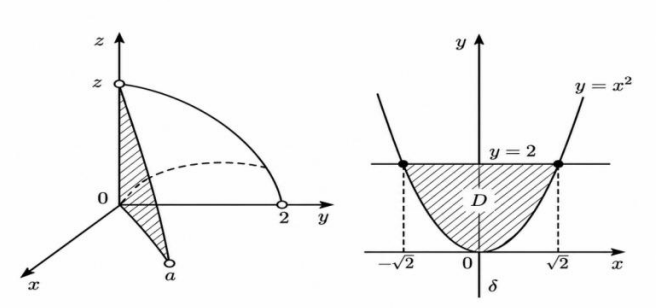
✧✧✧

10. Знайти об'єм тіла, обмеженого циліндром $y = x^2$ та площинами $z = 0,\ z = 2 - y$.

Розв'язання.

Циліндр $y = x^2$ обмежений площинами $z = 0,\ z = 2 - y$ зображено на рис. 9.6.9. а).

Областю D тут є параболічний сегмент рис. 9.6.9. б).



а) *б)*

Рис. 9.6.9

тому

$$D = \{x^2 \le y \le 2, -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\}.$$

Об'єм тіла шукаємо за формолоую:

$$\mathrm{V} = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

$$\mathrm{V} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{2} (2-y)\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{2} dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2\right) dx.$$

Таким чином,

$$\mathrm{V} = \frac{32\sqrt{2}}{15}.$$

✧✧✧

11. Обчислити площу частини параболоїда $2z = x^2 + y^2$, яка розміщена всередині циліндра $x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання.

Побудуємо задану поверхню.

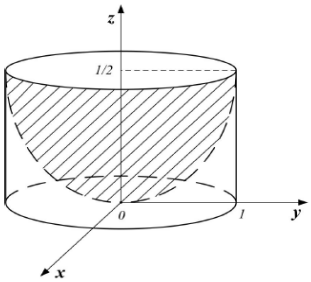


Рис. 9.6.10.

За формулою обчислення площі поверхні

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy,$$

де D – одиничне коло $x^2 + y^2 = 1$, що лежить в площині Oxy.

При обчисленні останнього подвійного інтеграла перейдемо до полярних координат:

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1+\rho^2)^{1/2} d(1+\rho^2) =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1+\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (2^{3/2}-1) d\varphi = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

◊◊◊

12. Знайти масу пластини D, обмежену лініями $y = 0, x + y = 2, y = x^2$, якщо густина пластини в кожній точці (x, y) дорівнює $\gamma(x, y) = y^2 x$.

Розв'язання.

На рисунку зображено пластину D, обмежену лініями

$$y = 0, x + y = 2, y = x^2$$

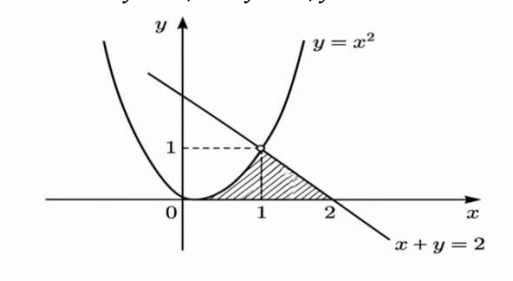


Рис. 9.6.11.

Область можна записати:

$$D = \{\sqrt{y} \le x \le 2 - y, 0 \le y \le 1 \ \ \}.$$

Масу пластини обчислюємо за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dxdy.$$

$$m = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (y^2 x)\, dx = \int_0^1 \left(y^2 \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy = \int_0^1 \left(2y^2 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{y^4}{2}\right) dy = \frac{17}{120}.$$

✧✧✧

13. Обчислити $\iiint_\Omega x\, dxdydz$, якщо область Ω обмежена площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ y = 3,\ x + y = 2$.

Розв'язання.

Область інтегрування Ω обмежена площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ y = 3,\ x + y = 2$. Вона проєктується на площину Oxy у прямокутник (див. рис.)

$$D = \{0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3 \ \ \}.$$

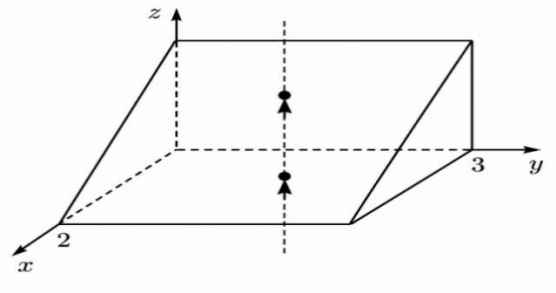


Рис. 9.6.12.

У напрямку осі Oz область обмежена знизу площиною $z_1 = 0$, а зверху площиною $z_2 = 2 - x$. Отже, область Ω є правильною в напрямку осі Oz.

Тому потрійний інтеграл можна подати у вигляді повторного інтеграла

$$\iiint_\Omega x\, dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^{2-x} xdz.$$

Обчислимо інтеграл:

$$\int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^{2-x} xdz = \int_0^2 xdx \int_0^3 z|_0^{2-x} dy = \int_0^2 xdx \int_0^3 (2-x)dy =$$

$$= \int_0^2 (x \cdot (2-x) \cdot y|_0^3 dx = 3\int_0^2 (2x - x^2)dx = 3 \cdot (x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = 3 \cdot \left(4 - \frac{8}{3}\right) = 4.$$

14. Обчислити інтеграл $\iiint_\Omega (x+y-z)\,dxdydz$, де область Ω паралелепіпед, обмежений площинами $x=-1,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=2$.

Розв'язання.

Область інтегрування Ω є прямокутним паралелепіпедом, обмеженим площинами $x=-1,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=2$.

Ця область є правильною в напрямку осі Oz (див. рис.), тому потрійний інтеграл можна подати у вигляді повторного інтеграла:

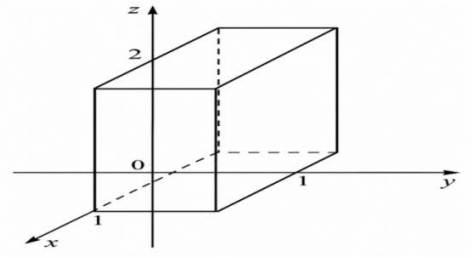


Рис. 9.6.13.

$$\iiint_\Omega (x+y-z)\,dxdydz = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x+y-z)dz$$

Обчислимо:

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x+y-z)dz = \int_{-1}^1 dx \int_0^3 (xz + yz - \frac{z^2}{2})\Big|_0^2 dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^3 (2x +$$

$$+ 2y - 2)dy = \int_{-1}^1 (2xz + y^2 - 2y)|_0^1 dx = \int_{-1}^1 (2x-1)dx = -2.$$

✧✧✧

15. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_\Omega xyz\,dxdydz$, де область Ω обмежена поверхнями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

Розв'язання.

Область інтегрування Ω обмежена координатними площинами $x=0, y=0, z=0$, і площиною $x+y+z=1$ і є правильною в напрямку осі Oz (див. рис.).

Область Ω проєктується на площину Oxy в трикутник

$$D_{xy}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}.$$

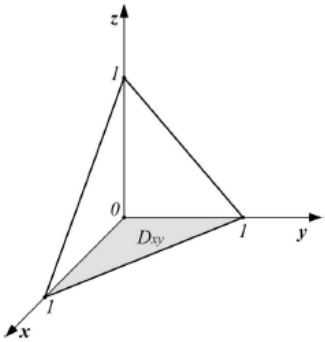


Рис. 9.6.14.

Точка входу в область Ω лежить на площині $z=0$, а точка виходу з області – на площині $z=1-x-y$. Тому змінна z змінюється в межах від 0 до $1-x-y$ і

$$\iiint_\Omega xyz\,dxdydz=\iint_{D_{xy}}\left[\int_0^{1-x-y}xyzdz\right]dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xyzdz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xy\frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xy(1-x-y)^2dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xy((1-x)^2-2(1-x)y+y^2)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x(1-x)^2y-2x(1-x)y^2+xy^3)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x(1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2x(1-x)\frac{y^3}{3} + x\frac{y^4}{4} \right)\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x(1-x)^4 - \frac{2}{3}x(1-x)^4 + \frac{1}{4}x(1-x)^4 \right) dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4\, dx = \frac{1}{24}\int_0^1 x(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 (x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x)\, dx$$

$$= \frac{1}{24}\left(\frac{x^6}{6} - 4\frac{x^5}{5} + 6\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{24}\left(\frac{1}{6} - \frac{4}{5} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{24} \cdot \frac{5 - 24 + 45 - 40 + 15}{30}$$

$$= \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{720}.$$

✧✧✧

16. Обчислити інтеграл $\iiint_V ((x+y)^2 - z)\, dxdydz$, якщо область обмежена поверхнями $z = 0, (z-1)^2 = x^2 + y^2$.

Розв'язання.

Область V є конусом

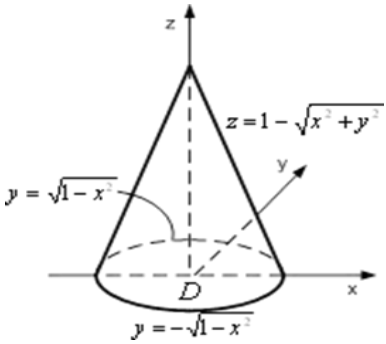


Рис. 9.6.15.

Рівняння конічної поверхні, що обмежує область V , можна записати у вигляді $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, а саму область V подати таким чином:

$$V = \{(x, y, z): (x, y) \in D, 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

де D – круг радіуса 1 із центром $O(0,0)$. Тому цей потрійний інтеграл можна звести до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів у прямокутних координатах:

$$I = \iiint_V ((x+y)^2 - z)\, dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} ((x+y)^2 - z)dz$$

Проте зручніше перейти до циліндричних координат

$$(\rho, \varphi, z): x = \rho\cos\varphi\,,\ \ y = \rho\sin\varphi\,,\ \ z = z.$$

Тоді прообразом круга D *є прямокутник* $\{(\rho, \varphi): 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, прообразом конічної поверхні – плоска поверхня $z = 1 - \rho$, а прообразом області V – область V_1 .

Якобіан переходу до циліндричних координат дорівнює ρ, підінтегральна функція в циліндричних координатах дорівнює $\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z$.

Зводячи потрійний інтеграл за областю V_1 до послідовного обчислення трьох визначних інтегралів, отримаємо

$$I = \iiint_V (\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z)\rho\ d\rho d\varphi dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho} (\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^3(1 - \rho)(1 + \sin 2\varphi) - \frac{1}{2}\rho(1$$

$$- \rho)^2)d\rho = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{20}(1 + sin2\varphi) - \frac{1}{24})d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{60}.$$

Зазначимо, що розставлення меж інтегрування в циліндричних координатах, як правило, виконують, розглядаючи не область V_1, а зміну циліндричних координат в області V. Наочно

бачимо, що в області D змінна φ змінюється від 0 *до* 2π , при кожному значенні φ змінна ρ змінюється від 0 до 1, а для кожної точки (ρ, φ) області D змінна z змінюється в області V *від* 0 *(*значення z в області D*)* до $1-\sqrt{x^2+y^2}=1-\rho$ (значення z на конічній поверхні).

✧✧✧

17. Обчислити інтеграл $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$ де V – куля $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Розв'язання.

Область інтегрування V є кулею $x^2+y^2+z^2 \le R^2$

Для обчислення даного інтеграла доцільно перейти до сферичних координат:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

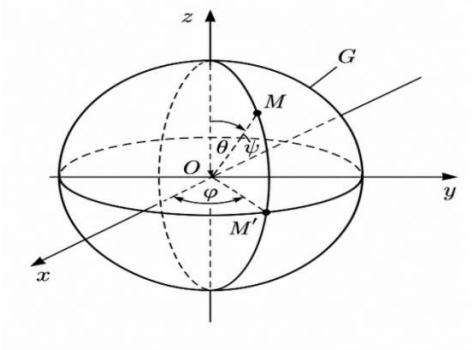


Рис. 9.6.16.

У сферичних координатах:

$$x^2+y^2+z^2 \le r^2,$$

а елемент об'єму має вигляд

$$dxdydz = r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi.$$

Тому $(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = r^2\cdot r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi/$

Координати r, θ, φ змінюються в таких межах*:*

$$0 \le r \le R, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Отже,

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin\theta\, d\varphi =$$
$$\int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = 4\pi \int_0^R r^4 dr =$$
$$4\pi \left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

18. Обчислити масу тіла m, обмежену координатними площинами і площинами $x+y+z=2,\ x=1,\ y=1,$ якщо його густина $\gamma(x,y,z)=x+2z$.

Розв'язання.

Схематичне зображення тіла, обмеженого координатними площинами та площиною $x+y+z=2,\ x=1,\ y=1$, наведено на рисунку.

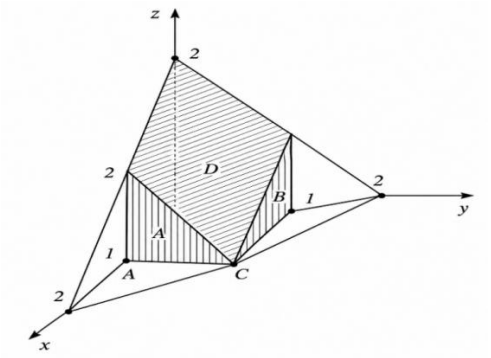


Рис. 9.6.17.

Масу тіла обчислюємо за формулою:

$$m = \iiint_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz$$

$$m = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{2-x-y} (x+2z)dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (xz+z^2)\Big|_0^{2-x-y} dy =$$
$$\int_0^1 dx \int_0^1 (y^2+xy-4y-2x+4)dy = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x+\frac{7}{3}\right)dx = \frac{19}{12}.$$

◊◊◊

19. Обчислити інтеграл $\int_l xdl$, де l – дуга параболи $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$, що сполучає точки $(0,0)$ і $(2,\sqrt{2})$.

Розв'язання.

Оскільки крива задана рівнянням $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$, то параметром можна взяти змінну x, де x $\in [0,2]$.

Знайдемо похідну: $y' = \sqrt{2}x$.

Для криволінійного інтеграла першого роду використовуємо формулу: $\int_l f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$.

У нашому випадку $f(x,y) = x$, тому

$$\int_l xdl = \int_0^2 x\sqrt{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (1+2x^2)^{1/2} d(1+2x^2) = \frac{1}{6}\sqrt{(1+2x^2)^3}\Big|_0^2 = \frac{13}{3}.$$

◊◊◊

20. Обчислити інтеграл

$$\int_l 2x^2dx - (y^2-x^2)dy,$$

де l – частина параболи $y = x^2$ з початковою точкою $(0,0)$ і кінцевою точкою $(2,4)$.

Розв'язання.

Оскільки

$$y = x^2, \qquad dy = 2xdy,$$

тоді $y^2 = x^4$.

За формулою для інтеграла з урахуванням того, що $x \in [0,2]$, отримаємо:

$$\int_l 2x^2dx - (y^2-x^2)dy = \int_0^2 (2x^2 - (x^4-x^2)2x)dx,$$

Розкриємо дужки і обчислюємо:

$$\int_0^2 (2x^2 - 2x^5 - 2x^3)dx = -8.$$

✧✧✧

21. Обчислити інтеграл

$$I = \oint_l -x^2 y dx + xy^2 dy,$$

де l – коло $x^2 + y^2 = R^2$, яке обходимо, рухаючись проти годинникової стрілки.

Розв'язання.

Маємо $P = -x^2 y, Q = xy^2$.

За формулою Гріна: $\oint_\gamma P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2, \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2.$$

Тому

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 - (-x^2) = x^2 + y^2.$$

Область D, обмежена колом, є круг $x^2 + y^2 \le R^2$.

Переходимо до полярних координат:

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \qquad dxdy = \rho d\rho d\varphi.$$

Тоді:

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho^2 \cdot \rho \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

✧✧✧

22. Обчислити площу області D, обмеженої параболами

$$y^2 = x, \qquad x^2 = y.$$

Розв'язання.

Зобразимо область D, обмежену параболами $y^2 = x, x^2 = y$.

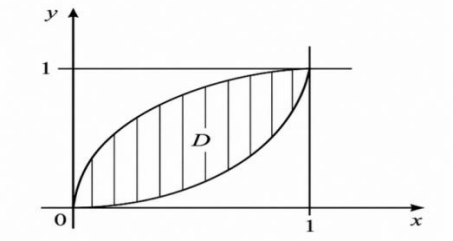


Рис. 9.6.18.

Точки перетину: (0,0), (1,1).

Скористаємося формулою

$$S = \frac{1}{2}\oint_{\gamma} xdy - ydx.$$

Нехай контур обходиться додатно.

Дуга $\Gamma_1: y = x^2,\ 0 \le x \le 1.$

Тоді:

$$dy = 2x\,dx.$$

Маємо:

$$\int_{\Gamma_1} -ydx + xdy = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Розглянемо дугу $\Gamma 2: x = y^2,\ 0 \le y \le 1.$

Маємо:

$$dx = 2y\,dy.$$

Тоді:

$$\int_{\Gamma_2} -ydx + xdy = -\int_1^0 y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

Оскільки:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \text{ то}$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

✧✧✧

Знайти масу дуги кривої $x = t, y = \frac{1}{2}t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3, (0 \le t \le 1)$, лінійна густина якої змінюється за законом $\gamma = \sqrt{2y}$.

Розв'язання.

Враховуючи, що $x_t' = 1,\ y_t' = t,\ z_t' = t^2$ і $0 \le t \le 1$ за формулою

$$m = \int_L \gamma\,(x, y)\,ds.$$

маємо:

$$m = \int_L \sqrt{2y}\,ds = \int_0^1 \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}t^2} \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot \sqrt{(1)^2 + (t)^2 + (t^2)^2}dt = \frac{1}{8}\left(3\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{2}ln\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}\right).$$

✧✧✧

23. Обчислити інтеграл $m = \iint_\sigma (z + 2x + \frac{4}{3}y)d\sigma$,

де σ – частина площини $6x + 4y + 3z = 12$, що лежить у першому октанті.

Розв'язання.

Зведемо поверхневий інтеграл першого роду до подвійного інтегралу по плоскій області D в площині xOy. Для цього спроєктуємо σ: $6x + 4y + 3z = 12$ на площину xOy. Одержимо ΔAOC, який і буде областю D, він обмежений прямими $x = 0$, $y = 0$ та $y = \frac{6-3x}{2}$, як показано на рис. 9.6.19.

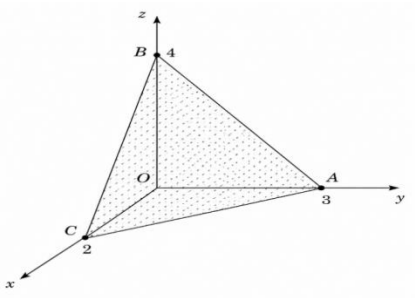


Рис. 9.6.19.

Щоб знайти елемент $d\sigma$, виразимо z як функцію від x і y з рівняння поверхні $6x + 4y + 3z = 12$.

Отримаємо

$$z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y.$$

Тоді $\frac{\partial z}{\partial x} = -2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{3}$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}\, dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3} dxdy.$$

Врахуємо формулу (9.3.1.2)

$$\iint_\sigma F\,(x, y, z)\, d\sigma = \iint_\sigma F\,[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

$$F\,[x, y, z(x, y)] = z + 2x + \frac{4}{3}y = 4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y = 4.$$

Таким чином,

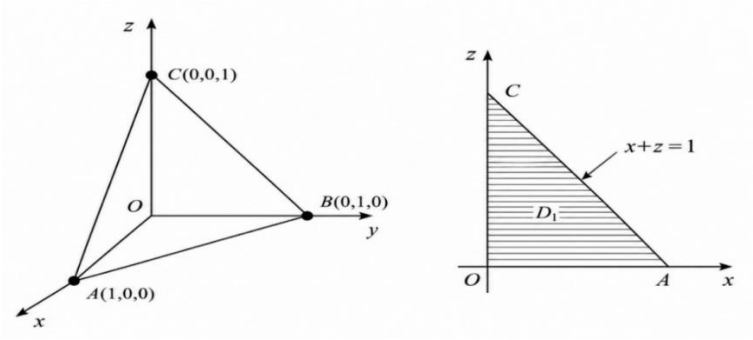
$$\iint\limits_{\sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)d\sigma=\iint\limits_{\sigma}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=4\frac{\sqrt{61}}{3}\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{\frac{6-3x}{2}}dy=4\sqrt{61}.$$

◊◊◊

24. $\iint_S ydxdz$, де S – внутрішня поверхня тетраедра, обмеженого площинами $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Розв'язання.

Замкнена поверхня S складається з чотирьох частин – трикутників *ABC, BCO, ACO, ABO,* розташованих в різних площинах (рис. 9.6.20. а)).



а) *б)*

Рис. 9.6.20.

Тому даний інтеграл будемо обчислювати як суму чотирьох інтегралів.

$$\iint\limits_{S}ydxdz=\iint\limits_{S_1}ydxdz+\iint\limits_{S_2}ydxdz+\iint\limits_{S_3}ydxdz+\iint\limits_{S_4}ydxdz$$

Тут S_1, S_2, S_3, S_4 – відповідно площини BCO, ACO, ABO, ABC. Проєкції BCO, ACO, ABO, ABC на площину Oxz позначимо відповідно D_1, D_2, D_3, D_4 $(D_2=D_4)$ (рис.9.6.20.б)).

Площини BCO, ABO перпендикулярні до площини Oxz, на площині ACO $y=0$, а на ABC $y=1-x-z$.

Таким чином

$$\iint\limits_{S_1} ydxdz = \iint\limits_{S_2} ydxdz = 0, \qquad \iint\limits_{S_3} ydxdz = \iint\limits_{S_3} 0dxdz = 0,$$

$$\iint\limits_{S_4} ydxdz = -\iint\limits_{D_4} (1-x-z)dxdz$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (-1+x+z)dz$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x-1)^2 dx = -\frac{(x-1)^3}{6}\Big|_0^1 = -\frac{1}{6}.$$

Отже,

$$I = 0+0+0-\tfrac{1}{6} = -\tfrac{1}{6}.$$



25. $I = \iint_S \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy$, де S – нижня сторона круга $x^2 + y^2 \le a^2$ (нормаль направлена проти осі Oz).

Розв'язання.

Поверхня S збігається зі своєю проєкцією D на площину Oxy. Враховуючи, що інтегрування здійснюється по нижній стороні круга, одержимо

$$I = -\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Тут D – круг радіуса a з центром в початку координат.

Для обчислення подвійного інтеграла зручно перейти до полярної системи координат. Тоді:

$$x^2 + y^2 = r^2, \sqrt[4]{x^2+y^2} = \sqrt{r},\ dxdy = rdrd\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$0 \le r \le a.$$

Таким чином,

$$I = -\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{r}\,r dr = -2\pi\frac{2r^{5/2}}{5}\Big|_0^a = -\frac{4\pi}{5}\sqrt{a^5}.$$

✧✧✧

26. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$I = \iint\limits_S (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)\,dxdy \ ,$$

де S – верхня сторона поверхні, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = 2ax$ *x із сфери*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx \qquad (R > a,\ z > 0).$$

Розв'язання.

Скористаємося формулою, яка зв'язує поверхневі інтеграли обох типів:

$$I = \iint\limits_S (y-z)cos\alpha + (z-x)cos\beta + (x-y)cos\gamma dS.$$

Вирахуємо напрямні косинуси нормалі:

$$cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{2x-2R}{2\sqrt{(x-R)^2+y^2+z^2}} = \frac{x-R}{R},$$

$$cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{2y}{2\sqrt{(x-R)^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{R},$$

$$cos\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{2z}{2\sqrt{(x-R)^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{R},$$

Тоді $I = \iint_S (z-y)dS$. Оскільки поверхня симетрична відносно площини Oxz, тоді

$$\iint_S ydS = 0, \qquad \text{а } I = \iint_S zdS.$$

Знову переходимо до поверхневого інтеграла другого роду:

$$I = \iint\limits_S zdS = \iint\limits_D \frac{z}{cos\gamma}dS = \iint\limits_D \frac{z}{\frac{z}{R}}dxdy = R\iint\limits_D dxdy = \pi a^2 R\,.$$

де область D: $(x-a)^2 + y^2 \le a^2$.

9.7. Контрольні запитання

1. Що називається подвійним інтегралом функції двох змінних?
2. Який геометричний зміст має подвійний інтеграл?
3. Який механічний зміст подвійного інтеграла?
4. Сформулюйте основні властивості подвійного інтеграла.
5. За яких умов існує подвійний інтеграл?
6. Яка область називається правильною в напрямку осі Ox?
7. Яка область називається правильною в напрямку осі Oy?
8. Яка область називається простою в напрямку осі?
9. Як звести подвійний інтеграл до повторного?
10. У якому порядку можна обчислювати повторний інтеграл?
11. Коли область інтегрування необхідно розбивати на прості області?
12. Як змінюються межі інтегрування при зміні порядку інтегрування?
13. Що називається якобіаном заміни змінних?
14. Який геометричний зміст має якобіан?
15. Сформулюйте формулу заміни змінних у подвійному інтегралі.
16. У яких випадках доцільно виконувати заміну змінних?
17. Як обчислюється подвійний інтеграл у полярних координатах?
18. У яких випадках доцільно переходити до полярних координат?
19. За якою формулою обчислюється площа плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла?
20. Як за допомогою подвійного інтеграла обчислюється об'єм тіла?
21. Як за допомогою подвійного інтеграла обчислюється площа поверхні?
22. Що називається потрійним інтегралом?
23. Який геометричний зміст має потрійний інтеграл?
24. Який механічний зміст потрійного інтеграла?
25. Сформулюйте основні властивості потрійного інтеграла.

26. За яких умов існує потрійний інтеграл?

27. Які області називаються простими просторовими областями?

28. Як звести потрійний інтеграл до трикратного?

29. Що називається внутрішнім інтегралом у потрійному інтегралі?

30. У якому порядку можна обчислювати трикратний інтеграл?

31. Як змінюються межі інтегрування при зміні порядку інтегрування?

32. Сформулюйте формулу заміни змінних у потрійному інтегралі.

33. Що називається якобіаном у потрійному інтегралі?

34. Що називається циліндричними координатами точки?

35. Які формули переходу від декартових до циліндричних координат?

36. Який вигляд має елемент об'єму в циліндричних координатах?

37. Що називається сферичними координатами точки?

38. Які формули переходу від декартових до сферичних координат?

39. Як обчислюється потрійний інтеграл у циліндричних координатах?

40. Як обчислюється потрійний інтеграл у сферичних координатах?

41. У яких випадках доцільно використовувати циліндричні координати?

42. Як за допомогою інтегралів знаходиться маса неоднорідної пластини?

43. Як обчислюються координати центра мас пластини?

44. Як за допомогою потрійного інтеграла обчислюється об'єм просторового тіла?

45. Як за допомогою потрійного інтеграла визначається маса неоднорідного тіла?

46. Як обчислюються координати центра мас просторового тіла?

47. Як за допомогою потрійного інтеграла знаходяться статичні моменти тіла?

48. Як за допомогою потрійного інтеграла обчислюються моменти інерції тіла?

49. Що називається криволінійним інтегралом першого роду?

50. Запишіть формули для обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду.

51. Сформулюйте властивості криволінійного інтеграла першого роду.

52. Чи залежить криволінійний інтеграл першого роду від напрямку шляху інтегрування?

53. У чому полягає фізичне тлумачення криволінійного інтеграла першого роду?

54. За якими формулами знаходяться статичні моменти дуги кривої відносно координатних осей і координати центра ваги?

55. Запишіть формули, за якими знаходяться моменти інерції дуги кривої відносно осей координат і початку координат.

56. Що називається криволінійним інтегралом вздовж заданого контура?

57. Сформулюйте правило обчислення криволінійного інтеграла за координатами для випадку, коли лінія (контур) інтегрування задана параметричними рівняннями.

58. Як обчислюється криволінійний інтеграл другого роду, якщо лінія інтегрування задана у вигляді $y = f(x)$ або $x = \psi(y)$?

59. Як впливає напрямок інтегрування на величину криволінійного інтеграла?

60. Як установлюється додатний напрямок у випадку замкненого контура інтегрування?

61. Сформулюйте формулу Гріна.

62. Яка поверхня називається гладкою, кусково-гладкою?

63. Що називають інтегральною сумою поверхневого інтеграла першого роду?

64. Що називається поверхневим інтегралом першого роду?

65. Сформулюйте властивості поверхневого інтеграла першого роду.

66. Як обчислюється поверхневий інтеграл першого роду?

67. У чому полягає фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду?

68. Яка поверхня називається двосторонньою? Яка поверхня називається орієнтованою?

69. Що називають додатним напрямом обходу контура на поверхні?

70. Яка фізична інтерпретація поверхневого інтеграла другого роду?

9.8. Завдання для самостійного виконання

Для зазначених областей D записати подвійні інтеграли від функції $f(x, y)$ у вигляді повторних, взятих у різних напрямах.

1. D – прямокутник з вершинами $A(1;1), B(1;3), C(4;3), E(4;1)$.

2. D – прямокутник з вершинами $O(0;0), A(3;0), B(3;1), C(0;1)$

3. D – трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(1;1)$.

4. D – трапеція з вершинами $O(0;0), A(2;0), B(1;1), C(0;1)$.

5. D – паралелограм з вершинами $A(1;2), B(2;4), C(2;7)$ $E(1;5)$.

6. D – фігура, обмежена лініями $y = 0,\ y = x,\ x = 5$.

7. D – фігура, обмежена лініями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 5$.

8. D – фігура, обмежена лініями $y = x,\ y = x - 4,\ y = 0,\ y = 2$.

9. D – фігура, обмежена кривою $x^2 + y^2 - 8x = 0$.

10. D – фігура, що міститься в першому квадранті і обмежена лініями $y = x,\ x^2 + y^2 = 2,\ y = 0$.

Обчислити повторні інтеграли.

11. $\int_0^1 dx \int_0^2 (x - y)dy.$

12. $\int_2^3 dx \int_1^2 \sqrt{x - y}dy.$

13. $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx.$

14. $\int_0^1 dy \int_0^1 \sqrt{xy}dx.$

15. $\int_0^4 dx \int_0^1 (yx^2 + e^y)dy.$

16. $\int_0^4 dx \int_1^4 (4^y + \sqrt[3]{x})dy.$

17. $\int_0^\pi dx \int_0^{\pi/2} 2\ sinx\ cosydy.$

18. $\int_0^1 dx \int_x^{2x} (3x + 2y)dy.$

19. $\int_{-4}^1 dx \int_{3x}^{4-x^2} (y - x)dy.$

20. $\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{x}{x^2+y^2} dy.$

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^2 x^2 ycos(xy^2)dy.$

22. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin^2 \varphi\, d\rho.$

Обчислити подвійні інтеграли.

23. $\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy,\ D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$

24. $\iint_D 7xy\,dxdy,\ D: y = x, y = -x, x = 1.$

25. $\iint_D (4y + x^2)dxdy,\ D: y = 0, y = x, y = 2 - x/$

26. $\iint_D (4y + x^2)dxdy,\ D: x + y = 1, x - y = 1, x = 0, x \ge 0.$

27. $\iint_D (ye^{\frac{xy}{2}})dxdy,\ D: y = ln2, y = ln3, x = 2, x = 4.$

28. $\iint_D (y^2e^{-\frac{xy}{4}})dxdy,\ D: y = 2, y = x, x = 0.$

29. $\iint_D (y^2 sin\frac{xy}{2})dxdy,\ D: y = \sqrt{\pi}, y = \frac{x}{2}, x = 0.$

30. $\iint_D ycosxy\,dxdy,\ D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = 1, x = 2.$

31. $\iint_D y^2 cosxy\,dxdy,\ D: x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = x.$

32. $\iint_D \frac{dxdy}{(x-y)^2},\ D: 1 \le x \le 2,\ \ 3 \le y \le 4.$

33. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+2y)^2},\ D: 2 \le x \le 5,\ \ 1 \le y \le 3.$

34. $\iint_D ycos^2x\,dxdy,\ D: 0 \le x \le 2\pi,\ \ 0 \le y \le a.$

35. $\iint_D \ln(x + y)\,dxdy,\ D: 1 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 1.$

Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі.

36. $\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

37. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

38. $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy.$

39. $\int_0^1 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy.$

40. $\int_0^2 dy \int_{4-2y^2}^{4-y^2} f(x,y)dx.$

41. $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x,y)dy.$

42. $\int_0^2 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx.$

43. $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 f(x,y)dy.$

44. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

45. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

46. $\int_0^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2}^{x} f(x,y)dy.$

47. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dy.$

48. $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx.$

49. $\int_0^4 dy \int_{0,5y+1}^{7-y} f(x,y)dx.$

50. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

51. $\int_0^1 dy \int_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)dy.$

52. $\int_0^4 dy \int_{\frac{3}{4}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx.$

53. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{-1-x} f(x,y)dy.$

54. $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+2} f(x,y)dx.$

55. $\int_0^4 dx \int_{\frac{3}{2}\sqrt{x}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

Обчислити подвійний інтеграл, виконавши заміну змінних.

56. $\iint_D (x+y)dxdy,\ x=u+v, y=u-v.$

57. $\iint_D (x-y)dxdy,\ x=2u, y=3v.$

58. $\iint_D (x^2+y^2)dxdy,\ x=\rho cos\varphi, y=\rho sin\varphi.$

59. $\iint_D xy\,dxdy,\ x=u-v, y=u+v.$

60. $\iint_D (x+y)^2\,dxdy,\ u=x+y, v=x-y.$

61. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, x=\rho cos\varphi, y=\rho sin\varphi.$

62. $\iint_D (x-2y)dxdy,\ x=u, y=u+v.$

63. $\iint_D (x+y)dxdy,\ x=au, y=bv.$

64. $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy, D: x=\rho cos\varphi, y=\rho sin\varphi.$

65. $\iint_D \frac{x-y}{x+y}dxdy,\ \ u=x+y, v=x-y.$

66. Застосовуючи заміну змінних $u=x+y, v=x-y$, обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (x+y)^3\cdot(x-y)^2\,dxdy,$$

якщо область D обмежена лініями

$$D: x+y=1,\quad x-y=1,\quad x+y=3,\quad x-y=-1.$$

67. Обчислити інтеграл $\iint_D xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями

$$xy=1,\qquad x+y=\frac{5}{2}$$

переходячи до нових змінних за формулами $x+y=u,\ xy=v$.

68. Обчислити інтеграл $\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y^2=ax,\ y^2=bx,\ xy=p,\ xy=q$ переходячи до нових змінних за формулами $y^2=ux,\ xy=v$.

Перейти до полярних координат і розставити межі інтегрування.

69. $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, де область $D: x^2+y^2\le 16.$

70. $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, де область $D: r^2\le x^2+y^2\le R^2.$

71. $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, де область $D: x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x$

72. $\int_0^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}} f(x,y)dy.$

73. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy.$

74. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dy.$

Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярної системи координат:

75. $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,\ D: x^2+y^2 \le 16.$

76. $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,\ D: x^2+y^2 \le R^2.$

77. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2)}\,dxdy,\ D: x^2+y^2 \le 1.$

78. $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,\ D: x^2+y^2 \le 2ax.$

79. $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2)}\,dxdy,\ D: x^2+y^2 \le ax.$

80. $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,\ D: x^2+(y+2)^2 \le 2.$

Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями.

81. $y = 6-x^2, y = 2.$

82. $4y = x^2-4x, x-y-3 = 0.$

83 $y^2 = 10x+25, y^2 = -6x+9.$

84. $y = 6-x^2, y = 2.$

85. $y^2 = 4ax+4a^2, x+y = 2a\ (a>0).$

86. $xy = a^2, xy = b^2, y = m, y = n\ (a>b, m>n).$

87. $xy = 4, x+y = 5.$

88. $2xy = a^2, xy = 2a^2, 2y = x, y = 2x\ .$

89. $xy = 1\ , xy = 8,\ y^2 = x, y^2 = 8x\ .$

Обчислити об'єми тіл, обмежених заданими поверхнями.

90. $x+y+z = 4, x = 2, y = 3, x = 0, y = 0, z = 0.$

91. $x+y+z = 6, x = 6, x+2y = 4, x = 0, y = 0, z = 0.$

92. $x+y+z = 6, x+y = 2,\ x = 0, y = 0, z = 0.$

93. $x+y+z = 5, 3x+y = 5, 3x+2y = 10,\ y = 0, z = 0.$

94. $x+y+z = 6, x = y, x = 3, y = 0, z = 0.$

95. $x+y+z = 6, 3x+y = 6, 3x+2y = 12,\ y = 0, z = 0.$

96. $z = x+y+1, x+y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

97. $x+y+z = 3, x^2+y^2 = 1, z = 0.$

98. $x+y+z = a, x^2+y^2 = r^2, z = 0.$

99. $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4} = 1, x = 2y^2,\ z = 0.$

100. $z = x^2 + y^2 + 1, x = 4, y = 4,\ x = 0, y = 0, z = 0.$

101. $2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - a\,x = 0, z = 0.$

102. $x^2 + y^2 = 2ax, z = x, z = 3x.$

103. $x = y^2 + z^2 + 1, x = y, z \geq 0.$

104. $z = x^2 + y^2, y = x^2, z = 0, 0 \leq y \leq 1.$

105. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = ax, z = 0.$

106. $z = x^2 + y^2, x + \ y = 1,\ \ x = 0, y = 0, z = 0.$

107. $z = x^2 + y^2, y = 6 - x,\ \ y = 2x, y = 1, z = 0.$

108. $z = 4 - x^2, 2x + y = 4,\ \ x = 0, y = 0, y = 1, z = 0, x > 0.$

109. $x^2 + y^2 = 4, z = y, z = 0.$

110. $x^2 + 4y^2 = 4, z = 12 - 3x - 4y, z = 1.$

111. Обчислити масу неоднорідної пластини D, яка обмежена лініями $y = x^2 - 1, x + y = 0$, якщо поверхнева густина матеріалу в кожній її точці змінюється за законом $\gamma(x, y) = 2x + 5y + 8.$

112. Неоднорідна пластина має форму області D, яка обмежена лініями $2x + y = 1, 2x = y = 3, x - y = -1, x - y = 2.$ Обчислити масу такої пластини, якщо поверхнева густина матеріалу в кожній її точці змінюється за законом $\gamma(x, y) = x + y.$

113. Знайти статичний момент однорідного прямокутника зі сторонами a і b щодо сторони a.

114. Знайти координати центра мас однорідної плоскої пластинки $\gamma(x, y) = 1$, обмеженої верхньою половиною кола $x^2 + y^2 = 2x$ і відрізком осі Ox.

115. Знайти координати центра мас однорідної плоскої пластинки $\gamma(x, y) = 1$, обмеженої верхньою половиною еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ і його великою віссю.

116. Знайти момент інерції квадрата зі стороною a щодо однієї з його вершин, якщо поверхнева густина матеріалу пропорційна y.

117. Знайти момент інерції однорідного круга $(\gamma(x, y) = 1)$ радіуса R щодо його центра.

118. Знайти момент інерції однорідного круга $(\gamma(x, y) = 1)$ радіуса R щодо його діаметра d.

119. Електричний заряд розподілений по площі металічної пластини, яка має форму області D, що обмежена лініями $y = x^2$,

$y^2 = x$. Обчислити повний заряд пластини, якщо поверхнева густина електричного заряду від точки до точки змінюється за законом $\sigma(x, y) = 3x + 2y + 6$.

Розставити межі інтегрування, якщо інтегрувати в послідовності:

а) x, y, z; б) y, x, z; в) z, x, y.

120. $\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$, де область V обмежена площинами $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0,\ z = 0$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

121. $\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$, де область V обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0, y = 0,\ z = 0$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

122. $\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$, де область V обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 1, z = 0,\ z = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$).

123. $\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$, де область V обмежена поверхнями $z = x^2 + y^2, z = y, z = 1, x = 0, y = 0,\ z = 0$.

Обчислити повторні інтеграли.

124. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz$.

125. $\int_0^q dx \int_0^x dy \int_0^y xyz dz$.

126. $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz$.

127. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2cos\varphi} \rho^2 d\rho \int_0^1 z dz$.

128. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta \int_0^{cos\theta} \rho^2 d\rho$.

Обчислити потрійні інтеграли.

129. $\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$, V – область, обмежена площинами $x + y + z = a,\ x = 0, y = 0, z = 0$.

130. $\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$, V – область, обмежена поверхнями $y = x^2,\ x = y^2,\ z = xy, z = 0$.

131. $\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$, V – область, обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 1$ і площинами $z = 0,\ z = 3$.

132. $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$, V – прямокутний паралелепіпед $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 2.$

133. $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$, V – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0, y=0, z=0.$

134. $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$, V – область, обмежена площинами $z=x^2+y^2$, $x=0, y=0, z=0.$

135. $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$, V – область, обмежена площинами $z=xy$, $x=1, y=x, z=0.$

136. $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$, V – область, обмежена площинами $x+y+z=1$, $x=0, y=0, z=0.$

137. $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$, V – область, обмежена площинами $z=x^2+y^2, z=1.$

Обчислити інтеграли, перейшовши до циліндричних координат.

138. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz.$

139. $\int_0^{2r} dx \int_0^{\sqrt{2r-x^2}} dy \int_0^{a\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} zdz.$

140. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz.$

141. $\iiint_V (x^2+z^2)\,dxdydz$, V – область, обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=2Rz, x^2+y^2=z^2$, що містить точку $(0;0;R)$.

142. $\iiint_V (x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dxdydz$, V – область обмежена параболоїдом $2y=x^2+z^2$ і площиною $z=1$.

143. $\iiint_V (x^2+z^2)\,dxdydz$, V – область обмежена параболоїдом $z=x^2+y^2$ і площиною $z=1$.

Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат.

144. $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz.$

145. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}dz.$

146. $\iiint_V (x^2+z^2)\,dxdydz$, V – область, визначена нерівностями $r^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$.

147. $\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+(z-2)^2)}}$, $V - x^2+y^2+z^2 \le 1$.

148. $\iiint_V (x^2+z^2)\,dxdydz$, V – область, обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=z$.

Обчислити об'єми тіл, обмежених заданими поверхнями.

149. $z=x^2+y^2, z=x^2+y^2, y=x, y=2x, x=1$.

150. $z=xy, z=x+y, x+y=1,\ x=0, y=0$.

151. $y=x^2+z^2, y=1$.

152. $y^2+z^2=2ax, y^2+z^2=2az,\ x=0\ (a>0)$.

153. $z=x^2+y^2, z=\ 2x^2+2y^2, y=x^2, y=x$.

154. $z=(x-1)^2+y^2, 2x+z=2$.

155. $z=x^2+y^2, z=x+y$.

156. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2\,(x^2+y^2)$.

157. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3\,x$.

158. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2\,z^4$.

159. $z=\ln(x+2), z=\ln(6-x), x+y=2, x-y=2\ \ x=0$.

160. Обчислити масу тіла, обмеженого площинами $x=0, x=1$, $y=0, y=1, z=0, z=1$, якщо поверхнева густина матеріалу в кожній її точці змінюється за законом $\gamma(x,y,z)=x+y+z$.

161. Обчислити масу тіла, яке обмежено поверхнею $x^2+y^2+z^2=$ $=z$, якщо поверхнева густина матеріалу в кожній її точці змінюється за законом $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

162. Обчислити координати центра мас однорідного тіла $(\gamma(x,y,z)=1)$, яке охоплює область V, обмежену поверхнями $V\ y=x^2+z^2, x^2+z^2=10, y=0$.

163. Знайти координати центра мас однорідного $(\gamma(x,y,z)=1)$ тіла V, обмеженого поверхнями конуса $z=\sqrt{(x^2+y^2}$y та параболоїда $z=2-x^2-y^2$.

164. Обчислити момент інерції однорідного $(\gamma(x,y,z)=1)$ циліндра $x^2+y^2=b^2$ із висотою h і радіусом основи b щодо діаметра основи.

165. Обчислити момент інерції однорідного $(\gamma(x,y,z)=1)$ циліндра $x^2+y^2=b^2$ з висотою h і радіусом основи b щодо осі циліндра.

166. Обчислити момент інерції щодо площини Oyz тіла, обмеженого площинами $x + 2y - z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$, якщо його густина від точки до точки змінюється за законом $\gamma(x, y, z) = x$.

167. Обчислити момент інерції щодо осі однорідного круглого прямого конуса вагою P, висотою H і радіусом основи R.

168. Обчислити момент інерції однорідної кулі радіуса R щодо її центра.

169. Обчислити $\int_L \frac{dS}{x-y}$, де L – відрізок прямої $x - 2y = 4$ між точками A(0;-2) і B(4;0).

170. Обчислити $\int_L xyds$, де L – контур прямокутника з вершинами в точках O(0;0), A(4;0), B(4;2) і C(0;2).

171. Обчислити $\int_L x\sqrt{x^2 - y^2}yds$, де L – лінія, задана рівнянням

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0.$$

172. Обчислити $\int_L xyds$, де L – контур квадрата $|x| + |y| = 2$.

173. Знайти координати центра ваги півкола $y = \sqrt{9 - x^2}$, вважаючи, що його густина дорівнює одиниці.

174. Знайти масу дуги півкола $x = cos\, t, y = sin\, t, 0 \leq t \leq \pi$, якщо лінійна густина її в точці M(x,y) дорівнює y.

175. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (x^2 + y^2)dy$, L – контур чотирикутника з вершинами, вказаними в порядку обходу в точках O(0; 0), A(2; 0), B(4; 4) і C(0; 4).

176. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (x^2 + y^2)dx$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки O(0;0) до точки A(2;4).

177. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L ydx - xdydx$, де L – еліпс $x = a \cdot cost, y = bsint$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

178. Обчислити $\int_{AB}(x^2 + y^2)dx + xydy$, якщо шлях від A(1; 1) до B(3; 4) – відрізок прямої.

179. Обчислити $\int_{AO} xydx + yzdy + zxdz$, де OA – чверть кола $x = cost, y = sint, z = 1$, що пробігається в напрямку зростання параметра t.

180. Довести, що величина інтеграла $\int_L (2xy - y)dx + x^2dy$, де L – замкнений контур, дорівнює площі області, що обмежена цим контуром.

181. Обчислити за допомогою криволінійного інтеграла площу фігури, обмеженої лінією $x = \text{a} \cdot cost, y = b \cdot sint$.

182. За допомогою криволінійного інтеграла обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = x^2, x = y^2$ і $8xy = 1$ (мається на увазі площа, що примикає до початку координат).

Обчислити поверхневий інтеграл I-го роду, якщо σ – частина площини α , що лежить між координатними площинами.

183. $\iint_\sigma d\sigma$, $\alpha: x + y + z = 3$.

184. $\iint_\sigma (2x - 3y + z)d\sigma$, $\alpha: x + 2y + z = 2$.

185. $\iint_\sigma \frac{1}{(1+x+z)^2} d\sigma$, $\alpha: x + y + z = 1$.

186. Обчислити інтеграл $\iint_\sigma (x^2 + y^2)zd\sigma$, де σ – верхня половина сфери радіуса R із центром у початку координат.

187. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2y = x^2 + z^2$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

188. Обчислити момент інерції верхньої половини однорідної сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ відносно осі Oz .

Обчислити поверхневі інтеграли другого роду.

189. $\iint_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні тетраедра, обмеженого площинами $x = 0, y = 0, z = 0$, $x + y + z = 2$.

190. $\iint_S z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(z > 0)$.

191. $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, де S – внутрішня сторона поверхні куба, обмеженого площинами $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

192. $\iint_S z^2dxdy$, де S – внутрішня сторона еліпсоїда $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

Розділ 10

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

10.1. Диференціальні рівняння першого порядку: основні поняття та властивості

Багато фізичних, технічних, економічних і соціальних процесів, які лежать в основі функціонування інформаційних систем, описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь або їхніх систем. Ці рівняння дозволяють математично моделювати зміну стану об'єктів у часі – наприклад, передавання сигналів, зміну навантаження мережі, динаміку обчислювальних процесів, розвиток алгоритмів чи оптимізації.

Класична теорія звичайних диференціальних рівнянь є потужним інструментом для побудови та аналізу таких моделей. Вона забезпечує формальний апарат для дослідження умов існування, єдиності та стійкості розв'язків, що має вирішальне значення під час розроблення ефективних і надійних інформаційних систем. Знання основ цієї теорії дозволяє фахівцям у галузі інформаційних систем і технологій адекватно описувати поведінку складних динамічних систем, прогнозувати їхній розвиток і забезпечувати стабільність роботи алгоритмів.

Диференціальним рівнянням n–го порядку відносно функції $y = y(x)$ називається співвідношення, яке пов'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y(x)$ та її похідні (або диференціали):

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (10.1.1)$$

Зауваження. Вважається також, що похідна n-го порядку шуканої функції обов'язково входить в це рівняння, тоді як наявність решти аргументів необов'язкова.

Рівняння (10.1.1), не розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$, називається ***неявним диференціальним рівнянням***.

Натомість рівняння, розв'язане відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

називається ***нормальним або явним***.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної (або диференціала), що входить в це рівняння.

Якщо невідома функція залежить тільки від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається ***звичайним***.

Якщо невідома функція залежить від кількох змінних і диференціальне рівняння містить її частинні похідні за цими змінними, то воно називається ***рівнянням у частинних похідних***.

Розв'язком диференціального рівняння на деякому інтервалі (a, b) називається функція $y = \varphi(x)$, що має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно, яка при підстановці в рівняння обертає його в тотожність.

У загальному випадку розв'язок диференціального рівняння n-го порядку знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань. Розв'язок диференціального рівняння називається ***загальним***, якщо він містить стільки довільних сталих, яким є порядок рівняння, тобто має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

і при будь-яких значеннях сталих задовольняє це рівняння.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається ***інтегруванням рівняння***.

Диференціальним рівнянням 1–го порядку відносно функції $y = y(x)$ називається вираз вигляду

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (10.1.2)$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція від x, $F(x, y, y')$ – задана функція змінних $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$.

Якщо рівняння (10.1.2) можна розв'язати відносно похідної, то його записуватимемо у вигляді

$$y' = f(x, y). \qquad (10.1.3)$$

Таку форму запису диференціального рівняння називають ***нормальною.***

Найпростішим з диференціальних рівнянь у нормальній формі є рівняння $y' = f(x)$. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на

деякому інтервалі (a, b), то, як відомо, $y = \int f(x)dx + C$, де C – довільна стала.

У багатьох випадках рівняння (10.1.3) зручно записувати як $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ або у вигляді $dy - f(x, y)dx = 0$, який є окремим випадком рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad (10.1.4)$$

де $M(x, y), N(x, y)$ – відомі функції (***коефіцієнти рівняння***).

Рівняння (10.1.4) зручне тим, що змінні x і y у ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію від іншої.

Надалі розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння, причому як незалежну змінну, так і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Розв'язком диференціального рівняння (10.1.3) на інтервалі (a, b) називають неперервно диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = y(x)$, яка перетворює рівняння (10.1.3) у тотожність, тобто $y'(x) \equiv f(x, y(x))$.

Розв'язок рівняння (10.1.3) може бути заданий не тільки явно, тобто як $y = y(x)$, але й у неявному вигляді $\Phi(x, y) = 0$ (у вигляді, не розв'язаному відносно y або у параметричній формі: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$).

Наприклад, функція $y = \sqrt{1 - x^2}$, де $x \in (-1; 1)$, є розв'язком рівняння $y' = -x/y$, однак цей самий розв'язок можна подати у неявному вигляді $x^2 + y^2 = 1, y > 0$, а також у параметричній формі $x = \cos t\,,\ y = \sin t,\ 0 < t < \pi$.

Як зазначалось, що диференціальні рівняння зазвичай мають безліч розв'язків. Однак у багатьох задачах теоретичного і прикладного характеру часто серед усіх розв'язків диференціального рівняння (10.1.3) потрібно знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0, \qquad (10.1.5)$$

де x_0, y_0 – задані числа, тобто розв'язок, який для заданого значення незалежної змінної $x = x_0$ набуває заданого значення y_0.

Задачу відшукання розв'язку рівняння (10.1.3), який задовольняє умову (10.1.5), називають ***задачею Коші*** **(або *початковою***

задачею). Умову (10.1.5) називають ***початковою***, а числа x_0, y_0 – ***початковими даними*** задачі (10.1.3), (10.1.5).

З геометричної точки зору задача Коші (10.1.3), (10.1.5) полягає у відшуканні інтегральної кривої рівняння (10.1.3), яка проходить через наперед задану точку (x_0, y_0) площини Oxy.

Відповідь на питання про те, за яких умов задача Коші (10.1.3), (10.1.5) має розв'язок, дає теорема Пеано.

Теорема 1 (Пеано). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D площини Oxy, то існує неперервна разом зі своєю похідною першого порядку функція $y = y(x)$, яка є розв'язком задачі Коші $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, де $(x_0, y_0) \in D$.

Однак для багатьох задач важливо знати не тільки факт існування розв'язку диференціального рівняння, але також і те, чи є цей розв'язок єдиним. Відповідь на це питання має виняткове значення як для самої теорії диференціальних рівнянь, так і для багатьох її застосувань. Дійсно, якщо знати, що розв'язок задачі Коші єдиний, то, знайшовши розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, дослідник може бути впевненим, що інших розв'язків, які задовольняють ті самі початкові умови, немає. У задачах природознавства це приводить до одержання єдиного закону явища, який визначається тільки диференціальним рівнянням і початковими умовами.

Виявляється, що умова неперервності функції $f(x, y)$ з теореми Пеано не гарантує єдиності розв'язку задачі Коші (10.1.3), (10.1.5). Розглянемо, наприклад, рівняння $y' = 2\sqrt{y}$. Його права частина визначена і неперервна у верхній частині площини Oxy ($y \geq 0$). За допомогою підстановки легко переконатись, що інтегральними кривими є півпараболи $y = (x + C)^2$, де $x \geq -C$, а також пряма $y = 0$ (вісь Ox). Очевидно, що у кожній точці $(x_0, 0)$ осі Ox єдиність розв'язку порушується, бо через цю точку проходять дві інтегральні криві, а саме: парабола $y = (x - x_0)^2$ і пряма $y = 0$ (рис. 10.1.1).

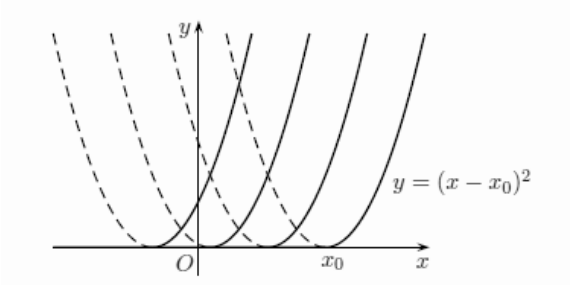


Рис. 10.1.1. Інтегральні криві

Основною теоремою, яка забезпечує не тільки існування, але й єдиність розв'язку задачі Коші, є теорема Коші.

Теорема 2 (Коші). Нехай функція $f(x, y)$ визначена у прямокутнику

$$G = \{(x, y): |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}, \qquad a, b > 0$$

і задовольняє у ньому такі умови:

1) $f(x, y)$ неперервна, а, отже, й обмежена, тобто

$$|f(x, y)| \le M, M > 0;$$

2) частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ існує та обмежена.

Тоді задача Коші (10.1.3), (10.1.5) має єдиний розв'язок принаймні на відрізку

$$|x - x_0| \le h, \qquad \text{де} \qquad h = min(a, b/M)\,.$$

За виконання умов теореми Коші можна гарантувати, що через кожну внутрішню точку області G проходить єдина інтегральна крива.

Теорема Коші має велике значення в теорії звичайних диференціальних рівнянь, бо дозволяє за виглядом правої частини рівняння (10.1.3) відповісти на питання про існування та єдиність розв'язку цього рівняння при заданих початкових умовах. Це особливо важливо у тих випадках, коли неможливо вказати точну формулу, що визначає розв'язок рівняння, а тому потрібно застосовувати методи наближеного розв'язування диференціального рівняння.

Класифікація розв'язків диференціального рівняння першого порядку

Загальним розв'язком диференціального рівняння (10.1.3) у деякій області G площини Oxy називають функцію

$$y = y(x, C), \tag{10.1.6}$$

яка залежить від однієї довільної сталої C, якщо:

1) вона є розв'язком рівняння (10.1.3) для довільного фіксованого значення сталої C;

2) для довільної початкової умови (10.1.5), де $(x_0, y_0) \in G$, існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що функція $y = y(x, C_0)$ задовольняє умову (10.1.5).

Якщо не можна знайти загальний розв'язок у вигляді (10.1.6), його шукають у неявному вигляді $F(x, y, C) = 0$. Такий розв'язок називають ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння. Часто загальний інтеграл одержують як $\psi(x, y) = C$, тобто у вигляді, розв'язаному відносно довільної сталої C. Функцію $\psi(x, y)$ у цьому випадку називають ***інтегралом*** диференціального рівняння.

Якщо у точці (x_0, y_0) порушуються умови теореми Коші, то через цю точку проходить декілька інтегральних кривих (розв'язок не єдиний) або не проходить жодної інтегральної кривої (розв'язок не існує). Такі точки називають ***особливими точками*** диференціального рівняння.

Шукати особливі точки потрібно серед точок, у яких мають розрив функція $f(x, y)$ або її частинна похідна $f'_y(x, y)$, а потім, аналізуючи загальний розв'язок, необхідно перевірити, чи будуть ці точки особливими. Така перевірка обов'язкова, бо теорема Коші дає лише достатні умови, а отже, може існувати єдиний розв'язок задачі Коші (10.1.3), (10.1.5) навіть тоді, коли в точці (x_0, y_0) не виконується одна або обидві умови теореми.

Розглянемо *приклади*.

1. $y' = y \sin x + e^x$. Функція $f(x, y) = y \sin x + e^x$ неперервна, а похідна $f'_y = \sin x$ обмежена в усіх точках площини Oxy. Згідно з теоремою Коші через кожну точку площини Oxy проходить одна інтегральна крива.

2. $y' = \sqrt{1-y^2}$. Права частина визначена і неперервна в усіх точках площини Oxy, де $-1 \le y \le 1$. Частинна похідна $f'_y = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ стає необмеженою, якщо $y \to \pm 1$. Легко переконатись, що кожна з функцій $y = sin(x + C)$ є розв'язком рівняння. Окрім того, маємо також розв'язки $y = \pm 1$. Таким чином, через кожну точку прямих $y = \pm 1$ проходять принаймні дві інтегральні криві, а тому у точках цих прямих порушується єдиність розв'язку (рис. 10.1.2).

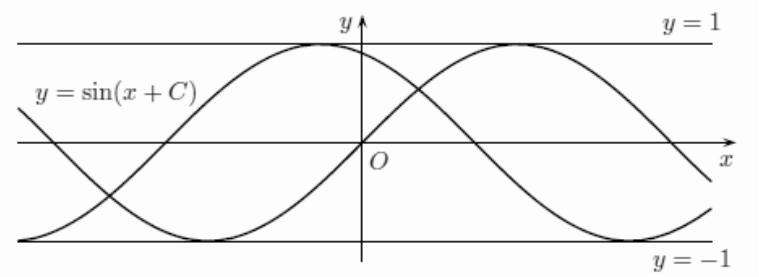


Рис. 10.1.2. Інтегральні криві

Частинним розв'язком рівняння (10.1.3) в області G називають функцію $y = y(x, C_0)$, утворену з загального розв'язку (10.1.6) при певному значенні сталої $C = C_0$.

Якщо кожна точка розв'язку диференціального рівняння є особливою, то такий розв'язок називають ***особливим.*** Особливий розв'язок не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) диференціального рівняння при жодному конкретному значенні сталої C.

З геометричної точки зору загальним розв'язком $y = y(x, C)$ є сім'я інтегральних кривих на площині Oxy, яка залежить від однієї довільної сталої C, а частинний розв'язок – це одна інтегральна крива цієї сім'ї, що проходить через задану точку. Графіком особливого розв'язку є інтегральна крива, яка у кожній своїй точці має загальну дотичну з однією з інтегральних кривих. Таку інтегральну криву називають ***обвідною*** сім'ї інтегральних кривих.

10.2. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

Існує декілька типів диференціальних рівнянь першого порядку, які інтегруються в квадратурах (або зводяться до них). Одним із таких типів є диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{10.2.1}$$

або

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{10.2.2}$$

якщо $P(x,y) = M_1(x)N_1(y)$ і $Q(x,y) = M_2(x)N_2(y)$, тобто

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{10.2.3}$$

Особливість цього рівняння у тому, що коефіцієнти при диференціалах розкладаються на множники, які залежать лише від однієї змінної.

Для інтегрування рівняння (10.2.3) потрібно домогтися того, щоб коефіцієнт біля dx залежав тільки від x, а коефіцієнт біля dy – тільки від y. Це досягається діленням обох частин рівняння на добуток $M_2(x)N_1(y)$, причому вважаємо, звичайно, що $M_2(x) \neq 0$ і $N_1(y) \neq 0$. Після цього одержуємо

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{10.2.4}$$

Рівняння (10.2.4) можна розглядати як рівність диференціалів, тому інтеграли від диференціалів відрізняються на сталу, тобто

$$\int_{x_0}^{x} \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C, \tag{10.2.5}$$

де C – довільна стала, x_0, y_0 – деякі числа з області задання і неперервності коефіцієнтів рівняння (10.2.4). Співвідношення (10.2.5) є загальним інтегралом рівняння (10.2.3). Його можна записати також у вигляді

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C,$$

бо визначені інтеграли зі змінної верхньою межею й невизначені інтеграли є первісними для одних і тих самих підінтегральних функцій, а тому відрізняються лише сталими, які можна включити в C.

Якщо a – розв'язок рівняння $M_2(x) = 0$, то $x = a$ є розв'язком рівняння (10.2.3), бо $dx = 0$, а $M_2(a) = 0$. Так само, якщо b – корінь рівняння $N_1(y) = 0$, то $y = b$ – корінь рівняння (10.2.3).

Диференціальне рівняння (10.2.4) можна записати у більш загальному вигляді:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \qquad (10.2.6)$$

Рівняння (10.2.6) називають ***рівнянням з відокремленими змінними***, а перехід від (10.2.3) до рівняння вигляду (10.2.6) – ***відокремленням змінних.***

Загальним інтегралом рівняння (10.2.6) є

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Рівняння з відокремлюваними змінними можна записати також у вигляді (10.2.1):

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Для інтегрування рівняння (10.2.1) потрібно поділити обидві його частини на $g(y)$ (якщо $g(y) \neq 0$) і помножити на dx (врахувавши, що $dy = y'dx$). Отже,

$$\frac{1}{g(y)}dy = f\,(x)dx,$$

а після інтегрування одержуємо загальний інтеграл рівняння (10.2.1)

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C.$$

Тут, як і для рівняння (10.2.3), якщо $g(a) = 0$, то $y = a$ є розв'язком рівняння (10.2.1).

Диференціальні рівняння, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними

До рівняння з відокремлюваними змінними зводяться рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c), \qquad (10.2.7)$$

де a, b,c – деякі сталі. Справді, якщо виконати заміну $z = ax + by + c$, то

$$y = \frac{z - ax - c}{b} \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{b}z' - \frac{a}{b}$$

і для знаходження функції z одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними $z' = bf(z) + a$.

10.3. Однорідні диференціальні рівняння та звідні до них

Функцію $f(x, y)$ називають ***однорідною функцією виміру m*** (m – натуральне число), якщо для будь-яких x, y, t справджується тотожність

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Наприклад, $f_1(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + 2y^3}$, $f_2(x, y) = arcsin\,\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ є однорідними функціями вимірів 1 і 0 відповідно, бо

$$f_1(tx, ty) = \sqrt[3]{(tx)^3 + 2(ty)^3} = \sqrt[3]{t^3(x^3 + 2y^3)} =$$

$$= t\sqrt[3]{x^3 + 2y^3} = t^1 f_1(x, y);$$

$$f_2(tx, ty) = arcsin\,\frac{(tx)^2 + (ty)^2}{(tx)^2 - (ty)^2} = arcsin\,\frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2(x^2 - y^2)} =$$

$$= arcsin\,\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = t^0 f_2(x, y).$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \qquad (10.3.1)$$

називають ***однорідним***, якщо $f(x, y)$ є однорідною функцією виміру 0.

Покажемо, що однорідне рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо права частина рівняння (10.3.1) – однорідна функція виміру 0, то за означенням $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Якщо підставити $t = 1/x$, то $f(x, y) = f(1, y/x)$, а тому рівняння (10.3.1) можна записати у вигляді $y' = f(1, y/x)$, звідки видно, що в однорідних рівняннях вигляду (10.3.1) права частина фактично залежить тільки від частки y/x. З огляду на це виконаємо заміну $u = y/x$, тобто

$$y = ux,$$

де $u = u(x)$ – нова шукана функція.

Тоді

$$y' = u'x + u \quad \Rightarrow \quad u'x + u = f(1,u) \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$\frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x} \qquad (f(1,u) \neq u, \;\; x \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{f(1,u)-u} = \ln|x| + C.$$

Якщо позначити $F(u) \equiv \int \frac{du}{f(1,u)-u}$, то загальний інтеграл однорідного рівняння (10.3.1) можемо записати у вигляді

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

Розв'язками однорідного рівняння (10.3.1) можуть бути також функції $y = ax$ $(x \neq 0)$, де $f(1,a) = a$ та $x = 0$ $(y \neq 0)$, які могли бути втрачені при відокремленні змінних. Ці розв'язки можуть бути особливими.

Якщо диференціальне рівняння першого порядку записане у вигляді

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

то воно буде однорідним, якщо $M(x,y)$, $N(x,y)$ є однорідними функціями однакового виміру.

Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \tag{10.3.2}$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – деякі сталі. Якщо c_1 і c_2 одночасно не дорівнюють нулю, то права частина рівняння (10.3.2) не є однорідною функцією виміру 0, а тому це рівняння не є однорідним.

Однак, якщо

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_1\, b_2 \neq a_2 b_1, \tag{10.3.3}$$

то рівняння (10.3.2) можна звести до однорідного за допомогою замін

$$x = m + \alpha, \qquad y = n + \beta,$$

(10.3.4)

де сталі α і β потрібно вибрати так, щоб

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta = -c_1, \\ a_2\alpha + b_2\beta = -c_2. \end{cases}$$

(10.3.5)

Згідно з (10.3.3) $\Delta \neq 0$, а тому лінійна неоднорідна система (10.3.5) має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера. Підставляючи у (10.3.2) замість x і y відповідні вирази з (10.3.4), одержуємо рівняння

$$\frac{dn}{dm} = \frac{a_1 m + b_1 n}{a_2 m + b_2 n}.$$

(10.3.6)

Диференціальне рівняння (10.3.6) є, очевидно, однорідним.

Якщо для коефіцієнтів рівняння (10.3.2) не виконується умова (10.3.3), тобто

$$a_1 b_2 = a_2 b_1,$$

(10.3.7)

То $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, а тому з рівняння (10.3.2) випливає, що

$$y' = \frac{\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} = f(a_2 x + b_2 y),$$

тобто одержали рівняння вигляду (10.2.7), яке зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $z = a_2 x + b_2 y$.

Зауважимо, що за виконання умови (10.3.7) для зведення рівняння (10.3.2) до рівняння з відокремлюваними змінними можна виконувати також заміни $z = a_1 x + b_1 y$, $z = a_1 x + b_1 y + c_1$, $z = a_2 x + b_2 y + c_2$.

10.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним рівнянням першого порядку називають рівняння, у яке шукана функція y та її похідна y' входять у першому степені і не перемножуються. Отже, лінійне рівняння має такий загальний вигляд:

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \tag{10.4.1}$$

де $A(x), B(x), C(x)$ – неперервні функції.

В області, де $A(x) \neq 0$, рівняння (10.4.1) рівносильне рівнянню

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{10.4.2}$$

у якому позначено $p(x) = B(x)/A(x), q(x) = -C(x)/A(x)$.

Якщо ж $A(x_0) = 0$, то розв'язком рівняння (10.4.1), записаного у диференціальній формі $A(x)dy + B(x)ydx + C(x)dx = 0$, є $x = x_0$, у чому легко переконатися за допомогою підстановки.

Наприклад, розв'язками рівняння $x(x-\pi)y' + sinx \cdot y = tgx$ є $x = 0$ і $x = \pi$.

Якщо функції $p(x)$ та $q(x)$ у рівнянні (10.4.2) неперервні на деякому інтервалі (a, b), то згідно з теоремою Коші через кожну точку смуги

$$a < a_1 \leq x \leq b_1 < b, \qquad -\infty < y < +\infty$$

проходить єдина інтегральна крива. Справді, якщо рівняння (10.4.2) записати у вигляді

$$y' = q(x) - p(x)y,$$

то його права частина $f(x, y) = q(x) - p(x)y$ є, очевидно, не перервною функцією, а частинна похідна $f'_y(x, y) = -p(x)$ обмежена у цій області. У цьому випадку рівняння (10.4.2) особливих розв'язків не має.

Якщо функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння

$$y' + p(x)y = 0, \tag{10.4.3}$$

називають ***лінійним однорідним***, а якщо тотожно не дорівнює нулю, то ***лінійним неоднорідним***.

Рівняння (10.4.3) є рівнянням з відокремлюваними змінними

$$y' = -p(x) \cdot y \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв'язок

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \qquad\qquad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|$$

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння (10.4.2) можна отримати методом Бернуллі або методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа).

10.4.1. Метод Бернуллі

Метод Бернуллі полягає в тому, що розв'язок рівняння

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (10.4.1.1)$$

шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$y = u \cdot v, \qquad (10.4.1.2)$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції, одна з яких довільна, але не рівна нулю.

Дійсно, кожну функцію можна записати у вигляді

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x), \qquad \text{де } v(x) \neq 0.$$

Знаходимо похідну

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Підставляючи вирази y та y' в рівняння (10.4.1.1), отримаємо:

$$u'v + uv' + p(x) \cdot uv = q(x)$$

$$u'v + u(v' + p(x) \cdot v) = q(x). \qquad (10.4.1.3)$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, підберемо її так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + p(x) \cdot v = 0.$$

Тоді рівняння (10.4.1.3) буде рівносильне системі двох рівнянь

$$\begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0, \\ u'v = q(x) \end{cases}$$

Перше рівняння системи є лінійним однорідним вигляду (10.4.3) і його загальний розв'язок:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v, \qquad \frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx,$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|,$$

$$v = C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx},$$

В силу довільності вибору функції v, виберемо з цього загального розв'язку який-небудь частинний розв'язок, поклавши, наприклад, $C_1 = 1$. Тоді

$$v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Підставляючи отримане значення функції v в друге рівняння системи, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними для функції $u(x)$:

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x), \qquad \frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримаємо його загальний розв'язок:

$$du = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx,$$

$$u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\, dx + C.$$

Врешті, підставляючи знайдені значення функцій і в рівняння (10.4.1.2), отримаємо ***загальний розв'язок*** лінійного диференціального рівняння (10.4.1.1):

$$y(x) = uv = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\, dx + C\right).$$

10.4.2. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Метод Лагранжа полягає в тому, що загальний розв'язок рівняння (10.4.1.1) шукаємо у вигляді розв'язку відповідного однорідного рівняння, в якому сталу вважають функцією.

Спочатку записуємо лінійне однорідне рівняння

$$y' + p(x)y = 0, \qquad (10.4.2.1)$$

відповідне даному неоднорідному рівнянню:

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (10.4.2.2)$$

Інтегруючи (10.4.2.2), отримаємо його загальний розв'язок, який дається формулою:

$$y(x) = C \cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (10.4.2.3)$$

Далі записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (10.4.2.1) у такому ж вигляді (10.4.2.3), вважаючи довільну сталу деякою диференційованою функцією:

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (10.4.2.4)$$

Знаходимо похідну

$$y'(x) = C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\big(-p(x)\big).$$

Підставляючи вирази $y(x)$ та $y'(x)$ в рівняння (10.4.2.1), отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $C(x)$:

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

або

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

інтегруючи яке, знаходимо:

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + \bar{C}.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у вираз (10.4.2.4) дістаємо ***загальний розв'язок*** лінійного неоднорідного рівняння (10.4.2.3):

$$y(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + \bar{C}\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}, \qquad (10.4.2.5)$$

який повністю збігається з розв'язком, отриманим методом Бернуллі.

Зауваження 1. Розкривши у формулі (10.4.2.5) дужки

$$y(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}e^{-\int p(x)dx}\,dx + \bar{C}e^{-\int p(x)dx},$$

можна помітити, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння (10.4.2) дорівнює сумі загального розв'язку $y_{зо}$ відповідного однорідного рівняння (10.4.3) і частинного розв'язку $y_{чн}$ даного неоднорідного рівняння:

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

Зауваження 2. При розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь методом Бернуллі або методом Лагранжа слід використовувати наведені алгоритми, а не отримані кінцеві формули.

Зауваження 3. Може статися, що диференціальне рівняння буде лінійним тільки після того, як поміняти ролями незалежну змінну x і шукану функцію y, тобто записати це рівняння у вигляді

$$x' + f(y)x = g(y). \qquad (10.4.2.6)$$

10.4.3. Диференціальне рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \qquad (10.4.3.1)$$

де m – деяке число, $m \neq 0$, $m \neq 1$, $p(x), q(x)$ – визначені і неперервні на деякому проміжку функції називають ***рівнянням Бернуллі.***

Якщо $m = 0$, то одержуємо лінійне неоднорідне рівняння (10.4.2), якщо $m = 1$ – рівняння з відокремлюваними змінними $y' + p(x)y = q(x)y$. Для інших дійсних значень показника m – рівняння Бернуллі. Тому надалі вважатимемо, що $m \neq 0, m \neq 1$.

Рівняння Бернуллі можна звести до лінійного диференціального рівняння, за допомогою введення нової функції $z = z(x)$.

Для цього, спочатку поділимо рівняння (10.4.3.1) на y^m ($y \neq 0$).

Отримаємо

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x) \qquad (10.4.3.2)$$

Зробимо заміну

$$z = y^{1-m},$$

де $z = z(x)$ – нова невідома функція.

Звідси

$$z' = (1-m)y^{-m}y' \quad \Rightarrow \quad y^{-m}y' = \frac{z'}{1-m}.$$

Перейдемо в рівнянні (10.4.3.2) до змінної z:

$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x);$$
$$z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x).$$

Отримане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням відносно функції $z(x)$, для якого можна застосувати або метод Бернуллі, або метод Лагранжа.

Зауваження 1. Очевидно, що $y = 0$ є розв'язком рівняння Бернуллі, коли $m = 0$.

Зауваження 2. Розв'язок рівняння Бернуллі можна шукати безпосередньо методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його попередньо до лінійного рівняння.

Для розв'язування рівняння Бернуллі, також так само, як і для лінійного рівняння, можна використовувати метод варіації довільної сталої.

Зінтегруємо спочатку рівняння

$$y' + p(x)y = 0.$$

Його загальний розв'язок подається формулою:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Розв'язок рівняння Бернуллі шукаємо у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \qquad (10.4.3.3)$$

де $C(x)$ – деяка функція.

Знаходимо похідну

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot \big(-p(x)\big).$$

Підставляючи (10.4.7) у рівняння (10.4.10), одержуємо

$$\begin{aligned}
C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x)C^m(x)e^{-m\int p(x)dx},\\
C'(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x)C^m(x)e^{-m\int p(x)dx},\\
C'(x) &= q(x)C^m(x)e^{(1-m)\int p(x)dx},\\
\frac{dC(x)}{dx} &= q(x)C^m(x)e^{(1-m)\int p(x)dx},\\
\frac{dC(x)}{C^m(x)} &= q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}dx,\\
\int\frac{dC(x)}{C^m(x)} &= \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}dx + C_1,\\
\frac{C^{1-m}(x)}{1-m} &= \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}dx + C_1,
\end{aligned}$$

$$C(x) = \left((1-m) \int q(x) e^{(1-m)\int p(x)dx} dx + C_1 \right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ в (10.4.10), одержуємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left((1-m) \int q(x) e^{(1-m)\int p(x)dx} dx + C_1 \right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

При цьому міг бути втрачений розв'язок $y = 0$, якщо $m > 0$.

Якщо $0 < m < 1$, то цей розв'язок буде особливим, а якщо $m > 1$, то частинним. Для $m \leq 0$ функція $y = 0$ не є розв'язком рівняння Бернуллі.

10.5. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{10.5.1}$$

називають ***рівнянням у повних диференціалах***, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y). \tag{10.5.2}$$

З (10.5.1), (10.5.2) випливає, що рівняння (10.5.1) можна записати у вигляді $dU = 0$, а тому загальним інтегралом рівняння у повних диференціалах є $U(x,y) = C$.

У загальному випадку складно безпосередньо з'ясувати, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Укажемо ознаку, яка дозволить відповісти на це питання, а також один із способів знаходження функції $U(x,y)$.

Припустимо, що функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ у рівнянні (10.5.1) неперервні у деякому прямокутнику з центром у точці (x_0, y_0), і не перетворюються одночасно в нуль у цій точці. Окрім того, вважатимемо, що у згаданому прямокутнику існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$ і $\frac{\partial N}{\partial x}$.

Припустимо, що справджується умова (10.5.2), тобто ліва частина рівняння (10.5.1) є повним диференціалом. Згідно з означенням диференціала функції двох змінних $dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, а тому

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{10.5.3}$$

Оскільки $M(x,y), N(x,y)$ мають неперервні частинні похідні, то мішані похідні функції $U(x,y)$ не залежать від порядку диференціювання. Отже,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Звідси внаслідок рівності мішаних похідних одержуємо необхідну умову того, що (10.5.1) є рівнянням у повних диференціалах:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{10.5.4}$$

Покажемо, що умова (10.5.4) є також достатньою, тобто за виконання цієї умови ліва частина рівняння (10.5.1) є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$. Згідно з (10.5.3) шукана функція $U(x,y)$ повинна задовольняти умову $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y)$. Усі такі функції можна описати формулою

$$U(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y), \tag{10.5.5}$$

де $C(y)$ – довільна неперервно диференційовна функція від y.

Оскільки функція $U(x,y)$ повинна також задовольняти другу умову з (10.5.3), то

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + C'(y) = N(x,y). \tag{10.5.6}$$

Для виконання умови (10.5.6) потрібно відповідним чином підібрати функцію $C(y)$. Покажемо, що такий вибір за виконання умови (10.5.4) завжди можливий. Справді, з (10.5.6) маємо

$$C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx.$$

Ліва частина цієї рівності є функцією тільки від y, а отже, права частина не залежить від x, тобто похідна за змінною x від правої

частини повинна дорівнювати нулю. Переконаємось у цьому, враховуючи умову (10.5.4):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right)=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right)=$$

$$=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx\right)=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=0.$$

Наведене доведення достатності умов (10.5.4) дає водночас спосіб відшукання функції $U(x,y)$. Отже, спочатку потрібно знайти функцію $U(x,y)$ за формулою (10.5.5), розглядаючи y як сталу, а потім з рівності (10.5.6) знайти $C'(y)$, інтегруючи яке, отримаємо $C(y)$. Підставляючи знайдену функцію $C(y)$ у формулу (10.5.5), матимемо функцію $U(x,y)$. Для одержання ***загального інтегралу рівняння у повних диференціалах*** (10.5.1), як було доведено раніше, функцію $U(x,y)$ потрібно прирівняти до довільної сталої.

10.5.1. Інтегрувальний множник

Якщо (10.5.1) не є рівнянням у повних диференціалах, то завжди існує відмінний від сталого числа множник, після множення на який ліва частина рівняння (10.5.1) стане повним диференціалом. Цей множник називають ***інтегрувальним множником диференціального рівняння***.

Нехай для коефіцієнтів рівняння (10.5.1) не справджується умова (10.5.4) і припустимо, що $\mu(x,y)$ – інтегрувальний множник цього рівняння. Тоді для коефіцієнтів рівняння

$$\mu(x,y)M(x,y)dx\ +\ \mu(x,y)N(x,y)dy\ =\ 0$$

повинна справджуватись умова

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}\quad\Rightarrow$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

(10.5.1.1)

Таким чином, інтегрувальний множник $\mu(x,y)$ є розв'язком рівняння з частинними похідними (10.5.1.1), однак розв'язати це рівняння у загальному випадку значно складніше, ніж звичайне

диференціальне рівняння (10.5.1). Проте у окремих випадках знайти інтегрувальний множник вдається доволі легко. Розглянемо деякі з цих випадків.

1. Нехай рівняння (10.5.1.1) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від x, тобто $\mu = \mu(x)$. Тоді, враховуючи, що

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx},$$

з (10.5.1) маємо

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx.$$

Якщо функція в правій частині останнього рівняння залежить тільки від x, тобто

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \varphi(x),$$

то, зінтегрувавши його, одержуємо

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx}.$$

2. Нехай рівняння (10.5.1.1) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від y, тобто $\mu = \mu(y)$. Тоді

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy},$$

з (10.5.1.1) знаходимо

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -M\frac{\partial \mu}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy.$$

Якщо функція в правій частині останнього рівняння залежить тільки від y, тобто

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \psi(y),$$

то інтегрувальним множником є

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)dy}. \qquad (10.5.1.2)$$

Зауваження. При множенні рівняння (10.5.1) на інтегрувальний множник можуть виникати сторонні розв'язки, які з'являються з рівняння $\mu(x, y) = 0$, які очевидно також справджують і перетворене рівняння

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0.$$

Тому такі сторонні розв'язки, якщо вони не входять до множини розв'язків рівняння, необхідно вилучати.

10.6. Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної

Неявним диференціальним рівнянням першого порядку (диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної) називають співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{10.6.1}$$

де функція $F(x, y, y')$ неперервна в деякій області $D \subset R^3$.

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна на інтервалі (a, b), називають ***розв'язком рівняння*** (10.6.1), якщо на цьому інтервалі вона перетворює його у тотожність.

Якщо рівняння (10.6.1) можна розв'язати через елементарні функції відносно y', то одержимо одне або декілька рівнянь, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1,2, \ldots, \tag{10.6.2}$$

де $f_k(x, y)$ – дійсні функції, тобто інтегрування рівняння (10.6.1) зводиться до інтегрування кожного з рівнянь (10.6.2).

Неявне диференціальне рівняння (10.6.1), так само, як і рівняння, розв'язане відносно похідної, визначає на площині Oxy деяке поле напрямів. Але тепер, як правило, у заданій точці (x_0, y_0) матимемо не один, а декілька напрямів поля, бо, розв'язуючи рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$ відносно y', зазвичай одержуємо декілька дійсних розв'язків.

Задача Коші для рівняння (10.6.1) формулюється так само, як і для рівняння, розв'язаного відносно похідної, а саме: потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ рівняння (10.6.1), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{10.6.3}$$

При цьому, якщо розв'язків, які задовольняють початкову умову (10.6.3), не більше, ніж кількість напрямів поля, визначеного рівнянням (10.6.1) у цій точці, тобто не більше кількості розв'язків y_0' рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$, то кажуть, що задача Коші (10.6.1), (10.6.3) має єдиний розв'язок. В інакшому випадку кажуть, що єдиність розв'язку цієї задачі порушується.

Нехай y_0' – один з дійсних коренів рівняння (10.6.1). З'ясуємо умови, за яких існує єдина інтегральна крива рівняння (10.6.1), що проходить через точку (x_0, y_0), причому дотична до неї у цій точці утворює з додатним напрямом Ox кут α_0, тангенс якого дорівнює y_0'.

Теорема. Нехай ліва частина рівняння (10.6.1) задовольняє такі умови:

1) функція $F(x, y, y')$ визначена і неперервна разом з частинними похідними $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ в деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, {y_0}')$;

2) $F(x_0, y_0, {y_0}') = 0$;

3) $\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{(x_0, y_0, {y_0}')} \neq 0$.

Тоді рівняння (10.6.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, визначений і неперервно диференційовний у деякому околі точки $x = x_0$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, і такий, що $y'(x_0) = y_0'$.

Для відшукання обвідної сім'ї інтегральних кривих можна скористатись таким правилом:

1) скласти систему рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi_C'(x, y, C) = 0, \end{cases} \tag{10.6.4}$$

де $\Phi(x, y, C) = 0$ – загальний інтеграл диференціального рівняння (10.6.1);

2) із системи (10.6.4) за допомогою виключення параметра C знайти криву $\varphi(x, y) = 0$;

3) з кривої $\varphi(x, y) = 0$ вилучити точки, де Φ_x' і Φ_y' одночасно дорівнюють нулю. Решта кривої $\varphi(x, y) = 0$ і буде обвідною заданої сім'ї інтегральних кривих.

10.6.1. Окремі випадки інтегрованих неявних диференціальних рівнянь першого порядку

Розглянемо деякі типи неявних диференціальних рівнянь вигляду (10.6.1), для яких існують загальні методи розв'язання. Найпростішим із них є рівняння, яке містить тільки похідну, тобто рівняння вигляду

$$F(y') = 0. \qquad (10.6.1.1)$$

Нехай рівняння (10.6.1.1) має деяку (скінченну або нескінченну) кількість дійсних розв'язків $y' = k_j$, $j = 1, 2, \ldots$, де k_j – сталі.

Далі, оскільки

$$y' = k_j \quad \Rightarrow \quad y = k_j x + C \quad \Rightarrow \quad k_j = \frac{y - C}{x},$$

то одержуємо загальний інтеграл цього рівняння у вигляді

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0. \qquad (10.6.1.2)$$

Диференціальне рівняння вигляду

$$(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0 \qquad (10.6.1.3)$$

називають ***рівнянням першого порядку степеня n.*** Згідно з основною теоремою алгебри, рівняння (10.6.1.3) визначає n значень для y'. Якщо відкинути комплексні корені, то матимемо m $(m \leq n)$ диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = f_1(x,y), \quad y' = f_2(x,y), \quad \ldots, \quad y' = f_m(x,y). \qquad (10.6.1.4)$$

Сукупність загальних розв'язків $y = \varphi_k(x, C)$ або загальних інтегралів $\Phi_k(x, y, C) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, рівнянь (10.6.1.4) є ***загальним інтегралом рівняння*** (10.6.1.3). Його можна записати також у вигляді

$$(y - \varphi_1(x, C)) \cdot (y - \varphi_2(x, C)) \cdot \ldots \cdot (y - \varphi_m(x, C)) = 0$$

або

$$\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \cdot \ldots \cdot \Phi_m(x, y, C) = 0.$$

Якщо хоча б одне з рівнянь (10.6.1.4) має особливі розв'язки, то вони будуть також особливими розв'язками рівняння (10.6.1.3).

Нехай рівняння (10.6.1) можна розв'язати відносно y, тобто воно має вигляд

$$y = f(x, y'). \qquad (10.6.1.5)$$

Тоді можна використати ***метод введення параметра***. Позначимо

$$y' = p(x),$$

тоді з (10.6.1.5) маємо співвідношення $y = f(x, p)$, диференціюючи яке одержуємо

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \Rightarrow \quad y'dx = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \Rightarrow$$

$$pdx = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp. \qquad (10.6.1.6)$$

Припустимо, що знайдено загальний розв'язок $x = \varphi(p, C)$ рівняння (10.6.1.6). Тоді, підставляючи його в $y = f(x, p)$, одержимо загальний розв'язок рівняння (10.6.1.5) у параметричній формі

$$x = \varphi(p, C), \qquad y = f(\varphi(p, C), p).$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (10.6.1.6) у вигляді $p = h(x, C)$, то отримаємо загальний розв'язок рівняння (10.6.1.5) у явному вигляді $y = f(x, h(x, C))$.

Якщо рівняння (10.6.1.6) має особливий розв'язок $p = \psi(x)$, то $y = f(x, \psi(x))$ може бути особливим розв'язком рівняння (10.6.1.5).

Нехай рівняння (10.6.1) можна розв'язати відносно x, тобто воно має вигляд

$$x = f(y, y'). \qquad (10.6.1.7)$$

Це рівняння також можна розв'язувати методом введення параметра. Позначимо $y' = p(y)$. Тоді, враховуючи, що

$$dx = \frac{dy}{y'},$$

Маємо

$$x = f(y, p) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp. \qquad (10.6.1.8)$$

Припустимо, що знайдено загальний розв'язок $y = \varphi(p, C)$ рівняння (10.6.1.7). Тоді, підставляючи його в $x = f(y, p)$, одержуємо загальний розв'язок рівняння (10.6.1.8) у параметричній формі

$$x = f(\varphi(p, C), p), \qquad y = \varphi(p, C).$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (10.6.1.8) у вигляді $p = h(y, C)$, то отримаємо загальний розв'язок рівняння (10.6.1.7) у явному вигляді $x = f(y, h(y, C))$.

Якщо рівняння (10.6.1.8) має особливий розв'язок $p = \psi(y)$, то $x = f(y, \psi(y))$ може бути особливим розв'язком рівняння (10.6.1.7).

10.6.2. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро

Окремим випадком рівняння (10.6.9) є рівняння вигляду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \qquad (10.6.2.1)$$

Якщо функція $\varphi(y')$ тотожно не збігається з y', то (10.6.2.2) називають ***рівнянням Лагранжа***. Як бачимо, рівняння Лагранжа лінійне відносно x і y.

Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \qquad (10.6.2.3)$$

Здиференціюємо (10.6.2.3), беручи до уваги, що $dy = pdx$:

$$dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp \quad \Rightarrow$$
$$pdx = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp \quad \Rightarrow$$
$$(p - \varphi(p))dx = \big(x\varphi'(p) + \psi'(p)\big)dp \qquad (p \neq \varphi(p)) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{dp} - \frac{x\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Останнє рівняння є лінійним відносно функції $x(p)$. Інтегруючи, одержимо $x = \omega(p, C)$, що разом з (10.6.2.3) визначатиме ***загальний розв'язок*** рівняння Лагранжа у параметричній формі.

Якщо рівняння $p = \varphi(p)$ має дійсні корені $p = p_i$, то, підставляючи їх у рівняння (10.6.2.2), одержуємо $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$. Ці розв'язки рівняння Лагранжа (з геометричної точки зору – прямі) можуть бути особливими.

Розглянемо окремий випадок рівняння Лагранжа, коли $\varphi(y') \equiv y'$:

$$y = xy' + \psi(y'). \qquad (10.6.2.4)$$

Рівняння (10.6.2.4) називають ***рівнянням Клеро***. Інтегруючи його за тією самою схемою, що й рівняння Лагранжа, маємо:

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad y = xp + \psi(p) \quad \Rightarrow$$
$$pdx = xpd + pdx + \psi'(p)dp \quad \Rightarrow$$

$$xpd + \psi'(p)dp = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(x + \psi'(p)\big)dp = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x + \psi'(p) = 0 \quad \text{або} \quad dp = 0.$$

З рівняння $dp = 0$ знаходимо $p = C$ і, підставляючи у формулу

$$y = xp + \psi(p),$$

одержуємо ***загальний розв'язок*** рівняння Клеро:

$$y = xC + \psi(C). \qquad (10.6.2.5)$$

Легко бачити, що з геометричної точки зору загальний розв'язок рівняння Клеро є однопараметричною сім'єю прямих, а для його одержання потрібно у рівнянні (10.6.2.4) замінити похідну y' на сталу C.

З рівняння $x + \psi'(p) = 0$ знаходимо $x = -\psi'(p)$. Підставляючи цей вираз у формулу $y = xp + \psi(p)$, одержуємо, що $y = \psi'(p)p + \psi(p)$. Таким чином, маємо розв'язок

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = \psi'(p)p + \psi(p). \end{cases} \qquad (10.6.2.6)$$

Розв'язок (10.6.2.6) зазвичай є особливим, і у цьому випадку з геометричної точки зору маємо обвідну сім'ї (10.6.2.5). Справді, відшукуючи криву, підозрілу на обвідну сім'ї (10.6.2.5), маємо систему

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C), \\ 0 = x + \psi'(C), \end{cases}$$

друге рівняння якої одержане з першого диференціюванням за параметром С. Звідси легко знаходимо

$$\begin{cases} x = -\psi'(C), \\ y = -\psi'(C)C + \psi(C), \end{cases}$$

тобто систему, яка відрізняється від (10.6.17) тільки позначенням параметра.

10.7. Розв'язування прикладів та задач



1. Перевірити, чи є функції

$y_1 = \cos 3x, \qquad y_2 = \cos 2x, \qquad y_3 = 4\sin 3x$

розв'язками диференціального рівняння

$$y'' + 9y = 0.$$

Розв'язання.

Знайдемо похідні наведених функцій та підставимо кожну функцію та її похідні в дане рівняння. Отримаємо:

а) $y_1 = \cos 3x, y_1' = -3\sin 3x, y_1'' = -9\cos 3x,$

$-9\cos 3x + 9\cos 3x = 0;$

$0 \equiv 0.$

б) $y_2 = \cos 2x, y_2' = -2\sin 2x, y_2'' = -4\cos 2x,$

$-4\cos 2x + 9\cos 2x = 5\cos 2x \neq 0$, якщо $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, тому функція y_2 не є розв'язком даного рівняння;

в) $y_3 = 4\sin 3x, y_3' = 12\cos 3x, y_3'' = -36\sin 3x,$

$-36\sin 3x + 9 \cdot 4\sin 3x = 0;$

$0 \equiv 0;$

Отже, тільки функції y_1 та y_3 є розв'язками рівняння $y'' + 9y = 0$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є взагалі всі функції $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$, де C_1, C_2 – довільні сталі.



2. Встановити тип диференціальних рівнянь.

а) $xy' + 2\ln xy + 7 = 0;$ б) $x^2dy + ydx = 0;$

в) $y'' + y'tg\, y = 0;$ г) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Розв'язання.

Рівняння а), б) є звичайними диференціальними рівняннями першого порядку, рівняння в) – звичайне другого порядку. Рівняння г), де x, y – незалежні змінні, $z = f(x, y)$ – невідома функція двох змінних, a – константа, є рівняння з частинними похідними другого порядку.

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xdx + ydy = 0.$$

Розв'язання.

Це рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$$\int xdx + \int ydy = C;$$
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Геометрично загальний розв'язок представляє собою сім'ю концентричних кіл

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

4. Зінтегрувати рівняння

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xydy = 0.$$

Розв'язання.

Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на $x(y^2 - 1)$. Тоді:

$$\frac{(x^2 + 1)}{x}dx + \frac{y}{(y^2 - 1)}dy = 0 \ (x \neq 0, y \neq \pm 1) \Rightarrow$$
$$\int \frac{(x^2 + 1)}{x}dx + \int \frac{y}{(y^2 - 1)}dy = C \Rightarrow$$
$$\int x + \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2 - 1)}{(y^2 - 1)} = C \Rightarrow$$
$$\frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = C \Rightarrow$$
$$x^2 + 2\ln|x| + \ln|y^2 - 1| = 2C \Rightarrow$$
$$\ln|x^2(y^2 - 1)| = 2C - x^2 \Rightarrow$$
$$x^2(y^2 - 1) = Ce^{-x^2},$$

де, враховуючи довільність сталої C, перепозначено $\pm e^{2c}$ через C.

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є

$$y^2 = Cx^{-2}e^{-x^2} + 1.$$

З'ясуємо тепер можливість появи особливих розв'язків заданого рівняння. Легко перевірити, що функції $x = 0$, $y = 1$, $y = -1$ є розв'язками рівняння, однак у загальному інтегралі містяться

лише два останні (їх можна отримати, якщо $C = 0$). Функція $x = 0$ є особливим розв'язком.

Отже, розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$y^2 = Cx^{-2}e^{-x^2} + 1, x = 0.$$

5. Розв'язати рівняння: $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2-9}}$.

Розв'язання.

Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Для відокремлення змінних замінимо $y' = \frac{dy}{dx}$. Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2-9}} \cdot \left| \frac{dx}{y}; \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}; \right.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} + \ln C;$$

$$\ln|y| = \ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| + \ln C.$$

Тут для зручності сталу інтегрування C записано в логарифмічній формі. Після потенціювання дістаємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = C\left(x + \sqrt{x^2-9}\right).$$

Через те, що функція $y = 0$ також задовольняє задане рівняння, вона теж є його розв'язком. Вона міститься у загальному розв'язку (її можна отримати, якщо $C = 0$).

6. Розв'язати рівняння $(y - x^2y)dy = (x - xy^2)dx$.

Розв'язання.

Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Для того щоб відокремити змінні, треба спочатку винести за дужки співмножники в кожній з частин рівняння:

$$y(1 - x^2)dy = x(1 - y^2)dx.$$

Далі поділимо обидві частини рівняння на $(1 - x^2)(1 - y^2)$. Тоді

$$\frac{ydy}{1-y^2} = \frac{xdx}{1-x^2};\ (x \neq \pm 1,\ y \neq \pm 1);$$
$$\int \frac{ydy}{1-y^2} = \int \frac{xdx}{1-x^2};$$
$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-y^2)}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} + \ln C;$$
$$-\frac{1}{2}\ln|1-y^2| = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + \ln C;$$
$$\ln|1-y^2| = \ln|1-x^2| - 2\ln C;$$
$$\ln|1-y^2| = \ln|1-x^2| + \ln C^{-2};$$
$$\ln|1-y^2| = \ln|1-x^2|C^{-2};$$
$$1-y^2 = C^{-2}(1-x^2)$$

або

$1-y^2 = C_1(1-x^2)$, де, враховуючи довільність сталої C, перепозначено C^{-2} через C_1.

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є

$$y^2 = 1 - C_1(1-x^2).$$

З'ясуємо можливість появи особливих розв'язків заданого рівняння. Легко перевірити, що функції $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$ є розв'язками рівняння, однак у загальному інтегралі містяться лише два останні (їх можна отримати з формули, якщо $C_1 = 0$). Функції $x = -1, x = 1$ є особливими розв'язками.

Отже, розв'язок має вигляд:

$$y^2 = 1 - C_1(1-x^2),\ \ x = -1,\ \ x = 1.$$



7. Розв'язати задачу Коші:

$$xy' + y = y^2,\ \ y(1) = 0{,}6.$$

Розв'язання.

Подамо дане рівняння у вигляді:

$$xy' + y = y^2;$$
$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - y;$$

Помножимо обидві частини рівняння на $\frac{dx}{x(y^2-y)}$. Тоді

$$\frac{dy}{y^2-y} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dy}{y^2-y} = \int \frac{dx}{x} + \ln C\,; \quad x(y^2-y) \neq 0;$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} + \ln C\,;$$

$$\int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln C\,;$$

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + \ln C\,;$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|Cx|\,;$$

$$\frac{y-1}{y} = Cx;$$

$$1 - \frac{1}{y} = Cx;$$

$$\frac{1}{y} = 1 - Cx.$$

Отже, маємо загальний розв'язок рівняння

$$y = \frac{1}{1-Cx}.$$

Застосовуючи початкову умову $y(1) = 0{,}6$, знаходимо значення довільної сталої C:

$$0{,}6 = \frac{1}{1-C\cdot 1}; \qquad C = -\frac{2}{3}.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = \frac{1}{1+\frac{2}{3}x}.$$

Зауважимо, що загальний розв'язок знайдено за умови $x(y^2-y) \neq 0$. Якщо $x(y^2-y) = 0$, то або $x = 0$, або $y = 0$, або $y = 1$. Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що $x = 0$ не є розв'язком вихідного рівняння, $y = 1$ – частинний розв'язок, оскільки він є у загальному при $C = 0$, а $y = 0$ – розв'язок рівняння, але у загальному його немає ні при якому значенні довільної сталої C.

✧✧✧

8. Зінтегрувати рівняння

$$y' = cos(x + y).$$

Розв'язання.

Це рівняння є диференціальним рівнянням, що зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними (10.2.7). Введемо заміну, нехай

$$z = x + y.$$

Тоді

$$z' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = z' - 1 \quad \Rightarrow \quad z' - 1 = \cos z \quad \Rightarrow \quad z' = 1 + \cos z.$$

Звідси, якщо $1 + \cos z \neq 0$, то

$$\frac{dz}{1 + \cos z} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{1 + \cos z} = x + C \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{2\cos^2 \frac{z}{2}} = x + C \quad \Rightarrow \quad tg\, \frac{z}{2} = x + C.$$

$$x - tg\, \frac{x + y}{2} = C.$$

Якщо $1 + cosz = 0$, тобто $z = \pi + 2\pi n$, де $n \in Z$, то $y = -x + \pi + 2\pi n, n \in Z$. Ці розв'язки є особливими, бо їх не можна одержати зі загального інтегралу при жодному значенні сталої C.

Отже, загальним інтегралом є

$$x - tg\, \frac{x + y}{2} = C, \qquad y = -x + \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

✧✧✧

9. Зінтегрувати рівняння

$$y' = (2x + 3y - 1)^2, \qquad y(0) = 1.$$

Розв'язання.

Це рівняння є диференціальним рівнянням, що зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними (10.2.7). Введемо заміну, нехай

$$z = 2x + 3y - 1.$$

Тоді

$$z' = 2 + 3y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z' - 2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{z' - 2}{3} = z^2 \quad \Rightarrow \quad z' = 3z^2 + 2;$$

$$\frac{dz}{dx} = 3z^2 + 2.$$

Оскільки $3z^2 + 2 \neq 0$, маємо

$$\frac{dz}{3z^2 + 2} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{3z^2 + 2} = x + C;$$

$$\int \frac{dz}{\left(\sqrt{3}z\right)^2 + \sqrt{2}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \sqrt{\frac{3}{2}} z.$$

Тоді

$$\frac{1}{\sqrt{6}} arctg \sqrt{\frac{3}{2}} z = x + C.$$

Отже, загальним інтегралом є $\frac{1}{\sqrt{6}} arctg \sqrt{\frac{3}{2}} (2\,x\, + 3\,y - 1) - x = C.$

Застосовуючи початкову умову $y(0) = 1$, знаходимо значення довільної сталої C:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} arctg \sqrt{\frac{3}{2}} (2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 1) - 0 = C;$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} arctg \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2 - 0 = C;$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} arctg \sqrt{6} = C;$$

Підставляємо значення C у загальний інтеграл:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} arctg \sqrt{\frac{3}{2}} (2\,x\, + 3\,y - 1) - x = \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \sqrt{6};$$

$$arctg \frac{\sqrt{3}(2\,x\, + 3\,y - 1)}{\sqrt{2}} - \sqrt{6}x = arctg \sqrt{6}.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд

$$arctg \frac{\sqrt{3}(2\,x\, + 3\,y - 1)}{\sqrt{2}} - \sqrt{6}x = arctg \sqrt{6}.$$

◊◊◊

10. Зінтегрувати рівняння

$$x^2y' - y^2 + xy - x^2 = 0.$$

Розв'язання.

Записавши рівняння у вигляді

$$y' = \frac{y^2 - xy + x^2}{x^2},$$

переконуємось, що воно є однорідним, бо його права частина є однорідною функцією виміру 0. Виконаємо заміну $y = ux$. Тоді $y' = u'x + u$ і, підставляючи ці вирази для y і y' у рівняння, одержуємо

$$u'x + u = \frac{u^2x^2 - x^2u + x^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = 1 + u^2 - 2u \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x} \quad (u \neq 1, x \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{u-1} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad u = 1 - \frac{1}{\ln|x| + C} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{\ln|x| + C} \quad \Rightarrow \quad y = x\left(1 - \frac{1}{\ln|x| + C}\right).$$

Якщо $u = 1$, то $y = x$ – особливий розв'язок, а $x = 0$ – не є розв'язком заданого рівняння.

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = x\left(1 - \frac{1}{\ln|x| + C}\right), \qquad y = x.$$

◊◊◊

11. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0.$$

Розв'язання.

Це диференціальне рівняння першого порядку, в якому:

$$M(x, y) = y^2 - 2xy; \qquad N(x, y) = x^2.$$

Функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ є однорідними функціями другого виміру:

$$M(tx, ty) = (ty)^2 - 2txty = t^2y^2 - 2t^2xy = t^2(y^2 - 2xy) = t^2M(x, y);$$

$$N(tx, ty) = (tx)^2 = t^2x^2 = t^2N(x, y),$$

тобто початкове рівняння є однорідним.

Виконаємо заміну $y = ux$, $y' = u'x + u$, $u = \frac{y}{x}$. Підставляючи ці вирази для y і y' у рівняння, одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(y^2 - 2xy) + x^2 \frac{dy}{dx} = 0;$$
$$(y^2 - 2xy) + x^2 y' = 0;$$
$$(ux)^2 - 2xux + x^2(u'x + u) = 0;$$
$$u^2x^2 - 2ux^2 + x^2(u'x + u) = 0.$$

Поділимо на x^2:

$$u^2 - 2u + u'x + u = 0;$$
$$u^2 - u + u'x = 0;$$
$$u'x = u - u^2;$$

Оскільки $u = u(x)$, то $u' = \frac{du}{dx}$. Маємо:

$$\frac{du}{dx}x = u - u^2.$$

Відокремимо змінні в останньому рівнянні:

$$\frac{du}{u - u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо:

$$\int \frac{du}{u - u^2} = \int \frac{dx}{x};$$
$$\int \frac{du}{u-u^2} = \int \frac{du}{u(1-u)} = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) du = \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{1-u} = \ln|u| + (-1) \cdot$$
$$\cdot \ln|1 - u| = \ln|u| - \ln|1 - u| = \ln\left|\frac{u}{1-u}\right|;$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|.$$

Маємо:

$$\ln\left|\frac{u}{1-u}\right| = \ln|x| + \ln|C|;$$
$$\ln\left|\frac{u}{1-u}\right| = \ln|Cx|;$$
$$\frac{u}{1-u} = Cx;$$
$$\frac{y/x}{1 - y/x} = Cx;$$

$\frac{y}{x-y} = Cx$ – загальний інтеграл даного рівняння.

Знайдемо з останнього виразу шукану функцію y:

$$y = Cx(x - y) \quad \Rightarrow \quad y = Cx^2 - Cxy \quad \Rightarrow \quad y + Cxy = Cx^2 \quad \Rightarrow$$

$$y(1 + Cx) = Cx^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{Cx^2}{1 + Cx}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння:

$$y = \frac{Cx^2}{1 + Cx}.$$



12. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}, \qquad y(1) = -3.$$

Розв'язання.

Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2};$$

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{2t^2x^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{2t^2x^2} = t^0\frac{x^2 + y^2}{2x^2}$$
$$= t^0 f(x, y).$$

Отже, рівняння є однорідним.

Покладемо $y = ux$, $y' = u'x + u$. Підставимо y, y' в задане рівняння, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними, звідки дістанемо загальний інтеграл. Процес розв'язання виглядає так:

$$u'x + u = \frac{x^2 + (ux)^2}{2x^2};$$

$$u'x + u = \frac{x^2 + u^2x^2}{2x^2};$$

$$u'x + u = \frac{x^2(1 + u^2)}{2x^2};$$

$$u'x + u = \frac{1 + u^2}{2};$$

$$u'x = \frac{1 + u^2}{2} - u;$$

$$u'x = \frac{1 + u^2 - 2u}{2};$$

$$u' = \frac{(u-1)^2}{2x};$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2x};$$

$$\frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{2du}{(u-1)^2} = 2\int (u-1)^{-2}du = \frac{2(u-1)^{-1}}{-1} = -\frac{2}{u-1};$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|;$$

$$-\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln|C|;$$

$$-\frac{2}{u-1} = \ln|Cx|;$$

$$-\frac{2}{y/x - 1} = \ln|Cx|;$$

$$-\frac{2x}{y-x} = \ln|Cx|;$$

$$\frac{2x}{x-y} = \ln|Cx|.$$

Остаточно загальний інтеграл має вигляд: $Cx = e^{\frac{2x}{x-y}}$.

При відокремленні змінних ми поділили на $x \neq 0$ і на $(u-1)^2 \neq 0$. Точки, в яких $x = 0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння, тому $x = 0$ не є розв'язком рівняння.

При $u - 1 = 0$ маємо $u = 1 \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = 1 \;\Rightarrow\; y = x$.

Функція $y = x$ перетворює задане рівняння в тотожність і є його особливим розв'язком, який слід вказати додатково до знайденого інтеграла.

Використовуємо початкову умову $x = 1$, $y = -3$ і знайдемо C:

$$C \cdot 1 = e^{\frac{2\cdot 1}{1-(-3)}};$$

$$C = e^{\frac{2}{4}} \quad \Rightarrow \quad C = e^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{e}.$$

Тоді $\sqrt{e}x = e^{\frac{2x}{x-y}}$ або $x = e^{\frac{2x}{x-y}-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = e^{\frac{3x+y}{2(x-y)}}$ – частинний розв'язок рівняння.

13. Зінтегрувати рівняння

$$y' = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}.$$

Розв'язання.

Це диференціальне рівняння має вигляд (10.3.2), тобто є диференціальним рівнянням, яке зводиться до однорідного.

Оскільки $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$, то виконаємо заміну

$$x = m + \alpha, \qquad y = n + \beta,$$

де числа α і β задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3, \\ 2\alpha + \beta = 3. \end{cases}$$

Легко знаходимо, що $\alpha = \beta = 1$. Таким чином, після заміни

$$x = m + 1, \; y = n + 1,$$

$$dx = dm, \quad dy = dn,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dn}{dm}$$

одержуємо однорідне рівняння

$$\frac{dn}{dm} = \frac{m+1+2(n+1)-3}{2(m+1)+n+1-3} = \frac{m+2n}{2m+n}.$$

Це рівняння є однорідним відносно m і n.

Нехай $n = um$, $n' = u'm + u$. Тоді

$$u'm + u = \frac{m+2um}{2m+um} \Rightarrow u'm + u = \frac{m(1+2u)}{m(2+u)} \Rightarrow$$

$$u'm + u = \frac{1+2u}{2+u} \Rightarrow u'm = \frac{1+2u}{2+u} - u \Rightarrow$$

$$u'm = \frac{1+2u-2u-u^2}{2+u} \Rightarrow$$

$$\frac{2+u}{1-u^2}du = \frac{dm}{m} \quad (u \neq \pm 1, \qquad m \neq 0).$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо:

$$\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{1}{2}\ln|1-u^2| = \ln|m| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow$$

$$1+u = Cm^2(1-u)^3 \quad (C := \pm C_1^2) \quad \Rightarrow$$

$$1+\frac{n}{m} = Cm^2\left(1-\frac{n}{m}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad m+n = C(m-n)^3.$$

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є

$$x+y-2 = C(x-y)^3.$$

Якщо $u = 1$, то $n = m, m \neq 0$, тобто $y = x, x \neq 1$. Якщо $u = -1$, то $n = -m$, $m \neq 0$, тобто $y = -x+2, x = 1$. Перший розв'язок є особливим, а другий – частинним. Нарешті, якщо $m = 0$, то $x = 1$, але ця функція не є розв'язком заданого рівняння.

Отже, маємо: $x + y - 2 = C(x - y)^3, y = x$.



14. Зінтегрувати рівняння

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

Розв'язання.

Це диференціальне рівняння має вигляд (10.3.2), тобто є диференціальним рівнянням, яке зводиться до однорідного.

Оскільки $\Delta = 0$, то виконаємо заміну

$$z = x + y, \qquad y = z - x.$$

Тоді $dy = dz - dx$, і, підставляючи у рівняння, одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(z + 1)dx + (2z - 1)(dz - dx) = 0 \Rightarrow$$

$$(z + 1)dx + (2z - 1)dz - (2z - 1)dx = 0 \Rightarrow$$

$$(z + 1 - 2z + 1)dx + (2z - 1)dz = 0 \Rightarrow$$

$$(2 - z)dx + (2z - 1)dz = 0.$$

Зінтегруємо його:

$$dx + \frac{(2z-1)}{(2-z)}dz = 0 \quad (z \neq 2) \quad \Rightarrow \quad \int dx + \int \frac{(2z-1)}{(2-z)}dz = C \quad \Rightarrow$$

$$\int dx + \int \frac{3-2(2-z)}{(2-z)}dz = C \quad \Rightarrow \quad x - 3\ln|2-z| - 2z = C.$$

Замінимо z на $x + y$, маємо:

$$3\ln|2 - x - y| + x + 2y = C.$$

Якщо $z = 2$, то $y = 2 - x$. Цей розв'язок є, очевидно, особливим.

Отже, загальний інтеграл цього рівняння:

$$3\ln|2 - x - y| + x + 2y = C, y = 2 - x.$$

✧✧✧

15. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' - y\,ctgx = \frac{1}{\sin x}.$$

Розв'язання.

Дане рівняння має вигляд (10.4.2), тобто воно є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y', при цьому

$$p(x) = ctgx, \qquad q(x) = \frac{1}{sin\,x}.$$

Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі, тобто загальний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y = uv.$$

Звідси

$$y' = u'v + u\,v'.$$

Підставляємо y та y' у вихідне рівняння

$$u'v + u\,v' - uv\,ctgx = \frac{1}{\sin x},$$

$$u'v + u\,(v' - v\,ctgx) = \frac{1}{\sin x}.$$

Для визначення невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ розіб'ємо отримане рівняння на два рівняння:

$$\begin{cases} v' - v\,ctgx = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння системи, як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$v' - v\,ctgx = 0,$$

$$v' = v\,ctgx,$$

$$\frac{dv}{dx} = v\,ctgx,$$

$$\frac{dv}{v} = ctgxdx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int ctgx\, dx,$$
$$\ln|v| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|,$$
$$\ln|v| = \ln|C_1 \sin x|,$$
$$v = C_1 \sin x.$$

Оскільки в даному рівнянні досить знайти який-небудь *частинний розв'язок*, то, для спрощення подальшого розв'язання, покладемо $C_1 = 1$. (Надалі, при розв'язанні першого рівняння системи, постійну інтегрування записувати не будемо, зразу шукаючи його найпростіший *частинний розв'язок*, який, як правило, можна отримати при $C_1 = 1$).

Тоді $v = sin\ x$.

Підставляємо функцію $v(x) = sin\ x$ у друге рівняння системи і знайдемо функцію $u(x)$:

$$u'v = \frac{1}{\sin x},$$
$$u' \sin x = \frac{1}{\sin x},$$
$$u' = \frac{1}{\sin^2 x},$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x},$$
$$du = \frac{1}{\sin^2 x} dx,$$
$$\int du = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + C,$$
$$u = -ctg\ x + C.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = uv = (-ctgx + C)sin\ x = -cosx + Csin\ x.$$



16. Зінтегрувати рівняння

$$y' - \frac{2y}{x} = x.$$

Розв'язання.

Дане рівняння має вигляд (10.4.2), тобто воно є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y', при цьому

$$p(x) = \frac{2}{x}, \qquad q(x) = x.$$

Для його розв'язання застосуємо метод варіації довільної сталої.

Спочатку розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння:

$$y' - \frac{2y}{x} = 0,$$
$$y' = \frac{2y}{x},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x},$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x},$$
$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} + \ln|C|,$$
$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|,$$
$$\ln|y| = \ln|Cx^2|,$$
$$y = Cx^2.$$

Розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y(x) = C(x)x^2$.

Знаходимо похідну:

$$y'(x) = C'(x)x^2 + C(x)\cdot 2x.$$

Підставляючи $y(x)$ $y'(x)$ у рівняння, одержуємо:

$$C'(x)x^2 + C(x)\cdot 2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = x,$$
$$C'(x)x^2 + C(x)\cdot 2x - 2xC(x) = x,$$
$$C'(x)x^2 = x,$$
$$C'(x) = \frac{1}{x},$$
$$C(x) = \int \frac{1}{x};$$
$$C(x) = \ln|x| + C_1$$

Отже, загальний розв'язок:

$$y = x^2(ln|x| + C_1).$$



17. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову (задача Коші):

$$y' + 2xy = 3x^2e^{-x^2}, \qquad y(0) = -1.$$

Розв'язання.

Маємо лінійне рівняння відносно функції y та її похідної y'. Застосуємо метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню:

$$y' + 2xy = 0,$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = -2xy,$$
$$\frac{dy}{dx} = -2xy,$$
$$\frac{dy}{y} = -2xdx,$$
$$\int \frac{dy}{y} = -2\int xdx + \ln|C|,$$
$$\ln|y| = -2 \cdot \frac{x^2}{2} + \ln|C|,$$
$$\ln|y| = -x^2 + \ln|C|,$$
$$y = e^{-x^2 + \ln|C|},$$
$$y = Ce^{-x^2},$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y = C(x)e^{-x^2}$$

вважаючи довільну сталу функцією змінної x . Тоді

$$y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x).$$

Підставляючи y та y' у задане рівняння, отримаємо:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 3x^2e^{-x^2}.$$

Після скорочення маємо:

$$C'(x)e^{-x^2} = 3x^2e^{-x^2},$$
$$C'(x) = 3x^2,$$
$$C(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1,$$
$$C(x) = x^3 + C_1$$

Підставивши знайдене значення $C(x)$, отримаємо загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння:

$$y = (x^3 + C_1)e^{-x^2}$$

Тепер розв'яжемо задачу Коші, тобто знайдемо частинний розв'язок даного рівняння, який відповідає заданій початковій умові.

Підставивши в загальний розв'язок початкову умову $y(0) = -1$, знайдемо значення сталої C_1:

$$-1 = (0^3 + C_1)e^{-0^2},$$
$$-1 = C_1$$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$y = (x^3 - 1)e^{-x^2}.$$



18. Розв'язати рівняння

$$(x + y^3)y' = y.$$

Розв'язання.

Відносно функції $y(x)$ рівняння не є лінійним (воно містить доданок y^3). Але відносно функції $x(y)$ це рівняння є лінійним.

Дійсно:

$$(x + y^3)y' = y \quad \Rightarrow \quad (x + y^3)\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow$$
$$x + y^3 = y\frac{dx}{dy} \quad \Rightarrow \quad y\frac{dx}{dy} - x = y^3 \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = y^2 \quad \Rightarrow \quad x' - \frac{x}{y} = y^2.$$

Розв'яжемо отримане рівняння методом Бернуллі, тобто зробимо підстановку

$$x = uv$$

(u і v тепер є функціями аргумента y) і $x' = u'v + v'u$, тобто $\frac{dx}{dy} = v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy}$.

Маємо:

$$u'v + v'u - \frac{uv}{y} = y^2;$$
$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = y^2;$$
$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{y} = 0; \\ u'v = y^2. \end{cases}$$

Розв’язуємо перше рівняння системи, як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$v' - \frac{v}{y} = 0;$$
$$v' = \frac{v}{y};$$
$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y};$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y};$$
$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y};$$
$$\ln|v| = \ln|y|;$$
$$v = y.$$

Підставляємо функцію $v(y) = y$ у друге рівняння системи і знайдемо функцію $u(y)$:

$$u'y = y^2;$$
$$u' = y;$$
$$\frac{du}{dy} = y;$$
$$du = ydy;$$
$$u = \int ydy;$$
$$u = \frac{y^2}{2} + C.$$

Тепер можна записати загальний розв’язок даного рівняння $x = u \cdot v$:

$$x = \left(\frac{y^2}{2} + C\right)y.$$



19. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = x^2y^2.$$

Розв’язання.

Дане рівняння має вигляд (10.4.10), тобто це – рівняння Бернуллі.

Зведемо його до лінійного, для чого поділимо обидві частини рівняння на y^2:

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{y}{xy^2}=\frac{x^2y^2}{y^2};$$
$$\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{xy}=x^2.$$

Введемо нову змінну $z(x)$, зробивши заміну

$$z=y^{-1}.$$

Диференціюючи функцію $z(x)$, знайдемо

$$z'=-1y^{-2}\cdot y' \quad \Rightarrow \quad y'y^{-2}=-z'.$$

Переходячи в початковому рівнянні до змінної $z(x)$, отримаємо:

$$-z'+\frac{1}{x}z=x^2;$$
$$z'-\frac{1}{x}z=-x^2.$$

Отримане рівняння є лінійним рівнянням 1–го порядку відносно функції $z(x)$, і для знаходження його розв'язку скористаємось методом Бернуллі, поклавши

$$z=uv, \qquad z'=u'v+v'u.$$

Підставляючи z і z' у рівняння, отримаємо:

$$u'v+v'u-\frac{1}{x}uv=-x^2;$$
$$u'v+u\left(v'-\frac{1}{x}v\right)=-x^2.$$

Знайдемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, внаслідок чого рівняння зводиться до системи:

$$\begin{cases} v'-\frac{1}{x}v=0; \\ u'v=-x^2. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи, відокремлюючи змінні, та інтегруючи, одержимо:

$$v'-\frac{1}{x}v=0;$$
$$v'=\frac{1}{x}v;$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}v;$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};$$
$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x};$$
$$\ln|v| = \ln|x|;$$
$$v = x.$$

Підставивши знайдену функцію $v = x$ в друге рівняння системи, отримаємо:

$$u'x = -x^2 \qquad \Rightarrow \qquad u' = -x.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо функцію $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} = -x;$$
$$du = -xdx;$$
$$u = -\int xdx = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного рівняння:

$$z = uv = \left(-\frac{x^2}{2} + C\right)x = -\frac{x^3}{2} + Cx.$$

Для отримання розв'язку початкового рівняння слід повернутися до змінної y. Оскільки $z = y^{-1}$, то

$$y^{-1} = -\frac{x^3}{2} + Cx;$$
$$\frac{1}{y} = \frac{2Cx - x^3}{2};$$
$$y = \frac{2}{2Cx - x^3}.$$

Це і є загальний розв'язок заданого рівняння Бернуллі.



20. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2y^2y' + xy^3 = 1.$$

Розв'язання.

Поділимо обидві частини рівняння на x^2y^2:

$$\frac{x^2y^2y'}{x^2y^2} + \frac{xy^3}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2y^2};$$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 y^2}.$$

Отримали рівняння Бернуллі вигляду (10.4.10). Розв'яжемо його безпосередньо методом Бернуллі, поклавши

$$y = uv, \qquad y' = u'v + v'u.$$

Підставляючи y і y' в отримане рівняння, маємо:

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2 (uv)^2};$$

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2 u^2 v^2};$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}.$$

Звідси, як і в розв'язанні попередньої задачі, отримаємо два зв'язані між собою рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0; \\ u'v = \dfrac{1}{x^2 u^2 v^2}. \end{cases}$$

Розв'язуючи перше рівняння, знаходимо v як найпростіший частинний розв'язок цього рівняння:

$$v' + \frac{v}{x} = 0;$$

$$v' = -\frac{v}{x};$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x};$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|v| = -\ln|x|;$$

$$\ln|v| = \ln|x|^{-1};$$

$$v = x^{-1};$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

Підставляючи v в друге рівняння системи та розв'язуючи його, знаходимо u як загальний розв'язок цього рівняння:

$$u' \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2 u^2};$$

$$u'\frac{1}{x}=\frac{1}{u^2};$$

$$u'=\frac{x}{u^2};\quad\Rightarrow\quad\frac{du}{dx}=\frac{x}{u^2};$$

$$u^2du=xdx;$$

$$\int u^2\,du=\int xdx\,;$$

$$\frac{u^3}{3}=\frac{x^2}{2}+\frac{C}{3};$$

$$u^3=\frac{3x^2}{2}+C;$$

$$u=\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}+C}.$$

Отже, можемо записати загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y=uv=\frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}+C};$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2x^3}+\frac{C}{x^3}};$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3}}.$$

◊◊◊

21. Зінтегрувати рівняння Бернуллі

$$y'-\frac{2y}{x}=-xy^3.$$

Розв'язання.

Розв'яжемо це рівняння методом варіації довільної сталої. Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$y'-\frac{2y}{x}=0.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}\quad\Big|\cdot\frac{dx}{y};$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x};$$
$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x};$$
$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|;$$
$$\ln|y| = \ln C|x|^2;$$
$$y = Cx^2.$$

Розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)x^2$.
Похідна:

$$y' = C'(x)x^2 + 2xC(x).$$

Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$C'(x)x^2 + 2xC(x) - \frac{2C(x)x^2}{x} = -x(C(x)x^2)^3,$$
$$C'(x)x^2 + 2xC(x) - 2xC(x) = -C^3(x)x^7,$$
$$C'(x)x^2 = -C^3(x)x^7,$$
$$C'(x) = -C^3(x)x^5,$$
$$\frac{dC(x)}{dx} = -C^3(x)x^5,$$
$$\frac{dC(x)}{C^3(x)} = -x^5dx,$$
$$\int \frac{dC(x)}{C^3(x)} = -\int x^5dx - C_1,$$
$$\frac{C^{-2}(x)}{-2} = -\frac{x^6}{6} - C_1,$$
$$C^{-2}(x) = \frac{x^6}{3} + 2C_1,$$
$$C^{-2}(x) = \frac{x^6 + C_2}{3},$$
$$C^2(x) = \frac{3}{x^6 + C_2},$$
$$C(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{x^6 + C_2}},$$
$$y = \pm x^2\sqrt{\frac{3}{x^6 + C_2}},$$
$$y = \pm\frac{\sqrt{3}x^2}{\sqrt{x^6 + C_2}}.$$

Якщо $C(x) = 0$, то $y = 0$.

Отже, загальним розв'язком диференціального рівняння є:

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}x^2}{\sqrt{x^6 + C_2}}, \qquad y = 0.$$

22. Зінтегрувати рівняння

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - y^2)dy = 0.$$

Розв'язання.

Перевіримо, чи це рівняння є диференціальним рівнянням у повних диференціалах. Тут

$$M(x,y) = 2xy + 3y^2, \qquad N(x,y) = x^2 + 6xy - y^2,$$

відтак

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Отже, це рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Для знаходження функції $U(x,y)$ маємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy - y^2 . \end{cases}$$

Знайдемо вираз для шуканої функції з першого рівняння системи і підставимо його у друге рівняння:

$$U(x,y) = \int (2xy + 3y^2)\,dx + C(y) \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = x^2y + 3xy^2 + C(y).$$

Диференціюючи цю рівність по y, матимемо

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy + C'(y).$$

Підставимо у друге рівняння системи, отримаємо:

$$x^2 + 6xy + C'(y) = x^2 + 6xy - y^2 \quad \Rightarrow \quad C'(y) = -y^2$$

звідки інтегруванням за змінною y знаходимо

$$C(y) = -\int y^2\,dy + C = -\frac{y^3}{3} + C.$$

Зауважимо, що в останній формулі довільну сталу інтегрування можна прийняти рівною нулю, оскільки потрібно знайти хоча б одну функцію $U(x,y)$, диференціал якої збігається з лівою частиною заданого рівняння.

Отже, $U(x,y) = x^2y + 3xy^2 - y^3/3$, а загальним інтегралом є

$$x^2y + 3xy^2 - \frac{y^3}{3} = C.$$

◊◊◊

23. Розв'язати рівняння

$$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx - \sqrt{x^2-y}dy = 0.$$

Розв'язання.

Перевіримо, чи це рівняння є диференціальним рівнянням у повних диференціалах. Тут

$$M(x,y) = 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right), \qquad N(x,y) = -\sqrt{x^2-y},$$

а отже,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Це означає, що ліва частина даного рівняння є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$. Для знаходження функції $U(x,y)$ маємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right), \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\sqrt{x^2-y}. \end{cases}$$

Знайдемо вираз для шуканої функції з другого рівняння системи і підставимо його у перше рівняння:

$$U(x,y) = -\int \sqrt{x^2-y}\,dy + C(x) \quad \Rightarrow \quad -\int (x^2-y)^{\frac{1}{2}}dy + C(x) \quad \Rightarrow$$

$$U(x,y) = \frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2} + C(x) \quad \Rightarrow$$

Отриману функцію продиференціюємо за x

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x^2-y}\cdot(2x) + C'(x) \quad \Rightarrow$$

$$2x\sqrt{x^2-y}+C'(x)=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right) \quad \Rightarrow$$
$$2x\sqrt{x^2-y}+C'(x)=2x+2x\sqrt{x^2-y} \quad \Rightarrow$$
$$C'(x)=2x \quad \Rightarrow \quad C(x)=\int 2xdx=x^2+C.$$

Зауважимо, що в останній формулі довільну сталу інтегрування можна прийняти рівною нулю, оскільки потрібно знайти хоча б одну функцію $U(x,y)$, диференціал якої збігається з лівою частиною заданого рівняння.

Отже, $U(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}$,

а загальним інтегралом є

$$x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=C.$$



24. За допомогою інтегрувального множника зінтегрувати рівняння

$$(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0.$$

Розв'язання.

Перевіримо, чи це рівняння є диференціальним рівнянням у повних диференціалах. Маємо:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4xy-1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=1,$$

а тому

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Оскільки

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{1}{2xy^2-y}\cdot(4xy-1-1)=\frac{4xy-1-1}{y-2xy^2}=$$
$$=\frac{2(2xy-1)}{-y(2xy-1)}=-\frac{2}{y} \equiv \psi(y),$$

то, скориставшись формулою (10.5.8), знаходимо інтегрувальний множник:

$$\mu(y)=e^{-2\int\frac{dy}{y}}=e^{-2\ln|y|}=y^{-2}.$$

Якщо помножити обидві частини заданого рівняння на $\mu(y) = y^{-2}$, то одержуємо рівняння у повних диференціалах

$$(2x - \frac{1}{y})dx + (1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y})dy = 0,$$

бо для нього виконується умова

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}:$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x - \frac{1}{y}\right) = y^{-2}; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right) = y^{-2}.$$

Для знаходження функції $U(x, y)$ маємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2x - \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \left(1 + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{y}\right). \end{cases}$$

Знайдемо вираз для шуканої функції з першого рівняння системи і підставимо його у друге рівняння:

$$U(x, y) = \int \left(2x - \frac{1}{y}\right) dx + C(y) \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = x^2 - \frac{x}{y} + C(y) \quad \Rightarrow$$

Отриману функцію продиференціюємо за y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = xy^{-2} + C'(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y^2} + C'(y) = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow$$

$$C'(y) = 1 + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad C(y) = \int \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy \quad \Rightarrow$$

$$C(y) = y + \ln|y| + C$$

Зауважимо, що в останній формулі довільну сталу інтегрування можна прийняти рівною нулю, оскільки потрібно знайти хоча б одну функцію $U(x, y)$, диференціал якої збігається з лівою частиною заданого рівняння.

Отже, $U(x, y) = x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y|$, а загальним інтегралом є

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C.$$



25. Розв'язати задачу Коші:

$$2y^2 dx + \left(x + e^{\frac{1}{y}}\right) dy = 0, \qquad y(e) = 1.$$

Розв'язання.

Перевіримо, чи це рівняння є диференціальним рівнянням у повних диференціалах. Маємо:

$$M(x,y) = 2y^2, \qquad N(x,y) = x + e^{\frac{1}{y}}.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

а тому

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Оскільки

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2y^2}(4y-1) = \frac{(1-4y)}{2y^2} \equiv \psi(y),$$

то, скориставшись формулою (10.5.8), знаходимо інтегрувальний множник:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{(1-4y)}{2y^2} dy}.$$

$$\int \frac{(1-4y)}{2y^2} dy = \frac{1}{2}\int y^{-2}\, dy - 2\int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{2y} - 2\ln|y|.$$

$$\mu(y) = e^{-\frac{1}{2y} - 2\ln|y|} = y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}.$$

Якщо помножити обидві частини заданого рівняння на $\mu(y) = y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}$, то одержуємо рівняння у повних диференціалах

$$2y^2 \cdot y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}dx + \left(x + e^{\frac{1}{y}}\right)\cdot y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}dy = 0$$

$$2e^{-\frac{1}{2y}}dx + \left(x + e^{\frac{1}{y}}\right)\cdot y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}dy = 0,$$

бо для нього виконується умова (4):

$$\frac{\partial}{\partial y}2e^{-\frac{1}{2y}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x + e^{\frac{1}{y}}\right)\cdot y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}\right) = y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}dy\,.$$

Розв'яжемо рівняння у повних диференціалах:

$$2e^{-\frac{1}{2y}}dx + \left(x + e^{\frac{1}{y}}\right)\cdot y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}dy = 0.$$

Для знаходження функції $U(x,y)$ маємо систему

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2e^{-\frac{1}{2y}}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \left(x + e^{\frac{1}{y}}\right)\cdot y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}.$$

Знайдемо вираз для шуканої функції з першого рівняння системи і підставимо його у друге рівняння:

$$U(x,y)=\int 2e^{-\frac{1}{2y}}dx+C(y) \quad \Rightarrow \quad U(x,y)=2xe^{-\frac{1}{2y}}+C(y) \quad \Rightarrow$$

Отриману функцію про диференціюємо за y

$$\frac{\partial U}{\partial y}=2xe^{-\frac{1}{2y}}\cdot\frac{1}{2}y^{-2}+C'(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial y}=xe^{-\frac{1}{2y}}\cdot y^{-2}+C'(y) \quad \Rightarrow$$

$$xe^{-\frac{1}{2y}}\cdot y^{-2}+C'(y)=\left(x+e^{\frac{1}{y}}\right)\cdot y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}} \quad \Rightarrow$$

$$xy^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}+C'(y)=x\,y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}+y^{-2}e^{-\frac{1}{2y}}\cdot e^{\frac{1}{y}} \quad \Rightarrow$$

$$C'(y)=y^{-2}e^{\frac{1}{2y}} \quad \Rightarrow \quad C(y)=\int y^{-2}e^{\frac{1}{2y}}dy.$$

$$C(y)=\int y^{-2}e^{\frac{1}{2y}}dy=\left|\begin{array}{c} t=\dfrac{1}{2y} \\ dt=-\dfrac{1}{2y^2}dy \\ dy=-2y^2dt \end{array}\right|=\int y^{-2}e^{t}(-2y^2)\,dt=$$

$$=-2\int e^t dt=-2e^t+C=-2e^{\frac{1}{2y}}+C.$$

Зауважимо, що в останній формулі довільну сталу інтегрування можна прийняти рівною нулю, оскільки потрібно знайти хоча б одну функцію $U(x,y)$, диференціал якої збігається з лівою частиною заданого рівняння.

Отже, $U(x,y)=2xe^{-\frac{1}{2y}}+e^{-\frac{1}{y}}$, а загальним інтегралом є

$$2xe^{-\frac{1}{2y}}-2e^{\frac{1}{2y}}=2C \quad \text{або} \quad x=e^{\frac{1}{y}}+Ce^{\frac{1}{2y}}$$

Знайдемо частковий розв'язок диференціального рівняння. Підставимо початкову умову у загальний інтеграл:

$$x=e^{\frac{1}{y}}+Ce^{\frac{1}{2y}};$$

$$e=e^{\frac{1}{1}}+Ce^{\frac{1}{2\cdot 1}}$$

$$e=e+Ce^{\frac{1}{2}}$$

$$Ce^{\frac{1}{2}}=0; \quad \Rightarrow \quad C=0$$

Звідси маємо частковий розв'язок диференціального рівняння:

$$x = e^{\frac{1}{y}} \qquad \text{або} \qquad y = \frac{1}{\ln x}.$$



26. Зінтегрувати рівняння

$$y'^2 - 4y = 0.$$

Розв'язання.

Це рівняння є неявним диференціальним рівнянням першого порядку, яке розпадається на два рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = 2\sqrt{y}; \qquad y' = -2\sqrt{y}.$$

Загальним розв'язком першого з них є:

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y};$$
$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2dx;$$
$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\int dx;$$
$$2\sqrt{y} = 2x + 2C;$$
$$\sqrt{y} = x + C;$$
$$y = (x + c)^2;$$

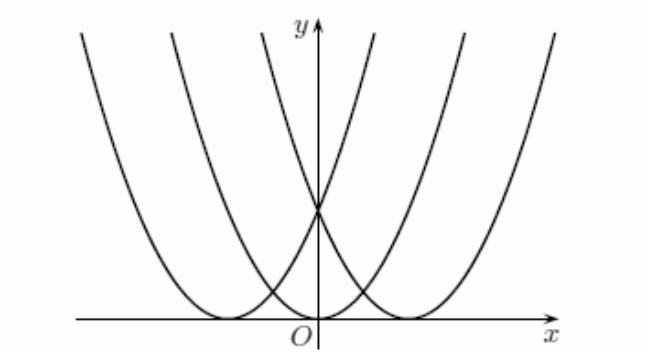
де $x \geq -C$,

а другого

$$y = (-x + c)^2$$

де $x \leq C$.

З геометричної точки зору це означає, що кожна парабола $y = (x + c)^2$ є інтегральною кривою. Окрім того, розв'язком рівняння є $y = 0$.



Отже, загальним розв'язком є $y = (x + c)^2, y = 0$.

◊◊◊

27. Зінтегрувати рівняння

$$y'^3 - 3y'^2 + 2 = 0.$$

Розв'язання.

Це рівняння містить тільки похідну, тобто рівняння вигляду $F(y') = 0$.

Згідно з формулою (10.6.6) одержуємо загальний інтеграл

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(y-C)^3 - 3x(y-C)^2 + 2x^3 = 0.$$

◊◊◊

28. Зінтегрувати рівняння

$$y'^2 - 2yy'/x - 1 = 0.$$

Розв'язання.

Це рівняння є неявним диференціальним рівнянням першого порядку. Розв'язуючи це рівняння як квадратне відносно y', одержуємо два однорідні диференціальні рівняння:

$$y'^2 - \frac{2yy'}{x} - 1 = 0;$$
$$D = 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4;$$

$$y' = \frac{\frac{2y}{x} \pm \sqrt{4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4}}{2};$$

$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}.$$

Виконуючи заміну $y = ux$, $y' = u'x + u$, маємо два рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x + u = u + \sqrt{u^2 + 1} \quad \text{і} \quad u'x + u = u - \sqrt{u^2 + 1};$$

$$u'x = \sqrt{u^2 + 1} \quad \text{і} \quad u'x = -\sqrt{u^2 + 1};$$

Зінтегруємо перше з них:

$$u' = \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{x}; \qquad \frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{x}; \qquad \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln\left|u + \sqrt{u^2 + 1}\right| = \ln|x| + \ln C;$$

$$u + \sqrt{u^2 + 1} = Cx;$$

$$\sqrt{u^2 + 1} = Cx - u;$$

$$u^2 + 1 = (Cx - u)^2;$$

$$u^2 + 1 = C^2x^2 - 2Cxu + u^2;$$

$$2Cxu = C^2x^2 - 1;$$

$$u = \frac{C^2x^2 - 1}{2Cx}; \qquad \frac{y}{x} = \frac{C^2x^2 - 1}{2Cx}; \qquad y = \frac{C^2x^2 - 1}{2C}.$$

Аналогічно знайдемо загальний розв'язок другого рівняння:

$$u' = -\frac{\sqrt{u^2 + 1}}{x}; \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{\sqrt{u^2 + 1}}{x}; \qquad \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln\left|u + \sqrt{u^2 + 1}\right| = -\ln|x| + \ln C;$$

$$u + \sqrt{u^2 + 1} = \frac{C}{x};$$

$$\sqrt{u^2 + 1} = \frac{C}{x} - u;$$

$$u^2+1=\left(\frac{C}{x}-u\right)^2;$$

$$u^2+1=\frac{C^2}{x^2}-2\frac{C}{x}u+u^2;$$

$$2\frac{C}{x}u=\frac{C^2}{x^2}-1;$$

$$2\frac{C}{x}u=\frac{C^2-x^2}{x^2};$$

$$u=\frac{(C^2-x^2)}{2Cx}; \qquad \frac{y}{x}=\frac{C^2-x^2}{2Cx}; \qquad y=\frac{C^2-x^2}{2C},$$

де С – довільна стала.

Отже, загальними розв'язками є: $y=\frac{C^2x^2-1}{2C}$, $y=\frac{C^2-x^2}{2C}$.

✧✧✧

29. Зінтегрувати рівняння

$$y=y'^2-3xy'+3x^2.$$

Розв'язання.

Це рівняння розв'язне відносно y, тобто воно має вигляд $y=f(x,y')$.

Тоді можна використати метод введення параметра. Позначимо

$$y'=p(x),$$

Тоді

$$y=p^2-3xp+3x^2.$$

Здиференціюємо його:

$$dy=2pdp-3xdp-3pdx+6xdx$$

Враховуючи, що $dy=y'dx=pdx$, маємо:

$$pdx=(2p-3x)dp-(3p-6x)dx \quad \Rightarrow$$
$$(2p-3x)dp-(3p-6x+p)dx=0 \quad \Rightarrow$$
$$(2p-3x)dp-(4p-6x)dx=0 \quad \Rightarrow$$
$$(2p-3x)dp-2(2p-3x)dx=0 \quad \Rightarrow$$
$$(2p-3x)(dp-2dx)=0 \quad \Rightarrow$$
$$dp-2dx=0 \qquad \text{або} \qquad 2p-3x=0.$$

Отже, одержали два рівняння. З першого з них знаходимо:

$$dp = 2dx; \quad \Rightarrow \quad \int dp = 2\int dx; \quad \Rightarrow \quad p = 2x + C.$$

Підставляючи знайдене значення p у вихідне рівняння, одержуємо загальний розв'язок

$$y = (2x + C)^2 - 3x(2x + C) + 3x^2 \Rightarrow$$
$$y = 4x^2 + 4Cx + C^2 - 6x^2 - 3Cx + 3x^2 \Rightarrow$$
$$y = x^2 + Cx + C^2.$$

З рівняння $2p - 3x = 0$ знаходимо $p = 3x/2$, а тому

$$y = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 3x \cdot \frac{3x}{2} + 3x^2 \Rightarrow y = \frac{9x^2}{4} - \frac{9x^2}{2} + 3x^2 \Rightarrow$$
$$y = \frac{9x^2 - 18x^2 + 12x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{3x^2}{4}.$$

Цей розв'язок особливий.

Отже, $y = x^2 + Cx + C^2, y = {}^{3x^2}/_{4}$.

◊◊◊

30. Зінтегрувати рівняння

$$x = y'^3 + 4y'.$$

Розв'язання.

Рівняння розв'язне відносно x, тобто воно має вигляд $x = f(y, y')$. Це рівняння можна розв'язувати методом введення параметра. Позначимо $y' = p(y)$.

Тоді $x = p^3 + 4p$. Далі маємо:

$$dx = 3p^2dp + 4dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{p} = 3p^2dp + 4dp \quad \Rightarrow$$
$$dy = (3p^3 + 4p)dp \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3p^4}{4} + 2p^2 + C.$$

Отже, $x = p^3 + 4p$, $y = \frac{3p^4}{4} + 2p^2 + C$.

◊◊◊

31. Зінтегрувати рівняння

$$y = 2xy' + y'^2.$$

Розв'язання.

Це рівняння є рівнянням Лагранжа. Нехай $y' = p$.

Тоді

$$y = 2xp + p^2 \Rightarrow dy = 2xdp + 2pdx + 2pdp \Rightarrow$$
$$pdx = 2(x + p)dp + 2pdx \Rightarrow 2(x + p)dp + pdx = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2 \qquad (p \neq 0).$$

Розв'язуючи одержане лінійне рівняння

$$x = uv \quad \Rightarrow \quad x' = u'v + v'u \quad \Rightarrow$$
$$u'v + v'u + \frac{2uv}{p} = -2 \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' + \frac{2v}{p}\right) = -2 \quad \Rightarrow$$
$$\begin{cases} v' + \frac{2v}{p} = 0 \\ u'v = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dp} = -\frac{2v}{p} \\ u'v = -2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \frac{dv}{v} = -\frac{2dp}{p} \\ u'v = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dp}{p} \\ u'v = -2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \ln|v| = -2\ln|p| \\ u'v = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = p^{-2} \\ u'p^{-2} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} v = p^{-2} \\ u' = -2p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = p^{-2} \\ u = -\frac{2p^3}{3} + C \end{cases} \Rightarrow$$
$$x = \left(-\frac{2p^3}{3} + C\right)p^{-2},$$

знаходимо, що $x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$.

Підставляючи цей вираз x у рівність $y = 2xp + p^2$, після нескладних перетворень знаходимо, що $y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}$. Отже, загальним розв'язком у параметричній формі є

$$x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}, \qquad y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}.$$

Якщо $p = 0$, то, підставляючи його в $y = 2xp + p^2$, одержуємо розв'язок $y = 0$, який є особливим, бо його не можна отримати зі загального при жодному значенні сталої С.

Отже, $x = -\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$, $y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}$, $y = 0$.

✧✧✧

32. Зінтегрувати рівняння

$$y = xy' + 2y'^2.$$

Розв'язання.

Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = xp + 2p^2 \quad \Rightarrow \quad dy = xdp + pdx + 4pdp$$

$$pdx = xdp + pdx + 4pdp \Rightarrow$$

$$xdp + 4pdp = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 4p)dp = 0 \Rightarrow$$

$$x + 4p = 0 \quad \text{або} \quad dp = 0.$$

З рівняння $dp = 0$ знаходимо, що $p = C$. Підставляючи $p = C$ у рівність $y = xp + 2p^2$, одержуємо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = Cx + 2C^2.$$

Якщо $x = -4p$, то

$$y = -4p^2 + 2p^2 = -2p^2.$$

Таким чином, особливим розв'язком є

$$x = -4p, \qquad y = -2p^2.$$

Виключивши звідси параметр p, одержуємо особливий розв'язок у явному вигляді:

$$y = {-x2}/{8}.$$

Отже, $y = Cx + 2C^2$, $y = {-x2}/{8}$.

10.8. Контрольні запитання

1. Що називають диференціальним рівнянням?
2. Яке диференціальне рівняння називають звичайним?
3. Що таке порядок диференціального рівняння?
4. У чому полягає відмінність між явною та неявною формами диференціального рівняння?
5. Що називають розв'язком диференціального рівняння?
6. Що таке загальний розв'язок і загальний інтеграл диференціального рівняння?
7. Що називають частинним розв'язком?
8. У чому полягає задача Коші?
9. Який геометричний зміст задачі Коші?

10. Сформулюйте теорему Пеано.

11. Які умови забезпечують існування та єдиність розв'язку задачі Коші?

12. Сформулюйте теорему Коші для диференціального рівняння першого порядку.

13. Що називають особливою точкою диференціального рівняння?

14. Який розв'язок називають особливим?

15. Що таке інтегральна крива диференціального рівняння?

16. Які рівняння називають рівняннями з відокремлюваними змінними?

17. У чому полягає метод відокремлення змінних?

18. Які функції можуть бути втрачені при відокремленні змінних?

19. Які диференціальні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними?

20. Що називають однорідною функцією?

21. Яке диференціальне рівняння називають однорідним?

22. Якою заміною однорідне рівняння зводять до рівняння з відокремлюваними змінними?

23. Які рівняння називають такими, що зводяться до однорідних?

24. Які заміни використовують для зведення рівнянь до однорідних?

25. Яке диференціальне рівняння називають лінійним рівнянням першого порядку?

26. Чим відрізняються лінійні однорідні та неоднорідні рівняння?

27. У чому полягає метод Бернуллі для розв'язування лінійних рівнянь?

28. У чому полягає метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)?

29. Що таке рівняння Бернуллі?

30. Якою заміною рівняння Бернуллі зводять до лінійного?

31. Яке рівняння називають рівнянням у повних диференціалах?

32. Яка умова є необхідною і достатньою для того, щоб рівняння було рівнянням у повних диференціалах?

33. Що називають інтегрувальним множником?

34. Як знаходять інтегрувальний множник, що залежить лише від однієї змінної?

35. Які диференціальні рівняння називають не розв'язаними відносно похідної?

36. Як формулюється задача Коші для неявного диференціального рівняння?

37. У чому полягає метод введення параметра?

38. Які рівняння називають рівняннями Лагранжа?

39. Які рівняння називають рівняннями Клеро?

40. Як знаходять загальний та особливий розв'язки рівняння Клеро?

10.9. Завдання для самостійного виконання

Перевірити, чи буде функція $y = f(x)$ розв'язком відповідного рівняння:

1. $y = e^{2x}$; $\quad y = e^{\frac{xy'}{y}}$;

2. $y = \dfrac{1+x}{x^2}$, $\quad y' = y + x^2$;

3. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $\quad (1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$;

4. $y = xe^{-3x}$, $\quad y' - \dfrac{y}{x} = 2xe^{-3x}$;

5. $y = e^{tg\frac{x}{2}}$, $\quad y' \sin x = y \ln y$.

Розв'язати диференційне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язати, де вказано, задачу Коші.

6. $xydx + (x+1)dy = 0$;

7. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$;

8. $xy' + y = y^2$, $y(1) = \frac{1}{2}$;

9. $y'ctgx + y = 2$, $y(0) = -1$;

10. $\frac{2ydy}{xdx} = 5x - 2$;

11. $y' = (2y+1)ctgx$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$;

12. $(3y-2)sinxdx = cosxdy$;
13. $y'(x^2+1) = 2xy;\ y(1) = 4$;
14. $\frac{ydy}{dx} = 3x^2 + 2x + 1$;
15. $y'xlnx = y + 1;\ y(e) = 2$;
16. $(1+x^2)y' = -xy;$ $y(0) = 1$;
17. $(x+1)ydx + xdy = 0$;
18. $\sqrt[3]{y^2}dx = xdy$;
19. $xy' + ylny = 0;\ y(1) = e$.
20. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0,$ $y(0) = 1$;
21. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0,$ $y(0) = 1$;
22. $2xyy' + y^2 = 2xy$;
23. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$;
24. $y' = 10^{x+y}$;
25. $y\frac{dy}{dx} + x = 1$;
26. $xy' - y = y^3$;
27. $tg\ x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x\ ctg\ y dy = 0$;
28. $y' \sin x - y \cos x = 0,$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;
29. $y^2 \sin x\, dx + \cos^2 x \ln y\, dy = 0$;
30. $e^{-y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 1$;
31. $x^2(1+y^5)dx + y^4(1+x^3)dy = 0$;
32. $(3+e^x)yy' = e^x,$ $y(0) = 1$;
33. $x\sqrt{1+y^2} + yy'^{\sqrt{1+x^2}} = 0$;
34. $(1+e^x)yy' = e^x,$ $y(0) = 1$;
35. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0,$ $y(0) = 1$;

Розв'язати диференційні рівняння, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними.

36. $y' = 2x + y + 3$;
37. $(x+y)y' = 1$;
38. $\frac{dy}{dx} = tg\ (2x+3y)$;
39. $y' = \frac{1}{3x+y}$;
40. $y' = \frac{x-y+3}{x-y-2},\ y(1) = 0$;
41. $y' = \sqrt{\frac{x+y+1}{x+y+4}};\ y(0) = 1$;
42. $y' = \ln(x+y+2),$ $y(1) = 0$;
43. $y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$;
44. $y' = \frac{1}{(x+y)^2+1},\ y(0) = 0$;
45. $y' = \frac{2x+y-1}{2x+y+3};\ y(0) = 2$.

Розв'язати диференційне рівняння однорідне відносно змінних. Розв'язати, де вказано, задачу Коші.

46. $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$;
47. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2,\ y(1) = 2$;
48. $y' = \frac{x+y}{x-y}$;
49. $(x+2y)dx - xdy = 0$;

50. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y,\ \ y(1) = 0;$ **51.** $xyy' = y^2 + 2x^2;$

52. $xy' - y = xtg\frac{y}{x},\ \ y(1) = \frac{\pi}{2};$ **53.** $y'(2x^2 + xy) = xy + y^2;$

54. $x^2dy = (y^2 - xy + x^2)dx;$ **55.** $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x+y}{x};$

56. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x};$ **57.** $xdy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx;$

58. $xy' = \sqrt{16x^2 + y^2} + y;$ **59.** $y' = \frac{y^3}{x^3} + \frac{y}{x};$

60. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}};$ **61.** $xy' = xe^{y/x} + y;\ \ y(1) = 0;$

62. $y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x};$ **63.** $y' = \frac{y^2}{x^2} + 7\frac{y}{x} + 8,\ \ y(1) = 2;$

64. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6,\ \ y(1) = 1;$ **65.** $(x + 2y)dx - xdy = 0;\ y(1) = 1;$

66. $y' = \frac{3y+4x}{x};$ **67.** $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0;$ $y(1) = 2;$

68. $2x^3y' = 2yx^2 - y^3;$ **69.** $xy' - y = xtg\left(\frac{y}{x}\right);\ \ y(1) = \frac{\pi}{2};$

70. $xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x};$ **71.** $xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0;$

72. $xy' = y(\ln y - \ln x);$ **73.** $xy' = y + x\cos^2\frac{y}{x};$

74. $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0;$

75. $xy' = y\left(1 + \ln\frac{x}{y}\right),\qquad y(1) = e^{-\frac{1}{2}}.$

Розв'язати диференційні рівняння, що зводяться до однорідних рівнянь.

76. $y' = \dfrac{3x - y + 1}{x + y - 5};$

77. $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0,\qquad y(1) = 1;$

78. $y' = \dfrac{y + 4x - 13}{y + x - 4};$

79. $(2x - y + 3)dx + (4x - 2y - 5)dy = 0;$

80. $y' = \dfrac{x + 6y - 7}{8x - y - 7};$

81. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 2y - 6}{2x - y + 3};\quad y(1) = -1;$

82. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 2}{2x - 2y - 3};$

83. $(2x + 8)dx + (3y - 5x - 11)dy = 0;$

84. $y' = \dfrac{x-2y+5}{x+y-4};\ y(2)=0;$

85. $(4y-3x-5)y'+7x-3y+2)=0.$

Знайти загальні або частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

86. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^3};$

87. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^6+1};$

88. $y'+2yctg\ x=\frac{1}{\sin x};$

89. $y'+\frac{2x^2}{x^3+1}y=x^2;$

90. $y'+\frac{e^x}{e^x+1}y=x;$

91. $(x^2+1)y'-2xy=\left((x^2+1)\right)^2;$

92. $(x^2+1)y'+y=arctg\ x;$

93. $y'-\frac{y}{\sin x}=\cos^2\ln tg\frac{x}{2};$

94. $x\ln x\ y'-y=x(\ln x-1);$

95. $(2xy+3)dy-y^2dx=0;$

96. $xy'-2y=x^3\cos x;$

97. $xy'-2y=x^3\cos x;$

98. $x^2+xy'=y;\ y(1)=0;$

99. $y'=\frac{y^3}{x^3}+\frac{y}{x};$

100. $(2x+1)y'=4x+2y;$

101. $y'+y\cos x=\cos x;\ y(0)=1;$

102. $y'x\ln x-y=3x^2\ln^2 x;$

103. $(xy+e^x)dx-xdy=0;$

104. $y=x(y'-x\cos x);$

105. $y'-\frac{y}{1-x^2}-1-x=0;\ y(0)=1;$

106. $2x(x^2+y)dx=dy;$

107. $y'-y\ tg\ x=\frac{1}{\cos x},\ y(0)=0;$

108. $y'+2y=e^{-x};$

109. $y'\cos x+y=1-\sin x;$

110. $y'-2xy=2x\ e^{x^2};$

111. $xy'+y-e^x=0, y(1)=2;$

112. $(1+x^2)y'+y=arctg\ x;$

113. $y'-ytgx=\frac{1}{\cos^3 x},\ y(0)=0;$

114. $y'-ytgx=\cos^2 x,\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0{,}5;$

115. $y'-\frac{y}{x+2}=x^2+4x+5=0;\ \ y(-1)=1{,}5;$

116. $xy'+y=x^2+3x+2,\ \ y(1)=\frac{29}{6};$

117. $(y^2+1)x'+2xy=2y^2;$

118. $y'-\frac{y}{x}=-\frac{2\ln x}{x},\ y(1)=1;$

119. $y'+\frac{xy}{2(1-x^2)}=\frac{x}{2},\ y(0)=\frac{2}{3};$

120. $y'-\frac{2}{x+1}y=e^x(x+1)^2,\ y(0)=1;$

121. $y'\cos x-y\sin x=2x, y(0)=0.$

Розв'язати рівняння Бернуллі. Розв'язати, де вказано, задачу Коші.

122. $y' + 2xy = 2xy^2$;

123. $y' + 2xy = y^2 e^{x^2}$;

124. $3xy^2y' - 2y^3 = x^2$;

125. $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x$;

126. $2y' \ln x + \frac{y}{x} = y^{-1} \cos x$;

127. $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y},\ y(0) = \frac{9}{4}$;

128. $y' - y \cos x = y^2 \cos x$;

129. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$;

130. $xydy = (y^2 + x^2)dx$;

131. $xdy = (x^5 y^2 - 2y)dx$;

132. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$;

133. $yy' - 4x - y^2\sqrt{x} = 0$;

134. $y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2,\quad y(0) = 1$;

135. $xy' + y = 2y^2 \ln x\,, y(1) = 0{,}5$;

136. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x,\quad y(1) = 1$;

137. $3(xy' + y) = y^2 \ln x\,, y(1) = 3$;

138. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

139. $2y' + y \cos x = \frac{\cos x(1+\sin x)}{y},\quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$;

140. $y' - ytgx = -\frac{2}{3}y^4 \sin x,\quad y(0) = 1$;

141. $y' + \frac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3 + 1) \sin x,\quad y(0) = 1$.

Проінтегрувати рівняння у повних диференціалах:

142. $(3x^2y + 2)dx + (x^3 + 3y^2)dy = 0$;

143. $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$;

144. $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$;

145. $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$;

146. $(y^3 + \cos y)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$;

147. $xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0$;

148. $(2xe^y - ys \sin x)dx + (x^2e^y + \cos x)dy = 0$;

149. $(y^2 + 2x \ln y)dx + \left(2xy + \frac{x^2}{y}\right)dy = 0$;

150. $(4x^3y + y^3e^x)dx + (x^4 + 3y^2e^x)dy = 0$;

151. $(y \cos x + \cos y)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$;

152. $(ye^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0$;

153. $(e^x \sin y + 2x)dx + e^x \cos y\, dy = 0$;

154. $(2xe^y + e^x)dx + x^2e^y dy = 0$;

155. $(7x^6y + e^{x+y})dx + (x^7 + e^{x+y})dy = 0$;

156. $(e^y + ye^x)dx + (xe^y + e^x)dy = 0;$

157. $(2xy\cos x^2y + 1)dx + (x^2 + \sin x^2y - \sin y)dy = 0;$

158. $(2x\cos x^2 + e^y)dx + (e^y x + \cos y)dy = 0;$

159. $\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{\cos^2 xy}\right)dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + 2y\right)dy = 0;$

160. $\left(\frac{1}{1+x^2} + 3x^2e^y\right)dx + (x^3e^y + 1)dy = 0;$

161. $\sin 2x + 3x^2y + \left(x^3 + \frac{1}{1+y^2}\right)y' = 0;$

162. $(3x^2 + 2y^2)dx + (4xy - \sin 2y)dy = 0;$

163. $yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy = 0;$

164. $(y\sin 2x + x)dx + (y^2 - \cos 2x)dy = 0;$

165. $\left(\frac{1}{1+x^2} + 3x^2y + \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)dx + \left(x^3 - \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)dy = 0;$

166. $\left(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{e}e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + 2y - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0;$

167. $(2xy + y^2 + e^x)dx + (x^2 + 2xy + \cos y)dy = 0, y(0) = 0;$

168. $\left(\frac{2x}{1+x^2} + 3y^2\right)dx + (6xy - e^y)dy = 0, y(1) = 0;$

169. $(ye^{xy} + \sin x)dx + (xe^{xy} + 2y)dy = 0,\ y(\pi) = 1;$

170. $(y\cos xy + 2x)dx + (x\cos xy + 4y^3)dy = 0, y(0) = 1;$

171. $\left(\frac{y}{x} + 2x\right)dx + (\ln x + 3y^2)dy = 0, y(1) = 2;$

172. $(2xe^y + y)dx + (x^2e^y + x - \sin y)dy = 0, y(0) = \frac{\pi}{2};$

173. $\left(2x + y + \frac{1}{x}\right)dx + (x + 2y - e^{-y})dy = 0, y(1) = 0;$

174. $(4x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + 2y + arctgy)dy = 0, y(0) = 1;$

175. $(y^2e^{xy} + 3x^2)dx + \left(2xye^{xy} + x^2e^{xy} - \frac{1}{1+y}\right)dy = 0, y(0) = 1;$

176. $\left(\frac{2x}{y} + y\cos x\right)dx + \left(-\frac{x^2}{y^2} + \sin x + 4y^3\right)dy = 0, y(2\pi) = 1.$

Знайти інтегрувальний множник та проінтегрувати диференціальне рівняння:

177. $ydx + (2x + y^2)dy = 0;$

178. $(3xy + y)dx + x^2dy = 0;$

179. $(x + y^2)dx + xydy = 0;$

180. $(y + e^{-y})dx + xdy = 0;$

181. $(xy + y^3)dx + x^2dy = 0;$

182. $(x\ln y + x)dx + ydy = 0;$

183. $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xy\,dy = 0;$

184. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$;
185. $(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$;
186. $(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

187. $x(y')^2 + 2xy' - y = 0$;
188. $y = e^{y'}(y' - 1)$;
189. $\arcsin\frac{x}{y'} = y'$;
190. $y(y')^2 - (xy + 1)y' + x = 0$;
191. $(y')^2 + 2y' + 1 = 0$;
192. $(y')^2 + y' - 2 = 0$;
193. $(y')^2 + 5y' + 6 = 0$;
194. $(y')^2 = y^3 - y = 0$;
195. $y - (y')^3 - (y')^2 = 0$;
196. $(y')^2 + 2xy' - 3x^2 = 0$;
197. $y = y'\sin y' + \cos y' = 0$;
198. $x^2 + (y')^3 - 3xy' + 1 = 0$;
199. $x = y'(1 + e^{y'})$;
200. $(y')^2 + (x + 3)y' - y + 1 = 0$;
201. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{(y')^2}$;
202. $x(y')^2 - yy' + 3 = 0$;
203. $y - 2xy' = \sqrt{1 + (y')^2}$;
204. $(3x + 1)(y')^2 - 3(y + 2) + 9 = 0$;
205. $y = xy' + \sin y'$;
206. $x = y'\sin y'$;
207. $2y(y' + 1) = x(y')^2$;
208. $(y')^3 + xy' - y = 0$;
209. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{(y')^2}$;
210. $2yy' = x((y')^2 + 4) = 0$;
211. $xy' - y = \ln y'$.

Розділ 11

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

11.1. Поняття про диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші

Якщо диференціальне рівняння містить похідну більш ніж першого порядку, то воно називається рівнянням вищих порядків.

Диференціальним рівнянням n–го порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)} = 0 \qquad (11.1.1)$$

або, якщо воно розв'язане відносно старшої похідної,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \qquad (11.1.2)$$

де функція f визначена і неперервна в деякій області D зміни своїх аргументів.

Розв'язком диференціального рівняння (11.1.2) називається будь-яка n разів неперервно-диференційовна функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в це рівняння обертає його в тотожність:

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння n–го порядку (11.1.2) називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, де C_1, $C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі, яка задовольняє умови:

1) функція $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, є розв'язком цього рівняння для будь-яких значень $C_1, C_2, \dots, C_n$;

2) для будь-яких початкових умов

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (11.1.3)$$

існують єдині значення сталих $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ такі, що функція $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ є розв'язком цього рівняння і задовольняє початкові умови (11.1.3).

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ рівняння (11.1.2), який отримано зі загального розв'язку при конкретних значеннях

сталих $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$, називається ***частинним розв'язком***.

Розв'язок диференціального рівняння (11.1.2), записаний у вигляді $\Phi(x, y,\ C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ або $\Phi(x, y,\ C_1^0,\ C_2^0, \dots, C_n^0) = 0$, називається ***загальним або частинним інтегралом*** відповідно.

Графік будь-якого розв'язку диференціального рівняння n–го порядку називається ***інтегральною кривою***.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (11.1.2) зображує множину інтегральних кривих; частинний розв'язок – одну інтегральну криву цієї множини.

Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння (11.1.2), який задовольняє задані початкові умови (11.1.3), називається ***задачею Коші.***

Теорема Коші (*існування та єдності розв'язку*).

Якщо в диференціальному рівнянні (11.1.2) функція $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ та її частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ неперервні в деякій області D зміни змінних $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то для будь-якої точки $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови (11.1.3).

Геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, що при виконанні умов теореми існує єдина інтегральна крива, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має в цій точці дотичну зі заданим кутовим коефіцієнтом $y'(x_0) = y_0'$.

11.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

Розв'язування деяких диференціальних рівнянь вищих порядків можна звести до розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку за допомогою певної заміни змінних. Розглянемо деякі типи таких рівнянь, які допускають зниження порядку.

1. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x), \tag{11.2.1}$$

яке містить тільки похідну n-го порядку і незалежну змінну x, розв'язуються послідовним n-кратним інтегруванням.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (11.2.1). Для цього помножимо обидві частини цього рівняння на dx та, зінтегрувавши

$$\int y^{(n)}dx = \int f(x)dx,$$

отримаємо

$$y^{(n-1)} = \varphi_1(x) + C_1,$$

де $\varphi_1(x)$ – первісна, C_1 – довільна стала інтегрування. В результаті порядок отриманого диференціального рівняння знизився на одиницю.

Провівши аналогічні дії з отриманим рівнянням, можемо ще раз знизити його порядок на одиницю:

$$\int y^{(n-1)}dx = \int \varphi_1(x)dx + \int C_1 dx,$$

звідки

$$y^{(n-2)} = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2,$$

де $\varphi_2(x)$ – первісна, C_1, C_2 – довільні сталі інтегрування.

Повторюючи цей процес інтегрування n разів, отримаємо загальний розв'язок рівняння (11.2.1):

$$y = \varphi_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \cdots + C_{n-1}x + C_n.$$

Зауваження. Отриману формулу запам'ятовувати не потрібно, необхідно запам'ятати сам метод пониження порядку похідної.

2. Диференціальне рівняння другого порядку вигляду

$$y'' = f(x, y') \quad \text{або} \quad F(x, y', y'') = 0 \qquad (11.2.2)$$

яке ***явно не містить шуканої функції y***.

Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою заміни:

$$y' = p(x),$$

де $p = p(x)$ – нова невідома функція. Тоді

$$y'' = p'(x)$$

і рівняння (11.2.2) стає диференціальним рівнянням першого порядку відносно нової змінної $p(x)$ вигляду

$$F(x, p, p') = 0. \qquad (11.2.3)$$

Знайшовши для рівняння (11.2.3) загальний розв'язок $p = \varphi(x, C_1)$, повертаємось до функції y, зробивши обернену заміну

$$p = y'.$$

В результаті знову отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції y, вигляду (11.2.1):

$$y' = \varphi(x, C_1),$$

яке інтегрується і дає загальний розв'язок рівняння (11.2.3)

$$y = \int \varphi(x, C_1)\, dx + C_2.$$

Зауваження.

1) Частинним випадком рівняння (11.2.2) є рівняння вигляду

$$y'' = f(y'), \qquad (11.2.4)$$

яке також ***не містить явно шуканої функції y та незалежної змінної x.***

Метод його розв'язування такий самий, за допомогою заміни

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'(x).$$

Тоді рівняння (11.2.4) приймає вигляд рівняння з відокремлюваними змінними:

$$p' = f(p).$$

2) Узагальненням рівняння (11.2.2) є рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad (11.2.5)$$

яке ***явно не містить шуканої функції y та її похідних до*** $(k-1)$***-го порядку*** включно.

Його порядок може бути знижений на k одиниць до $(n-k)$-го порядку заміною змінної

$$y^{(k)} = p(x),\ y^{(k+1)} = p'(x),\ y^{(k+2)} = p''(x),\ \dots,\ y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$$

і рівняння (11.2.5) набуває вигляду

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0,$$

Зокрема, порядок рівняння вигляду

$$F(x, y^{(n-1)},\ y^{(n)}) = 0, \qquad (11.2.6)$$

що містить дві послідовні похідні, знижується заміною $y^{(n-1)} = p(x)$, і рівняння (11.2.6) приймає вигляд

$$F(x, p, p') = 0.$$

Якщо для цього рівняння вдається знайти загальний розв'язок $p = p(x, C_1)$, то приходимо до рівняння $y^{(n-1)} = p(x, C_1)$ вигляду (11.2.1), після інтегрування якого отримаємо загальний розв'язок рівняння (11.2.6).

3. *Диференціальне рівняння другого порядку вигляду*

$$y'' = f(y, y') \quad \text{або} \quad F(y, y', y'') = 0 \qquad (11.2.7)$$

яке ***явно не містить незалежної змінної x***.

Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою заміни:

$$y' = p(y),$$

де $p = p(y)$ – нова невідома функція. Тоді

$$y'' = p'(y) \cdot y'(x) = p'p$$

і рівняння (11.2.7) стає диференціальним рівнянням першого порядку відносно нової змінної $p(y)$ вигляду

$$F(y, p, p') = 0. \qquad (11.2.8)$$

Загальний розв'язок рівняння (11.2.8) буде мати вигляд $p = \varphi(y, C_1)$. Повертаємось до функції y, зробивши обернену заміну

$$p = y'.$$

В результаті знову отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції y, вигляду:

$$y' = \varphi(y, C_1),$$

яке інтегрується і дає загальний розв'язок рівняння (11.2.7):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Зауваження.

1) Частинним випадком рівняння (11.2.7) є рівняння вигляду

$$y'' = f(y), \qquad (11.2.9)$$

яке також ***не містить явно незалежну змінну x та похідну функції y'***.

Метод його розв'язування такий самий, за допомогою заміни

$$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'p.$$

Тоді рівняння (11.2.9) набуває вигляду рівняння з відокремлюваними змінними:

$$p'p = f(y).$$

2) Узагальненням рівняння (11.2.7) є рівняння вигляду

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (11.2.10)$$

яке ***явно не містить незалежну змінну x*** **.**

Його порядок можна знизити на одиницю, поклавши

$$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'_y p,$$

$$y''' = \left(p'_y p\right)'_x = \left(p'_y p\right)'_x \cdot y'_x = \left(p''_y p + p'_y p'_y p\right)p = p''_y p^2 + \left(p'_y\right)^2 p^2, \dots,$$

і рівняння (11.2.10) приймає вигляд

$$F\left(y, p, p'p, p''_y p^2 + \left(p'_y\right)^2 p^2, \dots\right) = 0.$$

11.3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Загальні означення та поняття

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \qquad (11.3.1)$$

Вважатимемо, що функції $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ і права частина $f(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b).

Функції $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ називаються ***коефіцієнтами рівняння***.

Якщо в рівнянні (11.3.1) права частина $f(x)$ тотожно рівна нулю на інтервалі (a, b), то рівняння називають ***лінійним однорідним***, що відповідає рівнянню (11.3.1). Воно має вигляд

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \qquad (11.3.2)$$

Якщо функція $f(x)$ тотожно відмінна від нуля на інтервалі (a, b), то рівняння (11.3.1) називають ***лінійним неоднорідним.***

Якщо функція $y_1(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння (11.3.2), то і $C_1 y_1(x)$ – добуток її на довільну сталу величину C_1 – також є розв'язком цього рівняння.

Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння (11.3.2), то і їх сума $y_1(x) + y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння.

Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ є розв'язками рівняння (11.3.2), то й функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n\, y_n(x) \qquad (11.3.3)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння. Функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називаються ***частковими розв'язками*** рівняння (11.3.2).

Дві функції $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ називаються ***лінійно незалежними*** на інтервалі (a, b), якщо рівність

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0, \quad \text{де } \alpha_1, \alpha_2 \in R, \tag{11.3.4}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Якщо хоча б одне з чисел α_1 або α_2 відмінні від нуля і виконується рівність (11.3.4), то функції y_1 та y_2 називаються ***лінійно залежними на інтервалі*** (a, b).

Очевидно, що дві функції y_1 та y_2 ***лінійно залежні*** тоді і тільки тоді, коли вони пропорційні, тобто виконується рівність

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda \quad \text{або} \quad y_1 = \lambda y_2, \quad \text{де } \lambda = const.$$

Більш універсальним засобом вивчення лінійної залежності системи функцій є так званий визначник Вронського, або вронскіан.

Визначником Вронського системи двох функцій $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ називається визначник 2-го порядку

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Для того щоб система розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійного однорідного рівняння (11.3.2) була лінійно незалежною на інтервалі (a, b), необхідно і достатньо, щоб вронскіан на цьому інтервалі був відмінний від нуля.

Сукупність будь-яких двох лінійно незалежних на інтервалі (a, b) частинних розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійного однорідного рівняння (11.3.2) утворює ***фундаментальну систему*** розв'язків цього рівняння. Тобто будь-який довільний розв'язок може бути поданий лінійною комбінацією лінійно незалежних (фундаментальних) розв'язків:

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x).$$

Теорема *(про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку)*. Якщо два частинні розв'язки $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку (11.3.2) утворюють на інтервалі

(a, b) фундаментальну систему, то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{11.3.4}$$

де $C_1,\ C_2$ – довільні сталі.

Тобто для знаходження загального розв'язку рівняння (11.3.2) достатньо знайти два лінійно незалежні розв'язки цього рівняння, які утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Функції $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ називаються ***лінійно незалежними*** на інтервалі (a, b), якщо рівність

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

виконується тоді і тільки тоді, коли всі числа $\alpha_i = 0$ $(i = 1,2, \dots, n)$. У протилежному випадку, якщо хоча б одне з чисел $\alpha_i \neq 0$, функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ називаються ***лінійно залежними***.

Визначник Вронського системи функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$ має вигляд

$$W(y_i) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Для того щоб система розв'язків $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійного однорідного рівняння (11.3.2) була лінійно незалежною на інтервалі (a, b), необхідно і достатньо, щоб вронскіан на цьому інтервалі був відмінний від нуля. Таким чином, щоб перевірити лінійну незалежність функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, потрібно скласти їх визначник Вронського $W(y_i)$ і обчислити.

Сукупність n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1, y_2, \dots, y_n$ рівняння (11.3.2) утворює фундаментальну систему розв'язків на інтервалі (a, b).

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (11.3.2) має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \tag{11.3.5}$$

де C_i $(i = 1,2, \dots, n)$ – довільні сталі, y_i – частинні розв'язки рівняння (11.3.2), які утворюють фундаментальну систему.

Формула (11.3.5) визначає структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (11.3.2) порядку n і вказує спосіб побудови загального розв'язку.

Таким чином, щоб знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння, потрібно знайти n його часткових лінійно незалежних (a, b) розв'язків, кожний з них помножити на довільну сталу величину і всі ці добутки додати.

Система лінійно незалежних розв'язків рівняння (11.3.2) називається ***фундаментальною***.

Якщо відомий частковий розв'язок $y_1(x)$ лінійного однорідного рівняння (11.3.2), то його порядок можна понизити на одиницю за допомогою підстановки

$$y = y_1 \int u dx, \tag{11.3.6}$$

де $u = u(x)$ – нова шукана функція.

Отримане в результаті підстановки (11.3.6) рівняння також буде лінійним.

Якщо $y_1(x)$ – частковий розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{11.3.7}$$

то другий його частковий розв'язок, лінійно незалежний з першим, знаходиться за формулою

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx. \tag{11.3.8}$$

Отже, для відшукання загального розв'язку лінійного однорідного рівняння другого порядку достатньо знати один його частковий розв'язок.

11.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням n–го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції $y = y(x)$ та її похідних $y', y'', \dots, y^{(n)}$:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots . + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{11.4.1}$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots . , a_{n-1}, a_n$ – дійсні числа (деякі з них можуть дорівнювати нулю).

Розглянемо ***лінійне однорідне диференціальне рівняння 2–го порядку зі сталими коефіцієнтами*** вигляду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (11.4.2)$$

Частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння шукають у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \qquad (11.4.3)$$

де λ – стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти.

Тоді

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Підставляючи значення y, y' і y'' в рівняння (11.4.2), отримаємо:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, маємо

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \qquad (11.4.4)$$

Рівняння (11.4.4) називається ***характеристичним рівнянням для лінійного однорідного рівняння*** (11.4.2).

Для його складання достатньо в рівнянні (11.4.2) зробити заміну:

$$y = 1, \qquad y' = \lambda, \qquad y'' = \lambda^2. \qquad (11.4.5)$$

Залежно від коренів характеристичного рівняння (11.4.4) можливі такі розв'язки рівняння (11.4.2):

1. Корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння (11.4.4) *дійсні й різні (прості)*, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$.

У цьому випадку частинними розв'язками рівняння (11.4.2) є функції

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{і} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків на довільному проміжку числової осі, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq const.$$

Можна також показати, що визначник Вронського для цих функцій відмінний від нуля. Дійсно,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x} \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} =$$
$$= \lambda_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Тому загальний розв'язок рівняння (11.4.2), згідно з формулою (11.3.4), має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \qquad (11.4.6)$$

2. Корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння (11.4.4) *дійсні й рівні (кратні)*, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in R$.

У цьому випадку лінійно незалежними частинними розв'язками рівняння (11.4.2) будуть функції

$$y_1 = e^{\lambda x} \quad \text{і} \quad y_2 = xe^{\lambda x},$$

оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq const.$$

Також нескладно переконатися, що вронскіан для цих функцій відмінний від нуля. Тобто вони утворюють фундаментальну систему розв'язків, і тому загальний розв'язок рівняння (11.4.2) має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \qquad (11.4.7)$$

3. Корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння (11.4.4) *комплексно-спряжені*, тобто

$$\lambda_1 = a + bi, \qquad \lambda_1 = a - bi, \qquad b \neq 0.$$

У цьому випадку частинні лінійно незалежні розв'язки мають вигляд

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \qquad y_2 = e^{ax}\sin bx,$$

оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{ax}\cos bx}{e^{ax}\sin bx} = ctg\ bx \neq const \text{ або } W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (11.4.2):

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \qquad (11.4.8)$$

Зауваження.

Розглянутий вище метод знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (11.4.2) зводиться до знаходження коренів характеристичного рівняння (11.4.4) та використання формул (11.4.6) – (11.4.8) без його інтегрування.

Розглянутий вище метод побудови загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами можна поширити і на рівняння n–го порядку вигляду (11.4.1).

Нехай маємо рівняння n–го порядку вигляду (11.4.1):

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння (11.4.1) також шукають у вигляді

$$y = e^{\lambda x},$$

де λ – стала, яку треба знайти.

Характеристичним рівнянням для рівняння (11.4.1) є алгебраїчне рівняння n–го степеня вигляду

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \qquad (11.4.9)$$

Рівняння (11.4.9), як відомо, має n коренів (серед них можуть бути і комплексні). Позначимо ці корені через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ і розглянемо випадки.

1. Всі корені λ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ характеристичного рівняння (11.4.9) *дійсні й різні (прості)*.

Тоді функції

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad y_n = e^{\lambda_n x}$$

є частинними розв'язками рівняння (11.4.1) і утворюють фундаментальну систему розв'язків. Тому загальний розв'язок рівняння (11.4.1) записують у вигляді

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}. \qquad (11.4.10)$$

2. Всі корені λ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ характеристичного рівняння (11.4.9) *дійсні, але деякі з них кратні* (кратності $k > 1$).

Тоді кожному простому кореню λ відповідає один частинний розв'язок вигляду $e^{\lambda x}$, а кожному кореню λ кратності $k > 1$ відповідає k частинних розв'язків вигляду:

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad x^{k-1} e^{\lambda x}. \qquad (11.4.11)$$

3. Серед коренів характеристичного рівняння (11.4.9) є *комплексно-спряжені*. Тоді кожній парі $a \pm bi$ простих комплексно-спряжених коренів відповідають два частинні розв'язки:

$$e^{ax} \cos bx \quad \text{і} \quad e^{ax} \sin bx,$$

а кожній парі $a \pm bi$ комплексно-спряжених коренів кратності $k > 1$ відповідає $2k$ частинних розв'язків вигляду:

$$e^{ax}\cos bx\,, xe^{ax}\cos bx\,, \dots, x^{k-1}\,e^{ax}\cos bx\,;$$
$$e^{ax}\sin bx\,, xe^{ax}\sin bx\,, \dots, x^{k-1}\,e^{ax}\sin bx.$$

Позначимо ці частинні розв'язки через $y_1, y_2, \dots, y_n$. Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків, і загальний розв'язок рівняння (11.4.1) знаходимо за формулою (11.3.5).

11.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n–го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots . + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{11.5.1}$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ – дійсні числа, а $f(x) \neq 0$ – задана функція, неперервна на деякому проміжку (a, b).

Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{11.5.2}$$

ліва частина якого збігається з лівою частиною лінійного неоднорідного рівняння (11.5.1), а права $f(x) = 0$, називається ***лінійним однорідним диференціальним рівнянням***, відповідним даному неоднорідному рівнянню (11.5.1).

Теорема *(про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння).* Загальний розв'язок $y_{зн}$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння (11.5.1) дорівнює сумі загального розв'язку $y_{зо}$ відповідного однорідного рівняння (11.5.2) і деякого частинного розв'язку $y_{чн}$ рівняння (11.5.1), тобто

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}. \tag{11.5.3}$$

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (11.5.4)$$

Тоді відповідне йому однорідне рівняння має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (11.5.5)$$

Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, загальний розв'язок рівняння (11.5.4) визначається формулою (11.5.3), в якій

$$y_{зо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (11.5.6)$$

– загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння 2-го порядку (11.5.2), а $y_{чн}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.5.4).

Будемо шукати *загальний розв'язок* неоднорідного рівняння (11.5.4) у такому ж вигляді, замінивши у формулі (11.5.6) сталі C_1 і C_2 невідомими функціями від x, які слід підібрати так, щоб функція

$$y_{зн} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \qquad (11.5.7)$$

задовольняла неоднорідне рівняння (11.5.4), тобто була його розв'язком.

Функція (11.5.7) буде розв'язком рівняння (11.5.4), коли $C_1(x), C_2(x)$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases} \qquad (11.5.8)$$

Система (11.5.8) є лінійною неоднорідною системою рівнянь відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Визначник цієї системи $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю, оскільки це визначник Вронського $W(y_1, y_2)$ для системи лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ однорідного рівняння (11.5.5). Отже, система (11.5.8) має єдиний розв'язок (сумісна), що може бути знайдений за формулами Крамера або будь-яким іншим способом:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}; \qquad C_2'(x) = \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}.$$

Інтегруючи ці функції, знаходимо:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + \overline{C_1}; \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + \overline{C_2},$$

де $\overline{C_1}$ і $\overline{C_2}$ – довільні сталі інтегрування.

Підставляючи значення функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в рівняння (11.5.7), отримаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (11.5.4):

$$y_{\text{зн}} = \overline{C_1}y_1(x) + \overline{C_2}(x)y_2(x) - \int \frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(y_1,y_2)}dx \cdot \\ \cdot y_1(x) + \int \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(y_1,y_2)}dx \cdot y_2(x) \tag{11.5.9}$$

Розв'язок (11.5.9) задовольняє теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, тобто має вигляд

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}},$$

де $y_{\text{зо}} = \overline{C_1}y_1(x) + \overline{C_2}y_2(x)$ – загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (11.5.5) і

$$y_{\text{чн}} = -\int \frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(y_1,y_2)}dx \cdot y_1(x) + \int \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(y_1,y_2)}dx \cdot y_2(x) -$$

частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (11.5.4).

Зауваження.

Метод варіації довільних сталих може бути застосований і до розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь вищих порядків. Для рівняння n–го порядку невідомі функції $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ знаходяться зі системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Визначник цієї системи – вронскіан $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ має вигляд:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

11.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Метод підбору частинного розв'язку

Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{11.6.1}$$

в якому права частина

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \tag{11.6.2}$$

коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \alpha, \beta$ – дійсні числа, а $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени від x степеня n і m відповідно, називається ***лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n–го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.***

Розв'язок рівняння (11.6.1) можна шукати методом варіації довільних сталих, але при його застосуванні доволі часто доводиться виконувати складні, громіздкі операції під час інтегрування. Проте для рівнянь зі спеціальною правою частиною існує свій більш простіший метод, який називається ***методом підбору частинного розв'язку або методом невизначених коефіцієнтів***. Суть методу полягає в такому: по вигляду правої частини $f(x)$ рівняння (11.6.1) записують очікувану форму його частинного розв'язку з невизначеними коефіцієнтами, потім підставляють її в рівняння (11.6.1) та з отриманої тотожності знаходять значення невідомих коефіцієнтів.

Нехай права частина рівняння (11.6.1) має спеціальний вигляд (11.6.2). Тоді частинний розв'язок цього рівняння слід шукати у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x}\left(\widetilde{P_l}(x)\cos\beta x + \widetilde{Q_l}(x)\sin\beta x\right), \tag{11.6.3}$$

де r дорівнює кратності кореня λ характеристичного рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{11.6.4}$$

що збігається з числом $\alpha + \beta i$, тобто r – число, яке показує скільки разів $\alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння (якщо характеристичне рівняння такого кореня не має, то слід покласти $r = 0$); $\widetilde{P_l}(x)$ і $\widetilde{Q_l}$ – повні многочлени від x з невизначеними коефіцієнтами

степеня l, що дорівнює найбільшому з чисел n і m, тобто $l = \max\{n, m\}$; числа α і β у формулах (11.6.2) і (11.6.3) ті самі.

Зауваження 1. Многочлени $\widetilde{P_l}(x)$ і $\widetilde{Q_l}$ мають бути повними, тобто містити всі степені x від нуля до l, з різними невизначеними коефіцієнтами при однакових степенях x в обох многочленах.

Зауваження 2. Якщо у вираз функції (11.6.2) входить хоча б одна з функцій $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$, то у вираз $y_{\text{чн}}$ (11.6.3) треба завжди записувати обидві функції.

Розглянемо деякі частинні випадки функції (11.6.2) в рівняннях (11.6.1), до яких можна застосувати метод підбору частинного розв'язку, і вкажемо форму, в якій потрібно шукати частинний розв'язок цього рівняння залежно від вигляду його правої частини.

Випадок 1. Нехай права частина неоднорідного рівняння (11.6.1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x),$$

тобто у виразі функції (11.6.2) $\alpha = 0$ і $\beta = 0$, а $P_n(x)$ – многочлен степеня *n*. Тоді:

а) якщо $\alpha + \beta i = 0 \neq \lambda$, тобто $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння (11.6.4) ($r = 0$), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.6.1) шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = \widetilde{P_n}(x).$$

б) якщо $\alpha + \beta i = 0 = \lambda_{1,2,\dots,r}$, тобто $\lambda = 0$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (11.6.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.6.1) шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r \widetilde{P_n}(x).$$

Тут $\widetilde{P_n}(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n$ – повний многочлен степеня n (тобто того самого степеня, що і заданий) з невизначеними коефіцієнтами.

Щоб знайти невизначені коефіцієнти $A_0, A_1, \dots, A_n$, необхідно знайти вирази $y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}, \dots, y^{(n)}_{\text{чн}}$ і підставити їх разом із функцією $y_{\text{чн}}$ в неоднорідне рівняння (11.6.1), зрівняти коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, в результаті чого отримати систему $(n+1)$-го лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A_0, A_1, \dots, A_n$ многочлена $\widetilde{P_n}(x)$.

Випадок 2. Нехай права частина неоднорідного рівняння (11.6.1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x},$$

тобто $\alpha \neq 0$ – дійсне число, $\beta = 0$, $P_n(x)$ – многочлен степеня n. Тоді:

а) якщо $\alpha + \beta i = \alpha \neq \lambda$, тобто $\lambda = \alpha$ не є коренем характеристичного рівняння (11.6.4) ($r = 0$), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.6.1) шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = \widetilde{P_n}(x)e^{\alpha x}.$$

б) якщо $\alpha + \beta i = \alpha = \lambda_{1,2,\dots,r}$, тобто $\lambda = \alpha$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (11.6.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.6.1) шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r\widetilde{P_n}(x)e^{\alpha x},$$

де $\widetilde{P_n}(x)$ – повний многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами. Щоб знайти невизначені коефіцієнти $A_0, A_1, \dots, A_n$, необхідно знайти вирази $y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}, \dots, y^{(n)}_{\text{чн}}$ і підставити їх разом із функцією $y_{\text{чн}}$ в неоднорідне рівняння (11.6.1), зрівняти коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, в результаті чого отримати систему $(n+1)$-го лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A_0, A_1, \dots, A_n$ многочлена $\widetilde{P_n}(x)$.

Випадок 3. Нехай права частина рівняння (11.6.1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x,$$

тобто $\alpha = 0, \beta \neq 0$ – дійсне число, $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлен степеня n і m відповідно. Тоді:

а) якщо $\alpha + \beta i = \beta i \neq \lambda$, тобто $\lambda = \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння (11.6.4) ($r = 0$), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.6.1) шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = \widetilde{P_l}(x)\cos\beta x + \widetilde{Q_l}(x)\sin\beta x.$$

б) якщо $\alpha + \beta i = \beta i = \lambda_{1,2,\dots,r}$, тобто $\lambda = \beta i$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (11.6.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.6.1) шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r\left(\widetilde{P_l}(x)\cos\beta x + \widetilde{Q_l}(x)\sin\beta x\right),$$

де $\widetilde{P_l}(x) = A_0x^l + A_1x^{l-1} + \dots + A_l$, $\widetilde{Q_l}(x) = B_0x^l + B_1x^{l-1} + \dots + B_l$ – повні многочлени степеня $l = max\{n, m\}$ з невизначеними коефіцієнтами.

Щоб знайти невизначені коефіцієнти $A_0, A_1, \dots, A_l,\ B_0, B_1, \dots, B_l$ необхідно знайти вирази $y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}, \dots, y^{(n)}_{\text{чн}}$ і підставити їх разом із функцією $y_{\text{чн}}$ в неоднорідне рівняння (11.6.1). Після цього слід прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x і однакових тригонометричних функціях $\cos\beta x$ та $\sin\beta x$ в обох частинах рівності. У результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A_0, A_1, \dots, A_l$, $B_0, B_1, \dots, B_l$ многочленів $\widetilde{P_l}(x),\ \widetilde{Q_l}(x)$.

Випадок 4. Нехай права частина рівняння (11.6.1) має загальний вигляд спеціальної правої частини (11.6.2)

$$f\ (x) = e^{\alpha x}\ (P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

тобто $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ – дійсні числа, $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлен степеня n і m відповідно. Тоді:

а) якщо $\alpha + \beta i \neq \lambda$, тобто $\lambda = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння (11.6.4) $(r = 0)$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.6.1) шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}\left(\widetilde{P_l}(x)\cos\beta x + \widetilde{Q_l}(x)\sin\beta x\right).$$

б) якщо $\alpha + \beta i = \lambda_{1,2,\dots,r}$, тобто $\lambda = \alpha + \beta i$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (11.6.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.6.1) шукаємо у вигляді (11.6.3)

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x}\left(\widetilde{P_l}(x)\cos\beta x + \widetilde{Q_l}(x)\sin\beta x\right),$$

де $\widetilde{P_l}(x) = A_0x^l + A_1x^{l-1} + \cdots + A_l,\ \widetilde{Q_l}(x) = B_0x^l + B_1x^{l-1} + \cdots + B_l$ – повні многочлени степеня $l = max\{n, m\}$ з невизначеними коефіцієнтами.

Щоб знайти невизначені коефіцієнти $A_0, A_1, \dots, A_l,\ B_0, B_1, \dots, B_l$, необхідно знайти вирази $y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}, \dots, y^{(n)}_{\text{чн}}$ і підставити їх разом із функцією $y_{\text{чн}}$ в неоднорідне рівняння (11.6.1). Після цього слід прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x і однакових тригонометричних функціях $\cos\beta x$ та $\sin\beta x$ в обох частинах рівності. У результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A_0, A_1, \dots, A_l$, $B_0, B_1, \dots, B_l$ многочленів $\widetilde{P_l}(x),\ \widetilde{Q_l}(x)$.

Зауваження 3. Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (11.6.1) дорівнює сумі декількох функцій спеціального вигляду (11.6.2), то знаходження частинного розв'язку такого рівняння робиться за допомогою теореми про накладання розв'язків. Сформулюємо її для випадку диференціального рівняння 2-го порядку.

Теорема *(про накладання розв'язків).* Якщо права частина рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

має вигляд суми двох функцій спеціального вигляду (11.6.2):

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

а функції $y_{1\text{чн}}(x)$ та $y_{2\text{чн}}(x)$ – частинні розв'язки рівнянь

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),$$
$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$$

відповідно, то функція $y_{\text{чн}}(x) = y_{1\text{чн}}(x) + y_{2\text{чн}}(x)$ буде частинним розв'язком даного рівняння.

11.7. Розв'язування прикладів та задач



1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(4)} = \sin 3x.$$

Розв'язання.

Дане диференціальне рівняння 4-го порядку вигляду

$y^{(n)} = f(x)$, коли $n = 4$.

Тому його загальний розв'язок знайдемо послідовним чотирикратним інтегруванням за змінною x:

$$\int y^{(4)}\,dx = \int \sin 3x\,dx \quad \Rightarrow \quad y''' = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1,$$

$$\int y'''\,dx = -\frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx + \int C_1 dx \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2,$$

$$\int y''\,dx = -\frac{1}{9}\int \sin 3x\,dx + \int C_1 x dx + \int C_2 dx \quad \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Останній раз зінтегрувавши

$$\int y'\,dx = \frac{1}{27}\int \cos 3x\,dx + \int C_1\frac{x^2}{2}dx + \int C_2 x\,dx + \int C_3\,dx,$$

отримаємо загальний розв'язок

$$y = \frac{1}{81}\sin 3x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

◊◊◊

2. Розв'язати задачу Коші при вказаних початкових умовах для рівняння

$$y''' = \frac{1}{x};\qquad y(1) = 1;\qquad y'(1) = 2;\qquad y''(1) = -2.$$

Розв'язання.

Дане диференціальне рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$ 3-го порядку, $n = 3$. Виконаємо тричі інтегрування функції $\frac{1}{x}$.

Перше інтегрування:

$$\int y'''\,dx = \int \frac{1}{x}dx;\qquad y'' = \ln|x| + C_1.$$

Друге інтегрування:

$$\int y''\,dx = \int (\ln|x| + C_1)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int y''\,dx = \int \ln|x|\,dx + \int C_1\,dx.$$

$$\int \ln|x|\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x;$$

Маємо:

$$y' = x\ln x - x + C_1 x + C_2.$$

Третє інтегрування:

$$\int y'\,dx = \int (x\ln x - x + C_1 x + C_2)\,dx \qquad \Rightarrow$$

$$\int y'\,dx = \int x\ln x\,dx - \int x\,dx + \int C_1 x\,dx + \int C_2 dx.$$

$$\int x\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x \\ dv = xdx \\ du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx =$$

$$= \tfrac{x^2}{2}\ln x - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{x^2}{2} = \tfrac{x^2}{2}\ln x - \tfrac{x^2}{4}.$$

Маємо:

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Для того щоб отримати частинний розв'язок, тобто розв'язати задачу Коші, треба знайти C_1, C_2та C_3, використовуючи початкові умови:

$$y'' = \ln|x| + C_1 \;\Rightarrow\; -2 = \ln 1 + C_1 \;\Rightarrow\; -2 = 0 + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = -2;$$

$$y' = x\ln x - x + C_1x + C_2 \;\Rightarrow\; 2 = 1\cdot\ln 1 - 1 - 2\cdot 1 + C_2 \;\Rightarrow$$

$$2 = 1\cdot 0 - 1 - 2 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 5;$$

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \;\Rightarrow$$

$$1 = \frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1^2}{4} - \frac{1^2}{2} + \frac{-2\cdot 1^2}{2} + 5\cdot 1 + C_3 \;\Rightarrow$$

$$1 = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 + 5 + C_3 \;\Rightarrow\; C_3 = -\frac{9}{4}.$$

Підставимо знайдені значення сталих у загальний розв'язок:

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{-2x^2}{2} + 5x - \frac{9}{4}$$

Таким чином,

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{7x^2}{4} + 5x - \frac{9}{4}$$

частинний розв'язок рівняння.



3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + \frac{2}{x}y' = x.$$

Розв'язання.

Дане диференціальне рівняння має вигляд

$$F(x, y', y'') = 0,$$

тобто не містить явно шуканої функції y.

Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою введення нової невідомої функції $p(x)$, зробивши заміну:

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'(x).$$

У результаті отримаємо диференціальне рівняння 1-го порядку відносно функції $p(x)$:

$$p' + \frac{2}{x}p = x.$$

Отримали лінійне неоднорідне рівняння 1-го порядку, яке можна розв'язати, наприклад, методом Бернуллі, поклавши

$$p = uv, \qquad p' = u'v + uv',$$

де $u = u(x), v = v(x)$.

Тоді маємо

$$u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = x \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = x.$$

Звідси складаємо систему рівнянь для функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{2}{x}v = 0, \\ u'v = x, \end{cases}$$

Інтегруючи перше рівняння, знайдемо:

$$v' + \frac{2}{x}v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x}v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{2}{x}dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -2\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x^2}.$$

З другого рівняння системи маємо

$$u'v = x \quad \Rightarrow \quad u' \cdot \frac{1}{x^2} = x \quad \Rightarrow \quad u' = x^3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = x^3 \quad \Rightarrow \quad du = x^3 dx \quad \Rightarrow$$

$$\int du = \int x^3\, dx \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x^4}{4} + C_1$$

Отже, функція $p(x)$ дорівнює:

$$p(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C_1\right)\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Повертаючись до змінної y, зробимо обернену заміну $p = y'$. Тоді маємо

$$y' = \frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Це рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними, але вже відносно функції $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{4}+\frac{C_1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad dy=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{C_1}{x^2}\right)dx \quad \Rightarrow \quad \int dy=\int\left(\frac{x^2}{4}+\frac{C_1}{x^2}\right)dx$$

Звідси отримаємо *загальний розв'язок* початкового рівняння 2-го порядку:

$$y=\frac{x^3}{12}-\frac{C_1}{x}+C_2.$$

Таким чином, розв'язування одного диференціального рівняння 2-го порядку звелося до інтегрування двох рівнянь 1-го порядку.

3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(4)}x=y'''.$$

Розв'язання.

Рівняння має вигляд

$$F(x,y^{(n-1)}, \qquad y^{(n)})=0,$$

тобто не містить явно шуканої функції y та її похідних до другого порядку включно.

Тому його порядок може бути знижений заміною $y'''=p(x)$. Тоді $y^{(4)}=p'(x)$ і задане рівняння зводиться до такого:

$$p'x=p.$$

Дане рівняння з відокремлюваними змінними:

$$p'=\frac{p}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx}=\frac{p}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|p|=\ln|x|+\ln C_1.$$

Потенціюючи, одержимо

$$p=C_1x.$$

Повертаючись до змінної y, зробимо обернену заміну $p=y'''$, маємо рівняння вигляду (11.2.1)

$$y'''=C_1x.$$

Тоді внаслідок трьох послідовних інтегрувань, отримаємо *загальний розв'язок* початкового рівняння 4-го порядку:

$$\int y'''\,dx = \int C_1 x\,dx \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2,$$

$$\int y''\,dx = \int \frac{C_1 x^2}{2}dx + \int C_2\,dx \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

$$\int y'\,dx = \int \frac{C_1 x^3}{6}dx + \int C_2 x\,dx + \int C_3\,dx \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{C_1 x^4}{24} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

або

$$y = \overline{C_1} x^4 + \overline{C_2} x^2 + C_3 x + C_4,$$

де

$$\overline{C_1} = \frac{C_1}{24}, \qquad \overline{C_2} = \frac{C_2}{2}.$$



4. Розв'язати задачу Коші:

$$y''ctg\,x + y' = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2.$$

Розв'язання.

Дане диференціальне рівняння має вигляд

$$F(x, y', y'') = 0,$$

тобто не містить явно шуканої функції y.

Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою уведення нової невідомої функції $p(x)$, зробивши заміну:

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'(x).$$

У результаті отримаємо диференціальне рівняння 1-го порядку відносно функції $p(x)$:

$$p'ctg\,x + p = 2,$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та знайдемо отримані інтеграли:

$$p'ctg\,x = 2 - p \quad \Rightarrow \quad p' = \frac{2-p}{ctg\,x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \frac{2-p}{ctg\,x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{2-p} = \frac{dx}{ctg\,x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{2-p} = \int \frac{dx}{ctg\,x} \quad \Rightarrow$$

$$-\ln|2-p| = -\ln|\cos x| - C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|2-p| = \ln|\cos x| + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$2 - p = C_1 \cos x \quad \Rightarrow \quad p = 2 - C_1 \cos x.$$

Повертаючись до змінної y, зробимо обернену заміну $p = y'$. Тоді маємо

$$y' = 2 - C_1 \cos x \quad \Rightarrow \quad y = \int (2 - C_1 \cos x)\, dx \quad \Rightarrow$$
$$y = 2x - C_1 \sin x + C_2.$$

Це є загальний розв'язок цього диференціального рівняння.

Використаємо початкові умови та знайдемо значення сталих:

$$y' = 2 - C_1 \cos x \quad \Rightarrow \quad -2 = 2 - C_1 \cos 0 \quad \Rightarrow$$
$$-2 = 2 - C_1 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad -4 = -C_1 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 4.$$

$$y = 2x - C_1 \sin x + C_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \cdot 0 - 4 \sin 0 + C_2 \quad \Rightarrow$$
$$0 = 0 - 4 \cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Тоді

$$y = 2x - 4 \cdot \sin x + 0.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = 2x - 4 \sin x.$$



5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' ctgy = (y')^2.$$

Розв'язання.

Задане диференціальне рівняння має вигляд

$$F(y, y', y'') = 0,$$

тобто не містить явно незалежної змінної x. Рівняння такого типу допускає зниження порядку за допомогою уведення нової невідомої функції $p(y)$, аргументом якої є сама шукана функція $y(x)$. Тобто зробимо заміну:

$$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'p.$$

У результаті задане рівняння зводиться до диференціального рівняння 1-го порядку відносно функції $p(y)$:

$$p'pctgy = p^2 \quad \Rightarrow \quad p'ctgy = p \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy} = \frac{p}{ctgy} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{ctgy}.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуючи його, знайдемо

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{ctgy} \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = -\ln|\cos y| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad p = \frac{C_1}{\cos y}.$$

Враховуючи, що $p(y) = y'$, отримаємо рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно шуканої функції $y(x)$:

$$y' = \frac{C_1}{\cos y}.$$

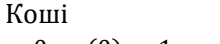
Інтегруючи це рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\cos y} \quad \Rightarrow \quad \cos y dy = C_1 dx \quad \Rightarrow \quad \int \cos y dy = C_1 \int dx$$

$$\sin y = C_1 x + C_2.$$

знайдемо *загальний розв'язок* вихідного рівняння:

$$y = \arcsin(C_1 x + C_2).$$



6. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + y - 1 = 0, \;\; y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

Розв'язання.

Тут маємо випадок рівняння вигляду $y'' = f(y)$ (11.2.9), тобто рівняння не містить явно незалежної змінної x. Знизити його порядок можна за допомогою заміни:

$$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'p.$$

У результаті маємо рівняння 1-го порядку відносно функції $p(y)$:

$$p'p + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p'p = 1 - y.$$

Відокремлюємо змінні і виконуємо інтегрування:

$$\frac{dp}{dy} p = 1 - y \quad \Rightarrow \quad pdp = (1 - y)dy \quad \Rightarrow \quad \int pdp = \int (1 - y)dy$$

$$\frac{p^2}{2} = y - \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2y - y^2 + C_1.$$

Отже функція $p(y)$ визначається виразом:

$$p(y) = \pm\sqrt{2y - y^2 + C_1}.$$

Повертаючись до функції $y(x)$, робимо обернену заміну $p(y) = y'$. Маємо

$$y' = \pm\sqrt{2y - y^2 + C_1}$$

На цьому етапі можна визначити довільну сталу C_1, використовуючи початкові умови. Оскільки $y = 1$ і $y' = 1$ при $x = 0$, то

$$1 = \pm\sqrt{2 - 1 + C_1} \quad \Rightarrow \quad 1 = \pm\sqrt{1 + C_1},$$

звідки випливає, що $C_1 = 0$. Зауважимо, оскільки $y'(0) > 0$, то перед коренем потрібно брати знак «+». Таким чином, знову маємо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними, але вже відносно шуканої функції $y(x)$:

$$y' = \sqrt{2y - y^2}.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2y - y^2}} dy = \int dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (y-1)^2}} = x + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\arcsin(y - 1) = x + C_2.$$

Знову, звертаючись до початкових умов, визначимо сталу C_2. Враховуючи, що $y = 1$ при $x = 0$, то

$$\arcsin(1 - 1) = 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

В результаті маємо *розв'язок задачі Коші*:

$$\arcsin(y - 1) = x \quad \Rightarrow \quad y - 1 = \sin x$$

або

$$y = \sin x + 1.$$



7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0,$$

якщо відомо, що його частковий розв'язок

$$y_1 = x.$$

Знайти частковий розв'язок при початкових умовах $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

Розв'язання.

Це рівняння – лінійне однорідне рівняння другого порядку. Передусім зведемо рівняння до виду (11.3.7), в якому коефіцієнт при y'' дорівнює одиниці. Отримуємо

$$y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{y}{x-1} = 0.$$

Тут коефіцієнт при y' – функція $p_1(x) = x - 1$. Обчислимо передусім інтеграл $-\int p_1(x)\, dx$, що входить у формулу (11.3.8):

$-\int p_1(x)\, dx = -\int \frac{-x}{x-1} dx = \int \frac{x}{x-1} dx = \int \frac{x-1+1}{x-1} dx = \int \frac{x-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-1} dx =$

$= \int 1\, dx + \int \frac{1}{x-1} dx = x + \ln|x - 1|.$

(довільну сталу вводити не потрібно, тому що надалі вона об'єднується з довільною сталою, яка вводиться при побудові загального розв'язку).

Тепер вираз, який входить у (11.3.8),

$$e^{-\int p_1(x)dx} = e^{x+\ln|x-1|} = e^x e^{\ln|x-1|} = (x-1)e^x,$$

а формула (11.3.8) дає

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx = x\int \frac{(x-1)e^x}{x^2}dx = x\left(\int \frac{xe^x}{x^2}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx\right)$$

$$= x\left(\int \frac{e^x}{x}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx\right) = \left|\begin{matrix} u = \frac{1}{x} \\ dv = e^x dx \\ du = -\frac{1}{x^2}dx \\ v = e^x \end{matrix}\right|$$

$$= x\left(\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx\right) = x\cdot\frac{e^x}{x} = e^x.$$

Отже, $y_2(x) = e^x$. Перемножуючи y_1 на C_1, y_2 на C_2 і додаючи добутки, матимемо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = C_1 x + C_2 e^x.$$

Щоб знайти частковий розв'язок, який задовольняє початкові умови, потрібно початкові умови підставити в систему рівнянь, яка складається з загального розв'язку і його похідних до порядку $(n-1)$ включно; визначити з цієї системи довільні сталі і підставити їх значення в знайдений загальний розв'язок. Отриманий вираз і буде шуканим розв'язком.

Диференціюючи знайдений загальний розв'язок один раз, одержуємо

$$y' = C_1 + C_2 e^x.$$

Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2 e^x; \\ y' = C_1 + C_2 e^x, \end{cases}$$

підставляємо в неї початкові умови: $y(0) = 1;\ y'(0) = 2;$

$$\begin{cases} 1 = C_1 \cdot 0 + C_2 e^0; \\ 2 = C_1 + C_2 e^0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 = C_2; \\ 2 = C_1 + C_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 1.$$

Шуканий частковий розв'язок $y = x + e^x$.

◊◊◊

8. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 5y' - 6y = 0.$$

Розв'язання.

Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду (11.4.2).

Складемо для нього характеристичне рівняння. Для цього замінимо в рівнянні функцію y та її похідні y', y'' відповідними степенями λ:

$$y'' = \lambda^2, \qquad y' = \lambda, \qquad y = 1.$$

Тоді маємо

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0.$$

Знаходимо його корені: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -6.$

Оскільки корені характеристичного рівняння *дійсні й різні*

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \ \in R,$$

то має місце випадок 1 (п. 11.4).

$$y_1 = e^{1\cdot x} = e^x, \qquad y_2 = e^{-6x}.$$

Тоді, згідно з формулою (11.4.6), загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}.$$

◊◊◊

9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Розв'язання.

Задано лінійне однорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду (11.4.2).

Складемо його характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0;$$

$$(\lambda + 3)^2 = 0.$$

Як бачимо, корені характеристичного рівняння дійсні й кратні

$$\lambda_{1,2} = -3 \ \in R,$$

тобто має місце випадок 2 (п. 11.4).

Тоді

$$y_1 = e^{\lambda x} = e^{-3x}; \qquad y_2 = xe^{\lambda x} = xe^{-3x}$$

Отже, згідно з формулою (11.4.7), загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

◊◊◊

10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$, отож корені цього квадратного рівняння – *комплексно-спряжені числа*

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2}; \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = 2 \pm i \in C.$$

Отже, має місце випадок 3 (п. 11.4), де дійсна частина $a = 2$ і уявна $b = 1$.

Тоді

$$y_1 = e^{ax}\cos bx = e^{2x}\cos x, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx = e^{2x}\sin x,$$

Згідно з формулою (11.4.8), шуканий загальний розв'язок заданого рівняння набуває вигляду

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x;$$
$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

◊◊◊

11. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 4.$$

Розв'язання.

Спочатку необхідно знайти фундаментальну систему розв'язків, потім скласти загальний розв'язок, нарешті, використовуючи початкові умови, знайти частинний розв'язок.

Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню, і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Отже, має місце випадок 3 (п. 11.4), де дійсна частина $a = 0$ і уявна $b = 1$.

Тоді

$$y_1(x) = cos2x, \qquad y_2(x) = sin\, 2x$$

і загальний розв'язок однорідного рівняння буде таким:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Для визначення сталих C_1 і C_2 скористаємось початковими умовами, для чого попередньо знайдемо

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x.$$

У результаті маємо систему рівнянь відносно C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1 cos(2 \cdot 0) + C_2 \sin(2 \cdot 0) = 1, \\ -2C_1 \sin(2 \cdot 0) + 2\, C_2 cos(2 \cdot 0) = 4. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 1, \\ -2C_1 \cdot 0 + 2\, C_2 \cdot 1 = 4. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Підставляючи значення сталих C_1 і C_2 в загальний розв'язок, знаходимо шуканий частинний розв'язок однорідного рівняння:

$$y = \cos 2x + 2 \sin 2x.$$

✧✧✧

12. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

Розв'язання.

Задано лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами вигляду (11.4.1), порядку $n = 3$. Для його розв'язання використовуємо ту саму схему, що й для рівнянь 2-го порядку.

Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому лінійному однорідному рівнянню 3-го порядку:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

Знайдемо його корені:

$$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 3. \end{cases}$$

Оскільки всі корені дійсні й різні, то їм відповідають частинні розв'язки

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1, \qquad y_2(x) = e^{-x}, \qquad y_3(x) = e^{3x}.$$

Тоді, згідно з формулою (11.3.5), загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}.$$

◊◊◊

13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0.$$

Розв'язання.

Задано лінійне однорідне диференціальне рівняння 4-го порядку.

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = 0.$$

Один корінь цього рівняння легко вгадується: $\lambda_1 = 1$. Тому

$$(\lambda - 1)(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1)^3 = 0.$$

Звідси знаходимо: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Корені дійсні, але корінь –1 трикратний.

Фундаментальна система розв'язків в цьому випадку має вигляд:

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = xe^{-x}, \quad y_4(x) = x^2 e^{-x}.$$

Оскільки вони лінійно незалежні, то їхня лінійна комбінація дає загальний розв'язок даного рівняння

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_4 x^2 e^{-x}$$

або

$$y = C_1 e^x + e^{-x}(C_2 + C_3 x + C_4 x^2).$$

◊◊◊

14. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^V + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому лінійному однорідному рівнянню 5-го порядку:

$$\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda + 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = 0.$$

Звідси маємо один дійсний корінь $\lambda_1 = -1$, інші чотири корені знайдемо, розв'язавши біквадратне рівняння $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$.

Поклавши $\lambda^2 = t$, зводимо його до квадратного рівняння відносно t і визначаємо його корені:

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = -1.$$

Тоді корені біквадратного рівняння $\lambda_{2,3} = \pm i$, $\lambda_{4,5} = \pm i$ комплексно-спряжені й кратні.

Отже, частинні розв'язки однорідного рівняння мають вигляд:

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = \cos x, \quad y_3(x) = \sin x, \quad y_4(x) = x\cos x,$$
$$y_5(x) = x\sin x.$$

Оскільки вони лінійно незалежні, то їхня лінійна комбінація дає загальний розв'язок заданого диференціального рівняння:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x + C_4 x\cos x + C_5 x\sin x$$

або

$$y = C_1 e^{-x} + \cos x\,(C_2 + C_4 x) + \sin x\,(C_3 + C_5 x).$$



15. Знайти вронскіан функцій: $y_1(x) = x^2$; $y_2(x) = \sqrt{x}$.

Розв'язання.

Для двох функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ вронскіан визначається за формулою:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Тобто потрібно скласти визначник другого порядку з функцій та їхніх похідних. Знайдемо похідні функцій:

$$y_1' = (x^2)' = 2x; \qquad y_2' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Підставимо у формулу вронскіана і обчислимо визначник:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & \sqrt{x} \\ 2x & \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{vmatrix} = x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{2}x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 2x \cdot x^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}.$$

Отже, $W(y_1, y_2) = -\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

◊◊◊

16. Дослідити на лінійну залежність функції:

$$y_1(x) = e^{2x}; \qquad y_2(x) = x^2.$$

Розв'язання.

Для того щоб $y_1(x)$ та $y_2(x)$ були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб вронскіан, складений для цих функцій, був відмінний від нуля. В іншому випадку $y_1(x)$ та $y_2(x)$ будуть лінійно залежними.

Складемо визначник другого порядку з функцій та їхніх похідних. Знайдемо похідні функцій:

$$y_1' = (e^{2x})' = 2e^{2x}; \qquad y_2' = (x^2)' = 2x.$$

Підставимо у формулу вронскіана і обчислимо визначник:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x^2 \\ 2e^{2x} & 2x \end{vmatrix} = e^{2x} \cdot 2x - x^2 \cdot 2e^{2x} = 2xe^{2x} - 2x^2e^{2x} = 2xe^{2x}(1 - x).$$

Для функцій e^{2x} та x^2 вронскіан $W(y_1, y_2)$ не є тотожно рівним нулю на жодному проміжку. Отже, функції $y_1(x) = e^{2x}$ та $y_2(x) = x^2$ є лінійно незалежними.

◊◊◊

17. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}.$$

Розв'язання.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного даному рівнянню однорідного рівняння:

$$y'' - y' = 0.$$

Для цього складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 1. \end{bmatrix}$$

Для дійсних різних коренів характеристичного рівняння маємо лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння:

$$y_1(x) = e^{0 \cdot x} = 1, \qquad y_2(x) = e^x$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння, згідно з формулою (11.5.6), має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 + C_2 e^x.$$

2. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y_{зн} = C_1(x) + C_2(x)e^x \quad ,$$

де $C_1(x), C_2(x)$ – невідомі функції, які належить знайти склавши систему (11.5.8).

Оскільки $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = e^x$ і $y_1'(x) = 0,\ y_2'(x) = e^x$, дістанемо систему, лінійну відносно функцій $C_1'(x),\ C_2'(x)$,:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)e^x = 0, \\ C_1'(x)\cdot 0 + C_2'(x)e^x = \dfrac{1}{1+e^x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)e^x = 0, \\ C_2'(x)e^x = \dfrac{1}{1+e^x}. \end{cases}$$

розв'язавши яку матимемо:

$$C_1'(x) = -\frac{1}{(e^x+1)}; \qquad C_2'(x) = \frac{1}{e^x(e^x+1)},$$

звідки

$$C_1\ (x) = -\int \frac{1}{(e^x+1)}dx = -\int \frac{1+e^x-e^x}{(e^x+1)}dx = -\int \frac{1+e^x}{(e^x+1)}dx +$$

$$+\int \frac{e^x}{(e^x+1)}dx = -\int dx + \int \frac{d(e^x+1)}{(e^x+1)} = -x + \ln|e^x+1| + \overline{C_1};$$

$$C_2\ (x) = \int \frac{1}{e^x(e^x+1)}dx = \left\{\begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt,\quad dx = \dfrac{dt}{e^x} \end{matrix}\right\} = \int \frac{1}{t(t+1)}\cdot\frac{dt}{t} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2(t+1)} = \int \frac{At+B}{t^2}dt + \int \frac{Cdt}{t+1} = \int \frac{-t+1}{t^2}dt + \int \frac{dt}{t+1} = -\int \frac{1}{t}dt +$$

$$+\int \frac{1}{t^2}dt + \int \frac{dt}{t+1} = -\ln|t| + \frac{t^{-1}}{-1} + \ln|t+1| = \ln|t+1| - \ln|t| - \frac{1}{t} =$$

$$= \ln|e^x+1| - \ln|e^x| - \frac{1}{e^x} = \ln|e^x+1| - x - e^{-x} + \overline{C_2},$$

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{At+B}{t^2} + \frac{Cdt}{t+1};$$

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{At^2+At+Bt+B+Ct^2}{t^2(t+1)};$$

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{(A+C)t^2+(A+B)t+B}{t^2(t+1)};$$

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A + B = 0, \\ B = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C = 1, \\ A = -1, \\ B = 1. \end{cases}$$

3. Підставляючи функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у передбачуваний розв'язок, знайдемо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:

$$y_{\text{зн}} = -x + \ln|e^x + 1| + \overline{C_1} + (\ln|e^x + 1| - x - e^{-x} + \overline{C_2})e^x =$$
$$-x + \ln|e^x + 1| + \overline{C_1} + e^x \ln|e^x + 1| - xe^x - e^{-x} \cdot e^x + \overline{C_2}e^x =$$
$$\overline{C_1} + \overline{C_2}e^x - x + \ln|e^x + 1| + e^x \ln|e^x + 1| - xe^x - 1.$$

Отже,

$$y_{\text{зн}} = \overline{C_1} + \overline{C_2}e^x - x + \ln|e^x + 1| + e^x \ln|e^x + 1| - xe^x - 1.$$

18. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Розв'язання.

Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Однорідне рівняння, що відповідає йому

$$y''' + y' = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

має такі корені $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm i$.

Тобто фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння утворюють функції

$$y_1(x) = e^{0 \cdot x} = 1, \quad y_2(x) = \cos x, \quad y_3(x) = \sin x.$$

і загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{\text{зо}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

2. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{зн}} = C_1(x) + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x.$$

Складемо систему рівнянь для функцій $C_1'(x),\ C_2'(x),\ C_3'(x)$:

$$\begin{cases} 1 \cdot C_1'(x) + C_2'(x) \cdot \cos x + C_3'(x) \cdot \sin x = 0, \\ 0 \cdot C_1'(x) - C_2'(x) \cdot \sin x + C_3'(x) \cdot \cos x = 0, \\ 0 \cdot C_1'(x) - C_2'(x) \cdot \cos x - C_3'(x) \cdot \sin x = \dfrac{1}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Дану систему зручно розв'язувати за формулами Крамера. Головний визначник системи дорівнює:

$$\Delta = W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$$
$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = 0 - \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x =$$
$$= -\frac{1}{\cos x}.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ -\cos x & \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 0 =$$
$$= -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

У результаті маємо:

$$C_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + \overline{C_1};$$

$$C_2'(x) = -\frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| tg\, \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + \overline{C_2},$$

$$C_3'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_3 = -\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} + \overline{C_3}.$$

3. Підставляючи знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ і $C_3(x)$ у вираз $y_{зн}$, знаходимо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:

$$y_{зн} = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x =$$
$$= tg\, x + \overline{C_1} + \left(\ln \left| tg\, \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + \overline{C_2}\right)\cos x + \left(-\frac{1}{\cos x} + \overline{C_3}\right)\sin x =$$
$$= \overline{C_1} + \overline{C_2}\cos x + \overline{C_3}\sin x + tg\, x + \cos x \ln \left| tg\, \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| - \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \overline{C_1} + \overline{C_2}\cos x + \overline{C_3}\sin x + tg\,x + \cos x \ln\left|tg\,\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - tg\,x =$$

$$= \overline{C_1} + \overline{C_2}\cos x + \overline{C_3}\sin x + \cos x \ln\left|tg\,\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Отже, $y_{зн} = \overline{C_1} + \overline{C_2}\cos x + \overline{C_3}\sin x + \cos x \ln\left|tg\,\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

19. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' - 4y = 4x^2 + 3.$$

Розв'язання.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку такого рівняння, маємо:

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

1. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного цьому рівнянню однорідного рівняння

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

Характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню, має дійсні різні корені

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -4. \end{bmatrix}$$

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = e^{-4x}.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

2. Оскільки права частина заданого неоднорідного рівняння має спеціальний вигляд (11.6.2), коли $\alpha = 0,\ \beta = 0$, будемо шукати його частинний розв'язок методом підбору.

Права частина даного рівняння $P_n(x) = x^2 + 2$ – многочлен 2-го степеня. Число $\alpha + \beta i = 0 \neq \lambda_{1,2}$, тобто серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ немає нуля, тому у формулі (11.6.3) $r = 0$. Має місце випадок 1а (п. 11.6). Отже, частинний розв'язок шукаємо у вигляді многочлена того самого 2-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, що містить всі степені незалежної змінної x:

$$y_{чн} = Ax^2 + Bx + C.$$

Щоб знайти невизначені коефіцієнти A, B, C, підставимо цей розв'язок у вихідне рівняння, для чого попередньо обчислимо похідні функції $y_{\text{чн}}$:

$$y'_{\text{чн}} = 2Ax + B, \quad y''_{\text{чн}} = 2A.$$

Підставляючи, маємо:

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 + 3,$$
$$2A + 6Ax + 3B - 4Ax^2 - 4Bx - 4C = 4x^2 + 3,$$
$$-4Ax^2 + (6A - 4B)x + 2A + 3B - 4C = 4x^2 + 3,$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій і лівій частинах рівності, матимемо:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -4A = 4, \\ x^1 & 6A - 4B = 0, \\ x^0 & 2A + 3B - 4C = 3, \end{array}$$

звідки $A = -1, B = -\frac{3}{2}, C = -\frac{19}{8}$.

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{чн}} = -x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{19}{8}.$$

3. Тоді загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння буде таким:

$$y_{\text{зн}} = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{19}{8}.$$

✧✧✧

20. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - y'' = x - 1.$$

Розв'язання.

Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Оскільки загальний розв'язок такого рівняння має вигляд

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}},$$

то послідовно шукаємо $y_{\text{зо}}$ і $y_{\text{чн}}$.

1. Запишемо лінійне однорідне рівняння, що відповідає даному неоднорідному

$$y''' - y'' = 0.$$

Складемо для нього характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \lambda_{1,2} = 0, \\ \lambda_2 = 1. \end{bmatrix}$$

Всі корені характеристичного рівняння дійсні, але корені $\lambda_{1,2} = 0$ – кратності 2.

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = x, \qquad y_3(x) = e^x.$$

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x.$$

2. За виглядом правої частини заданого рівняння підберемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Оскільки в правій частині рівняння маємо $P_n(x) = x - 1$ – многочлен 1-го степеня, а число $\alpha + \beta i = 0 = \lambda_{1,2}$, інакше кажучи, характеристичне рівняння має корені $\lambda_{1,2} = 0$ кратності 2, тобто $r = 2$, то, відповідно до випадку 1б (п. 11.6), шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{чн} = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2.$$

Підставимо цей розв'язок у вихідне рівняння, для чого попередньо обчислимо

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y''_{чн} = 6Ax + 2B, \quad y'''_{чн} = 6A.$$

Маємо:

$$6A - (6Ax + 2B) = x - 1;$$
$$6A - 6Ax - 2B = x - 1;$$
$$-6Ax + 6A - 2B = x - 1;$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, матимемо:

$$\begin{matrix} x^1 \\ x^0 \end{matrix}\Big| \qquad \begin{matrix} -6A = 1, \\ 6A - 2B = -1 \end{matrix}$$

звідки $A = -\frac{1}{6}, B = 0$.

Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{чн} = -\frac{1}{6}x^3.$$

3. Загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного диференціального рівняння 3-го порядку запишемо у вигляді:

$$y_{зн} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - \frac{1}{6}x^3.$$

✧✧✧

21. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}.$$

Розв'язання.

Знайдемо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}.$$

1. Знайдемо загальний розв'язок $y_{\text{зо}}$ лінійного однорідного рівняння

$$y'' - 6y' + 10y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння має дійсні різні корені:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0; \qquad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

$$y_1(x) = e^{3x}\cos x\,, \qquad y_2(x) = e^{3x}\sin x.$$

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{\text{зо}} = e^{3x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f\,(x) = 51e^{-x}$, тобто $P_n(x) = 51$, $(n = 0)$ – многочлен 0-го степеня, $\alpha = -1, \beta = 0$. Оскільки число $\alpha + \beta i = -1$. Характеристичне рівняння не має коренів, які збігаються з числом $\alpha + \beta i = -1$, тобто $r = 0$. Тоді, відповідно до випадку 2а (п. 11.6), шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{\text{чн}} = Ae^{-x}.$$

Знайдемо похідні від передбачуваного частинного розв'язку $y_{\text{чн}}$:

$$y'_{\text{чн}} = -Ae^{-x}, \qquad y''_{\text{чн}} = Ae^{-x}.$$

і підставимо їх у задане рівняння:

$$Ae^{-x} + 6e^{-x} + 10e^{-x} = 51e^{-x};$$

$$17Ae^{-x} = 51e^{-x};$$

$$e^{-x} \neq 0, \qquad \Rightarrow \qquad A = 3.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{\text{чн}} = 3e^{-x}.$$

3. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння буде таким:

$$y_{\text{зн}} = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-x}.$$



22. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови (задача Коші)

$$y'' + y' - 2y = 3xe^x, \;\; y(0) = 3, \;\; y'(0) = -\frac{1}{3}.$$

Розв'язання.

Для розв'язання задачі Коші спершу потрібно знайти загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, а потім за допомогою початкових умов виділити з нього частинний розв'язок.

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}.$$

1. Знайдемо загальний розв'язок $y_{\text{зо}}$ лінійного однорідного рівняння

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння має дійсні різні корені:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -2. \end{bmatrix}$$

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = e^{-2x}.$$

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{\text{зо}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f\,(x) = 3xe^x$, тобто $P_n(x) = 3x$, $(n = 1)$ – многочлен 1-го степеня, $\alpha = 1, \beta = 0$. Оскільки число $\alpha + \beta i = 1 = \lambda_1$, тобто характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = 1$, який збігається з числом $\alpha + \beta i = 1$, то $r = 1$. Тоді, відповідно до випадку 2б (п. 11.6), шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Знайдемо похідні від передбачуваного частинного розв'язку $y_{\text{чн}}$:

$$y'_{\text{чн}} = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = (Ax^2 + Bx + 2Ax + B)e^x = \\ = (Ax^2 + (B + 2A)x + B)e^x,$$

$$y''_{\text{чн}} = (2Ax + B + 2A)e^x + (Ax^2 + (B + 2A)x + B)e^x = \\ = (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x.$$

і підставимо їх у задане рівняння:

$$(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x + (Ax^2 + (B + 2A)x + B)e^x - \\ - 2(Ax^2 + Bx)e^x = 3xe^x;$$

$$(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B + Ax^2 + (B + 2A)x + B - 2Ax^2 \\ - 2Bx)e^x = 3xe^x;$$

$$(6Ax + 2A + 3B)e^x = 3xe^x;$$

$$e^x \neq 0, \qquad \Rightarrow \qquad 6Ax + 2A + 3B = 3x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах останньої рівності, знайдемо невизначені коефіцієнти A і B:

$$\begin{array}{l|l} x^1 & 6A = 3, \\ x^0 & 2A + 3B = 0 \end{array}$$

звідки $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{3}$.

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{\text{чн}} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x.$$

3. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння буде таким:

$$y_{\text{зн}} = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x.$$

4. Для розв'язання задачі Коші слід знайти похідну від загального розв'язку:

$$y'_{\text{зн}} = C_1e^x - 2C_2e^{-2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x.$$

Використовуючи початкові умови, отримаємо систему рівнянь для визначення довільних сталих C_1 і C_2:

$$\begin{matrix} y(0) = 3, \\ y'(0) = -\frac{1}{3}, \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 - 2C_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 - 2C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1, \end{cases}$$

Підставляючи знайдені сталі в загальний розв'язок, отримаємо шуканий частинний розв'язок рівняння, тобто розв'язок задачі Коші:

$$y = 2e^x + e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x = e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 2\right)e^x.$$

23. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = 2\cos 3x + 4\sin 3x.$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, як і раніше, шукатимемо у вигляді:

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

1. Однорідне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню, має вигляд:

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Характеристичне рівняння має дійсні різні корені:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\lambda_1 = -1,\\ \lambda_2 = -2.\end{bmatrix}$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{зо} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f(x) = 2\cos 3x + 4\sin 3x$, тобто $P_n(x) = 2$, $(n = 0)$, $Q_m(x) = 4$ $(m = 0)$ m – многочлени 0-го степеня, $\alpha = 0$, $\beta = 3$. Оскільки число $\alpha \pm \beta i = \pm 3i \neq \lambda_{1,2}$, тобто серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ не має числа $\alpha + \beta i = 3i$, то $r = 0$. Тоді, відповідно до випадку 3а (п. 11.6), шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{чн} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Знайдемо

$$y'_{чн} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$
$$y''_{чн} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x,$$

і підставимо у вихідне рівняння:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 9A\sin 3x + 9B\cos 3x + 2Acos\ 3x +$$
$$+2B\sin 3x = 2\cos 3x + 4\sin 3x,$$

$$(-9A + 9B + 2A)\cos 3x + (-9A - 9B + 2B)\sin 3x =$$
$$= 2\cos 3x + 4\sin 3x,$$
$$(-7A + 9B)\cos 3x + (-9A - 7B)\sin 3x = 2\cos 3x + 4\sin 3x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos 3x$ і $\sin 3x$:

$$\begin{array}{c|l} \cos 3x & -7A + 9B = 2, \\ \sin 3x & -9A - 7B = 4, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{5}{13}, \\ B = -\dfrac{1}{13}. \end{cases}$$

З урахуванням знайдених невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{\text{чн}} = -\frac{5}{13}cos\ 3x - \frac{1}{13}\sin 3x.$$

3. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишемо так:

$$y_{\text{зн}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \frac{5}{13}cos\ 3x - \frac{1}{13}\sin 3x.$$



24. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = x\sin x.$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}$$

1. Для лінійного однорідного рівняння

$$y'' + y = 0,$$

що відповідає заданому неоднорідному, маємо таке характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i,$$

де $\alpha = 0$ і $\beta = 1$. Отже, його загальний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{зо}} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f(x) = x\sin x$, тобто $P_n(x) = 0$, $(n = 0)$ – многочлен 0-го степеня, $Q_m(x) = x$, $(m = 1)$ – многочлен 1-го степеня, тобто $l = \max(0; 1) = 1, \alpha = 0$, $\beta = 1$. Оскільки число $\alpha \pm \beta i = \pm i = \lambda_{1,2}$, тобто характеристичне рівняння має корінь $\lambda_1 = i$, який збігається з числом $\alpha + \beta i = i$, то

$r = 1$. Тоді, відповідно до пункту 3б (п. 11.6), шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x\big((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\big) = \\ = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x.$$

Тоді

$$y'_{\text{чн}} = (2Ax + B)\cos x - \sin x\,(Ax^2 + Bx) + (2Cx + D)\sin x + \\ + \cos x\,(Cx^2 + Dx) = (2Ax + B + Cx^2 + Dx)\cos x + \\ +(-Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\sin x;$$

$$y''_{\text{чн}} = (2A + 2Cx + D)\cos x - \sin x\,(2Ax + B + Cx^2 + Dx) + \\ +(-2Ax - B + 2C)\sin x + \cos x\,(-Ax^2 - Bx + 2Cx + D) + \\ = (2A + 2Cx + D - Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\cos x + \\ +(-2Ax - B - Cx^2 - Dx - 2Ax - B + 2C)\sin x = \\ = (-Ax^2 - Bx + 4Cx + 2A + 2D)\cos x + \\ +(-Cx^2 - 4Ax - Dx - 2B + 2C)\sin x;$$

Після підстановки в початкове рівняння матимемо рівність:

$$(-Ax^2 - Bx + 4Cx + 2A + 2D)\cos x + \\ +(-Cx^2 - 4Ax - Dx - 2B + 2C)\sin x + (Ax^2 + Bx)\cos x + \\ +(Cx^2 + Dx)\sin x = xsin\,x;$$

$$(-Ax^2 - Bx + 4Cx + 2A + 2D + Ax^2 + Bx)\cos x + \\ +(-Cx^2 - 4Ax - Dx - 2B + 2C + Cx^2 + Dx)\sin x = x\sin x;$$

$$(4Cx + 2A + 2D)cos\,x + (-4Ax - 2B + 2C)\sin x = x\sin x;$$

Прирівнюючи коефіцієнти в обох частинах тотожності при $x\cos x$, $x\sin x$, $\cos x$ і $\sin x$, складемо систему рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{l|l} x\cos x & 4C = 0, \\ x\sin x & -4A = 1, \\ \cos x & 2A + 2D = 0, \\ \sin x & -2B + 2C = 0. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C = 0, \\ A = -\dfrac{1}{4}, \\ D = \dfrac{1}{4}, \\ B = 0. \end{array}\right.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x.$$

3. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{\text{зн}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{4}x^2 \cos x + \frac{1}{4}x \sin x.$$

◊◊◊

25. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 13y = e^x \cos x.$$

Розв'язання.

Маємо загальний випадок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду. Його загальний розв'язок визначається формулою:

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}.$$

1. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' - 4y' + 13y = 0,$$

для чого складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Маємо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{\text{зо}} = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

2. Права частина неоднорідного рівняння $f(x) = e^x \cos x$ є функцією спеціального вигляду, де $P_n(x) = 1$, $(n = 0)$, $Q_m(x) = 0$, $(m = 0)$ – многочлени 0-го степеня, $\alpha = 1, \beta = 1$. Оскільки число $\alpha + \beta i = 1 + i \neq \lambda_{1,2}$, тобто серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ немає числа $\alpha \pm \beta i = 1 \pm i$, то $r = 0$. Тоді частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння слід шукати відповідно до випадку 4а (п. 11.6), тобто за формулою (11.6.3), в якій $l = 0, \alpha = 1, \beta = 1$:

$$y_{\text{чн}} = e^x (A \cos x + B \sin x).$$

Тоді

$$\begin{aligned} y'_{\text{чн}} &= e^x (A \cos x + B \sin x) + e^x (-A \sin x + B \cos x) = \\ &= e^x \big((A + B) \cos x + (-A + B) \sin x\big); \\ y''_{\text{чн}} &= e^x \big((A + B) \cos x + (-A + B) \sin x\big) + \\ &\quad + e^x (-(A + B) \sin x + (-A + B) \cos x) = \\ &= e^x \big((A + B - A + B) \cos x + (-A + B - A - B) \sin x\big) = \\ &= e^x (2B \cos x - 2A \sin x). \end{aligned}$$

Після підстановки у вихідне рівняння скоротимо обидві частини рівності на спільний множник $e^x \neq 0$ і отримаємо:

$$e^x\,(2B\cos x - 2A\sin x) - \\ -4e^x\left((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x\right) + \\ +13e^x\,(A\cos x + B\sin x) = e^x\cos x,$$

$$e^x\,(2B\cos x - 2A\sin x - 4A\cos x \\ - 4B\cos x + 4A\sin x - 4B\sin x + 13\,A\cos x \\ + 13B\sin x) = e^x\cos x,$$

$$e^x\,(2B\cos x - 2A\sin x - 4A\cos x \\ - 4B\cos x + 4A\sin x - 4B\sin x + 13\,A\cos x \\ + 13B\sin x) = e^x\cos x,$$

$$(2B - 4A - 4B + 13A)\cos x + (-2A + 4A - 4B + 13B)\sin x = \cos x,$$
$$(9A - 2B)\cos x + (2A + 9B)\sin x = \cos x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, знайдемо A і B:

$$\begin{matrix}\cos x \\ \sin x\end{matrix}\left|\begin{matrix}9A - 2B = 1, \\ 2A + 9B = 0.\end{matrix}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{matrix}A = \dfrac{9}{85}, \\ B = -\dfrac{2}{85}.\end{matrix}\right.$$

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{\text{чн}} = e^x\left(\frac{9}{85}\cos x - \frac{2}{85}\sin x\right).$$

3. Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y_{\text{зн}} = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^x\left(\frac{9}{85}\cos x - \frac{2}{85}\sin x\right).$$

26. Розв'язати рівняння

$$y'' - 2y' + 37y = 36e^x\cos 6x\,, \quad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 6.$$

Розв'язання.

Маємо загальний випадок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду. Його загальний розв'язок визначається формулою:

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}.$$

1. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' - 2y' + 37y = 0,$$

для чого складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 37 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm 6i.$$

Маємо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{зо} = e^x(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x).$$

2. Права частина неоднорідного рівняння $f(x) = 36e^x \cos 6x$ є функцією спеціального вигляду, де $P_n(x) = 36$, $(n = 0)$, $Q_m(x) = 0$, $(m = 0)$ – многочлени 0-го степеня, $\alpha = 1, \beta = 6$. Оскільки число $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 6i = \lambda_{1,2}$, тобто серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ є числа $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 6i$, то $r = 1$. Тоді частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння слід шукати відповідно до випадку 4б (п. 11.6), тобто за формулою, в якій $l = 0, \alpha = 1, \beta = 6$:

$$y_{чн} = e^x x\,(A \cos 6x + B \sin 6x) = e^x\,(Ax \cos 6x + Bx \sin 6x).$$

Тоді

$$y'_{чн} = e^x\,(Ax \cos 6x + Bx \sin 6x) + e^x\,(A \cos 6x - 6Ax \sin 6x + B \sin 6x + 6Bx \cos 6x) = e^x\big((Ax + 6Bx + A) \cos 6x + (Bx - 6Ax + B) \sin 6x\big);$$

$$y''_{чн} = e^x\big((Ax + 6Bx + A) \cos 6x + (Bx - 6Ax + B) \sin 6x\big) + e^x\big((A + 6B) \cos 6x + (-6Ax - 36Bx - 6A) \sin 6x + (B - 6A) \sin 6x + (6Bx - 36Ax + 6B) \cos 6x\big) = e^x\big((Ax + 6Bx + A + A + 6B + 6Bx - 36Ax + 6B) \cos x + (Bx - 6Ax + B - 6Ax - 36Bx - 6A + B - 6A) \sin x\big) = e^x\big((-35Ax + 12Bx + + 2A + 12B) \cos x + (-12Ax - 35Bx - 12A + 2B) \sin x\big).$$

Після підстановки у вихідне рівняння скоротимо обидві частини рівності на спільний множник $e^x \neq 0$ і отримаємо:

$$e^x\big((-35Ax + 12Bx + 2A + 12B) \cos x + (-12Ax - 35Bx - 12A + 2B) \sin x\big) - 2e^x\big((Ax + 6Bx + A) \cos 6x + (Bx - 6Ax + B) \sin 6x\big) + 37e^x\,(Ax \cos 6x + Bx \sin 6x) = 36e^x \cos 6x\,;$$

$$e^x\big((-35Ax + 12Bx + 2A + 12B - 2Ax - 12Bx - 2A + 37Ax) \cos 6x + (-12Ax - 35Bx - 12A + 2B - 2Bx + 12Ax - 2B + 37Bx) \sin 6x\big) = 36e^x \cos 6x\,;$$

$$e^x\,(12B \cos 6x - 12A \sin 6x) = 36e^x \cos 6x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos 6x$ і $\sin 6x$, знайдемо A і B:

$$\begin{matrix}\cos 6x \\ \sin 6x\end{matrix}\left|\begin{matrix}12B = 36, \\ -12A = 0.\end{matrix}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}B = 3, \\ A = 0.\end{cases}$$

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{\text{чн}} = xe^x\,(0 \cdot \cos 6x + 3 \cdot \sin 6x) = 3xe^x \sin 6x.$$

3. Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} y_{\text{зн}} &= e^x(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x) + 3xe^x \sin 6x = \\ &= e^x(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x + 3x \sin 6x). \end{aligned}$$

Для розв'язання задачі Коші слід знайти похідну від загального розв'язку:

$$\begin{aligned} y'_{\text{зн}} &= e^x(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x + 3x \sin 6x) \\ &\quad + e^x(-6C_1 \sin 6x + 6C_2 \cos 6x + 3 \sin 6x \\ &\quad + 18x \cos 6x) \\ &= e^x(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x + 3x \sin 6x - 6C_1 \sin 6x + \\ &\quad + 6C_2 \cos 6x + 3 \sin 6x + 18x \cos 6x). \end{aligned}$$

Використовуючи початкові умови, отримаємо систему рівнянь для визначення довільних сталих C_1 і C_2:

$$\begin{matrix}y(0) = 0, \\ y'(0) = 6,\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}C_1 = 0, \\ C_1 + 6\,C_2 = 6,\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}C_1 = 0, \\ C_2 = 1,\end{cases}$$

Підставляючи знайдені сталі в загальний розв'язок, отримаємо шуканий частинний розв'язок рівняння, тобто розв'язок задачі Коші:

$$y = e^x(0 \cdot \cos 6x + 1 \sin 6x + 3x \sin 6x) = e^x \sin 6x\,(1 + 3x).$$

27. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 9y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Розв'язання.

Права частина заданого рівняння може бути поданою у вигляді суми двох функцій спеціального вигляду:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Отже, при підборі частинного розв'язку слід скористатися теоремою про накладання розв'язків. Загальний розв'язок такого неоднорідного рівняння можна записати у вигляді

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}}.$$

1. Запишемо однорідне рівняння

$$y'' + 9y = 0,$$

що відповідає даному неоднорідному рівнянню. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 3i.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння буде таким:

$$y_{\text{зо}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

2. Частинний розв'язок $y_{1\text{чн}}$, що відповідає першому доданку правої частини неоднорідного рівняння – добуток многочлена $P_n(x) = \frac{1}{2}$ нульового степеня на експоненту, шукатимемо у вигляді

$$y_{1\text{чн}} = Ae^x,$$

оскільки $\alpha + \beta i = 1$ не є коренем $\lambda_{1,2}$ характеристичного рівняння $(r = 0)$.

Продиференціюємо передбачуваний частинний розв'язок $y_{1\text{чн}}$:

$$y'_{1\text{чн}} = Ae^x, \qquad y''_{1\text{чн}} = Ae^x$$

і підставимо в задане неоднорідне рівняння, обмежившись у правій частині лише функцією $f_1(x)$:

$$Ae^x + 9Ae^x = \frac{1}{2}e^x, \qquad 10Ae^x = \frac{1}{2}e^x, \qquad 10A = \frac{1}{2}, \qquad A = \frac{1}{20}.$$

Отже, перший частинний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд

$$y_{1\text{чн}} = \tfrac{1}{20}e^x.$$

Другий доданок правої частини за структурою має такий самий вигляд, як і перший, з тією лише різницею, що $\alpha + \beta i = -1$. Оскільки серед коренів характеристичного рівняння такого значення немає $(r = 0)$, частинний розв'язок $y_{2\text{чн}}$ слід шукати у вигляді

$$y_{2\text{чн}} = Be^{-x}.$$

Диференціюємо цей частинний розв'язок з невизначеним коефіцієнтом:

$$y'_{2\text{чн}} = -Be^{-x}, \qquad y''_{2\text{чн}} = Be^{-x},$$

і підставляємо в задане неоднорідне рівняння, розглядаючи його праву частину тепер уже лише як функцію $f_2(x)$:

$$Be^{-x} + 9Be^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x}, \quad 10Be^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x}, \quad 10B = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{20}.$$

У результаті знаходимо другий частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y_{2\text{чн}} = \frac{1}{20}e^{-x}.$$

3. Отже, загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння набуває вигляду

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}}.$$

$$y_{\text{зн}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{20}e^{x} + \frac{1}{20}e^{-x}.$$

◊◊◊

28. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' = xe^{-3x} + \sin 3x\,, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

Розв'язання.

Знайдемо спочатку загальний розв'язок цього рівняння, права частина якого може бути поданою у вигляді суми двох функцій спеціального вигляду:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Отже, при підборі частинного розв'язку слід скористатися теоремою про накладання розв'язків. Загальний розв'язок такого неоднорідного рівняння можна записати у вигляді

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}}.$$

1. Запишемо однорідне рівняння

$$y'' + 3y' = 0,$$

що відповідає даному неоднорідному рівнянню. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3.$$

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1, \qquad y_2(x) = e^{-3x}.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння буде таким:

$$y_{\text{зо}} = C_1 + C_2e^{-3x}.$$

2. Частинний розв'язок $y_{1\text{чн}}$, що відповідає першому доданку правої частини неоднорідного рівняння $f_1(x) = xe^{-3x}$ – добуток многочлена першого степеня на експоненту, шукатимемо у вигляді

$$y_{1\text{чн}} = x(Ax + B)e^{-3x} = (Ax^2 + Bx)e^{-3x},$$

оскільки $\alpha + \beta i = -3 + 0 = -3$ є коренем характеристичного рівняння ($r = 1$).

Продиференціюємо передбачуваний частинний розв'язок $y_{1\text{чн}}$:

$$y'_{1\text{чн}} = (2Ax + B)e^{-3x} - 3(Ax^2 + Bx)e^{-3x} = \\ = (-3Ax^2 + 2Ax - 3Bx + B)e^{-3x},$$

$$y''_{1\text{чн}} = (-6Ax + 2A - 3B)e^{-3x} - 3(-3Ax^2 + 2Ax - 3Bx + B)e^{-3x} = \\ = (-6Ax + 2A - 3B + 9Ax^2 - 6Ax + 9Bx - 3B)e^{-3x} = \\ = (9Ax^2 - 12Ax + 9Bx + 2A - 6B)e^{-3x}$$

і підставимо в задане неоднорідне рівняння, обмежившись у правій частині лише функцією $f_1(x)$:

$$(9Ax^2 - 12Ax + 9Bx + 2A - 6B)e^{-3x} + 3 \cdot \\ \cdot (-3Ax^2 + 2Ax - 3Bx + B)e^{-3x} = xe^{-3x};$$

$$(9Ax^2 - 12Ax + 9Bx + 2A - 6B - 9Ax^2 + 6Ax - 9Bx + 3B)e^{-3x} \\ = xe^{-3x};$$

$$(-6Ax + 2A - 3B)e^{-3x} = xe^{-3x};$$

$$-6Ax + 2A - 3B = x;$$

$$\begin{array}{l} x^0 \\ x^1 \end{array}\left|\begin{array}{l} 2A - 3B = 0, \\ -6A = 1. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} B = -\dfrac{1}{9}, \\ A = -\dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$$

Отже, перший частинний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд

$$y_{1\text{чн}} = \left(-\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{9}x\right)e^{-3x}.$$

Другий доданок правої частини $f_2(x) = \sin 3x$ за структурою має вигляд $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, де $P_n(x) = 0$, $(n = 0)$, $Q_m(x) = 1$, $(m = 0)$ – многочлени 0-го степеня, $\alpha = 0$, $\beta = 3$, відповідне комплексне число

$$\alpha + \beta i = 0 \pm 3i = \pm 3i.$$

Оскільки число $\pm 3i$ не є коренем характеристичного рівняння, то $r = 0$. Тому частинний розв'язок $y_{2\text{чн}}$ шукаємо у вигляді

$$y_{2\text{чн}} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Диференціюємо цей частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами:

$$y'_{2\text{чн}} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x, \quad y''_{2\text{чн}} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x,$$

і підставляємо в задане неоднорідне рівняння, розглядаючи його праву частину тепер уже лише як функцію $f_2(x)$:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 3 \cdot (-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) = \sin 3x,$$

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 9A\sin 3x + 9B\cos 3x = \sin 3x,$$

$$(-9A+9B)\cos 3x+(-9A-9B)\sin 3x=\sin 3x,$$

$$\begin{array}{l}\cos 3x\\ \sin 3x\end{array}\left|\begin{array}{l}-9A+9B=0,\\ -9A-9B=1.\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}A=-\dfrac{1}{18},\\ B=-\dfrac{1}{18}.\end{array}\right.$$

У результаті знаходимо другий частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y_{2\text{чн}}=-\tfrac{1}{18}\cos 3x-\tfrac{1}{18}\sin 3x.$$

3. Отже, загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння набуває вигляду

$$y_{\text{зн}}=y_{\text{зо}}+y_{1\text{чн}}+y_{2\text{чн}}.$$

$$y_{\text{зн}}=C_1+C_2e^{-3x}+\left(-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x\right)e^{-3x}-\frac{1}{18}\cos 3x-\frac{1}{18}\sin 3x;$$

$$y_{\text{зн}}=C_1+C_2e^{-3x}-e^{-3x}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{9}\right)-\frac{1}{18}\cos 3x-\frac{1}{18}\sin 3x.$$

Тепер знайдемо розв'язок задачі Коші. Спочатку продиференціюємо $y_{\text{зн}}$.

$$y'=-3C_2e^{-3x}+3e^{-3x}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{9}\right)-e^{-3x}\left(\frac{2x}{6}+\frac{1}{9}\right)+$$

$$+\frac{3}{18}\sin 3x-\frac{3}{18}\cos 3x;$$

$$y'=-3C_2e^{-3x}+e^{-3x}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{9}\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{6}\cos 3x;$$

Використовуючи початкові умови, отримаємо систему рівнянь для визначення довільних сталих C_1 і C_2:

$$\begin{array}{l}y(0)=0,\\ y'(0)=1,\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C_1+C_2-\dfrac{1}{18}=0,\\ -3\,C_2-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{6}=1,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C_1=\dfrac{26}{54}=\dfrac{13}{27},\\ C_2=-\dfrac{23}{54},\end{cases}$$

Підставляючи знайдені сталі в загальний розв'язок, отримаємо шуканий частинний розв'язок рівняння, тобто розв'язок задачі Коші:

$$y=\frac{13}{27}-\frac{23}{54}e^{-3x}-e^{-3x}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{9}\right)-\frac{1}{18}\cos 3x-\frac{1}{18}\sin 3x.$$

11.8. Контрольні запитання

1. Що називається диференціальним рівнянням вищого порядку?
2. Що називається розв'язком диференціального рівняння вищого порядку?
3. Що таке загальний розв'язок диференціального рівняння?
4. Що називається частинним розв'язком диференціального рівняння?
5. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку?
6. Сформулюйте теорему Коші про існування та єдиність розв'язку.
7. Які диференціальні рівняння допускають зниження порядку?
8. Як розв'язуються рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$?
9. Якою заміною знижується порядок рівняння, що не містить явно шуканої функції y?
10. Якою заміною знижується порядок рівняння, що не містить явно незалежної змінної x?
11. Що називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку?
12. Яке лінійне рівняння називається однорідним?
13. Яке лінійне рівняння називається неоднорідним?
14. Які властивості мають розв'язки лінійного однорідного рівняння?
15. Що таке лінійна незалежність функцій?
16. Що називається визначником Вронського (вронскіаном)?
17. Яка умова лінійної незалежності розв'язків за допомогою вронскіана?
18. Що таке фундаментальна система розв'язків?
19. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння?
20. Як понизити порядок лінійного однорідного рівняння, якщо відомий один його частковий розв'язок?
21. Як знайти другий лінійно незалежний розв'язок рівняння

другого порядку, якщо один розв'язок уже відомий?

22. Яке рівняння називається лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами?

23. Що називається характеристичним рівнянням?

24. Як складається характеристичне рівняння для лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами?

25. Який вигляд має загальний розв'язок при різних дійсних коренях характеристичного рівняння?

26. Який вигляд має загальний розв'язок при кратних дійсних коренях?

27. Який вигляд має загальний розв'язок при комплексно-спряжених коренях?

28. Як будуються частинні розв'язки для кратних коренів характеристичного рівняння?

29. У чому полягає теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння?

30. Яка ідея методу варіації довільних сталих?

31. Яку систему рівнянь потрібно скласти в методі Лагранжа?

32. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів?

33. Для яких правих частин застосовується метод підбору частинного розв'язку?

34. Як вибирається форма частинного розв'язку при правій частині у вигляді многочлена?

35. Як вибирається форма частинного розв'язку при правій частині вигляду $e^{\alpha x}P_n(x)$?

36. Як вибирається форма частинного розв'язку при правій частині вигляду $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$?

37. У чому полягає теорема про накладання розв'язків?

38. Які переваги методу невизначених коефіцієнтів порівняно з методом варіації довільних сталих?

39. Що означає кратність кореня характеристичного рівняння?

40. Які етапи розв'язування задачі Коші для лінійного неоднорідного рівняння?

11.9. Завдання для самостійного виконання

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) рівняння:

1. $y'' = \sin 2x$;
2. $y''' = e^{-\frac{x}{4}}$;
3. $y'' = x + \sin x$;
4. $y'' = \cos 2x + \frac{1}{x}$;
5. $y'' = \ln x$;
6. $x^2y'' = 2$;
7. $y''' = e^{2x} + x^3$;
8. $y'' = \sin^2 x + x \sin 2x$;
9. $xy'' - y' = 0$;
10. $y''(e^x + 1) + y' = 0$;
11. $x^2y'' + xy' = 1$;
12. $y'' + y'tg\ 2x = \sin 2x$;
13. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;
14. $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$;
15. $y''(y-1) - 2(y')^2 = 0$;
16. $yy'' - y'\left(2\sqrt{yy'} - y'\right) = 0$;
17. $y''' = 2\ln x + x + 2$;
18. $y'' = 1 - (y')^2$;
19. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$;
20. $2yy'' - (y')^2 = 1$;
21. $y' + \frac{1}{4}(y'')^2 = xy''$;
22. $xy'' = y' \ln \frac{y}{x}$;
23. $xy'' - 3y' = -\frac{x^5}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$;
24. $xy'' - 2y' = -\frac{x^4}{\sqrt{16-x^{2^3}}}$;
25. $xy'' - 2y' = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$;
26. $xy'' + y' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;
27. $x^3y'' + x^2y' = 1$;
28. $xy'' - y' = x^2e^x$;
29. $x^2y''' = (y'')^2$;
30. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$;
31. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;
32. $2yy'' = (y')^2$;
33. $y''(3y+4) - 3(y')^2 = 0$;
34. $yy'' = y^2y' + (y')^2$;
35. $y'' = \frac{8}{y^3}$;
36. $yy'' + (y')^2 = 1$;
37. $(y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$;
38. $x^2y'' = 2$;
39. $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$;
40. $y'y''' = 3(y'')^2$;

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє задані початкові умови:

41. $y'' = \sin 3x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{9}$;
42. $xy'' = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$;
43. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$;
44. $yy'' + y'^3 - y'^2 = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$;

45. $y''(x^2+1)=2xy',\ y(1)=\frac{1}{3},\ y'(1)=2;$

46. $y''(x^2+1)=2xy',\ y(0)=1,\ y'(0)=3;$

47. $xy''+y'=\ln x,\ y(1)=-2,\ y'(1)=-1;$

48. $4y^3y''=y^4-1,\ y(0)=\sqrt{2},\ y'(0)=\frac{1}{2\sqrt{2}};$

49. $y''ctgx+y'=2,\ y(0)=0,\ y'(0)=2;$

50. $2yy''=y'^2-y^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1;$

51. $yy''-(y')^2=y^2\ln y,\ y(0)=1,\ y'(0)=1;$

52. $xy''-3y'=-\frac{x^5}{\sqrt{9-x^2}},\ y(3)=0,\ y'(3)=0;$

53. $2yy''+y^2-(y')^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1;$

54. $x^4y''-(y-xy')^3=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=1;$

55. $y''=2-y,\ y(0)=2,\ y'(0)=2.$

Дослідити лінійну залежність таких систем функцій:

56. $y_1=x^2,\ \ y_2=x^2+x;$

57. $y_1=3x+5,\ \ y_2=9x+15;$

58. $y_1=x,\ \ y_2=-3x,\ y_3=2x;$

59. $y_1=\ln x,\ \ y_2=x,\ y_3=1;$

60. $y_1=\sin x,\ \ y_2=\cos x;$

61. $y_1=2^x,\ \ y_2=3^x, y_3=4^x;$

62. $y_1=x^2+3x,\ \ y_2=x^2-1,\ y_3=x+3;$

63 $y_1=\ln x^4,\ \ y_2=\ln 5x,\ y_3=11;$

64. $y_1=e^x,\ \ y_2=e^{-x},\ y_3=1;$

65. $y_1=\ln x,\ \ y_2=\log_{10}x,\ y_3=\log_2 x.$

Розв'язати лінійні рівняння, якщо задано один із частинних розв'язків цих рівнянь

66. $y''+\frac{2y'}{x}-\frac{2y}{x^2}=0,\ \ y_1(x)=\frac{1}{x};$

67. $y''+\frac{x\,tgx}{x-tgx}y'+\frac{tgx}{x-tgx}y=0,\ \ y_1(x)=\sin x;$

68. $y''+(2tgx-ctgx)y'+2y\,tg^2x=0,\ \ y_1(x)=\cos^2 x;$

69. $(1-\ln x)x^2y''+xy'-y=0,\ \ y_1(x)=x;$

70. $y''-\frac{2y}{x^2}=0,\ \ y_1(x)=\frac{1}{x};$

71. $(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+2(x-1)y=0,\ \ y_1(x)=x^2;$

72. $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0,\ \ y_1(x)=e^{-2x};$

73. $x(1-x)^2y''-2y=0,\ \ y_1(x)=\frac{x}{1-x};$

74. $x^2y''-2xy'+(4x+2)y=0,\ \ y_1(x)=x\cos 2x;$

75. $y''-\frac{6y}{x^2}=0,\ \ y_1(x)=x^3;$

76. $y'' - \frac{x(1+2ctgx)}{1+xctgx}y' + \frac{1+2ctg\,x}{1+xctg\,x}y = 0,\ \ y_1(x) = x;$

77. $xy'' + 2y' + xy = 0,\ \ y_1(x) = \frac{\sin x}{x};$

78. $(2x^3 - 3x^2)y'' - 2(2x^3 - 3x)y' + 12x(x-1) = 0,\ \ y_1(x) = x^3;$

79. $y'' + y'tgx - y\cos^2 x = 0,\ \ y_1(x) = e^{\sin x}.$

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

80. $y'' - 7y' + 10y = 0;$

81. $y'' + 3y' = 0;$

82. $y'' - 4y = 0;$

83. $y'' + 4y' + 13y = 0;$

84. $y'' + 2y' + y = 0;$

85. $y'' - 5y' + 6y = 0;$

86. $y'' + y' - 2y = 0;$

87. $y'' + 4y' + 3y = 0;$

88. $2y'' - 5y' + 2y = 0;$

89. $y'' - 4y' + 5y = 0;$

90. $y'' + 2y' + 10y = 0;$

91. $y'' + 4y = 0;$

92. $4y'' + 4y' + y = 0;$

93. $y'' + 4y' + 13y = 0;$

94. $y'' - 2y' + 2y = 0;$

95. $y'' - 4y' + 2y = 0;$

96. $y'' + 6y' + 9y = 0;$

97. $4y'' + 12y' + 9y = 0;$

98. $y'' + 4y' + 5y = 0;$

99. $y'' + 2y = 0;$

100. $y'' + 3y' = 0;$

101. $6y'' + y' - y = 0;$

102. $9y'' - 12y' + 4y = 0;$

103. $4y'' - 10y' + 4y = 0;$

104. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0;$

105. $y''' - 2y'' = 0;$

106. $y''' + 27y = 0;$

107. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0;$

108. $y''' - 8y = 0;$

109. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;$

110. $y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 0;$

111. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0;$

112. $8y''' - 12y'' + 6y' - y = 0;$

113. $y''' - 7y'' + 9y' + 17y = 0;$

114. $2y''' + 3y'' - y = 0;$

115. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0;$

116. $y^{IV} - 3y''' = 0;$

117. $y^{IV} - y = 0;$

118. $y^{IV} - 8y' = 0;$

119. $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 0;$

Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

120. $y'' - 4y' + 4y = x^2;$

121. $y'' - y' + y = x^3 + 6;$

122. $y'' - 8y' + 7y = 14;$

123. $y'' + 8y' = 8x;$

124. $y'' - 2y' = x^2 - 1;$

125. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x;$

126. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 + x^2;$

127. $y''' - y' = x^2 + x;$

128. $3y' + y''' = 6x - 1;$

129. $y''' + y'' = 5x^2 - 1;$

130. $7y''' - y'' = 12x;$

131. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1;$

132. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1;$

133. $y''' - y'' = 6x + 5;$

134. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$;
135. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$;
136. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$;
137. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$;
138. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$;
139. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$;
140. $y^{IV} + y''' = x$;
141. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$;
142. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$;
143. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$.

Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

144. $y'' - 3y' + 2y = (15 - 12x)e^{-x}$;
145. $y'' - 2y' = (1 - 2x)e^x$;
146. $y'' - 2y' + y = (3x + 7)e^{2x}$;
147. $y'' - y' = (2x + 5)e^{2x}$;
148. $y'' - 4y' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$;
149. $y'' + 3y' + 2y = (2x - 5)e^x$;
150. $y'' - 4y' + 4y = (x - 1)e^x$;
151. $y'' + 6y' + 13y = -4xe^x$;
152. $y'' - 5y' + 6y = (2x^2 - 3x + 1)e^x$;
153. $y'' + 4y = (7 - 6x)e^x$;
154. $y'' - 4y' + 4y = (5x^2 + x - 7)e^{2x}$;
155. $y'' - y' - 6y = (4x^2 - 5)e^{3x}$;
156. $y'' - 4y' + 4y = (3x^2 - 5)e^{2x}$;
157. $y'' + 3y' - 4y = 5x^2e^{-x}$;
158. $y'' - 7y' + 10y = (1 - 2x)e^{-x}$;
159. $y'' + y' - 2y = (x^3 - 4x)e^{-x}$;
160. $y'' + y' - 6y = (x^3 - 2x)e^{-2x}$;
161. $y'' + 4y = (x^3 - 2x + 8)e^{2x}$;
162. $y''' + y'' - y' - y = (x^3 + 4x)e^{-x}$;
163. $y'' + 2y' - 3y = (x^2 - 4)e^{-x}$;
164. $y''' - 2y'' + y' = (6x^2 + x - 3)e^x$;
165. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2x^3e^x$;
166. $y'' - 2y' + y = (7x^3 - 5x^2 + x - 9)e^x$;
167. $y'' + 6y' + 9y = (x^3 + 2x^2 - 1)e^{-3x}$;
168. $y''' - 3y'' + 3y' - y = (4x^2 + 1)e^x$;
169. $y''' - y'' - 2y' + 2y = (5x^3 - 7)e^{-x}$;
170. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x^2 - 6)e^{2x}$;

171. $y''' - 3y'' + 3y' - y = (2x^2 - 5x + 1)e^x$;
172. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = (3x^2 - 7x + 5)e^{2x}$;
173. $y''' + 3y'' - 4y = (x^3 - 2x^2 + x)e^{-2x}$.

Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

174. $y'' + 2y' = \sin x + \cos x$;
175. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$;
176. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$;
177. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$;
178. $y'' - 4y' + 4y = -e^{-2x}\sin 6x$;
179. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$;
180. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$;
181. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$;
182. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$;
183. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$;
184. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$;
185. $y'' + 16y = (x^2 - 7)\sin 4x$;
186. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$;
187. $y'' + 10y' = xe^{-10x}\sin x$;
188. $y'' + 10y' + 26y = xe^{-5x}\sin x$;
189. $y'' - 2y' + 10y = xe^x\cos 2x$;
190. $y''' + y'' - 2y = xe^{-x}\sin x$;
191. $y''' - 2y' + 4y = e^x\sin x$.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

192. $y'' + 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$;
193. $y'' - 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 7$;
194. $4y'' - 4y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$;
195. $y'' + 2y' + 3y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \sqrt{2}$;
196. $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$;
197. $y'' + 2y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;
198. $y''' - y'' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1$;
199. $y''' - 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2, y''(0) = 4$;
200. $y''' - 13y'' + 12y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, y''(0) = 133$;
201. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0$;
202. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0, y''(0) - 6$;
203. $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -3;\ y''(0) = -9$
204. $y'' - 2y' + y = -2 + x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;
205. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$;
206. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5$;
207. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x\cos 6x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6$;
208. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$;
209. $y'' - 4y = 8e^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -8$;
210. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

211. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$
212. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6;$
213. $y'' + 4y = (6x + 5)e^{-2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{3}{4};$
214. $y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$
215. $y'' - 2y' + 10y = 74\sin 3x,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 3;$
216. $y'' + y = -8\sin x - 6\cos x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2},\ y'^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -2\pi;$
217. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x,\ y(0) = 1,\ y'^{(0)} = -1;$
218. $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 6e^{3x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3, y''(0) = 9;$
219. $y''' + 3y'' - 4y = -6e^{-2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, y''(0) = -2;$
220. $y''' - 5y'' + 4y' + 10y = 18\cos x + 12\sin x,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 1, y''(0) = -1;$
221. $y''' + y'' - 2y = -4\cos x - 2\sin x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2, y''(0) = 0;$
222. $y''' + 3y'' - 4y = -6e^{-2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1, y''(0) = 3.$

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь.

223. $y'' + y' - 6y = (3x - 5)e^{-x} + \cos 3x;$
224. $y'' + 2y' = e^{-2x} + x\cos 2x;$
225. $y'' + 6y' - 7y = 3xe^{2x} + x^2e^{-7x};$
226. $y'' - 8y' + 16y = 3xe^{4x} + 3\sin 4x;$
227. $y'' - 2y' = x^2e^x + \sin 2x;$
228. $y'' + 5y' + 6y = (2x^2 + 1)e^{-2x} + \cos 4x;$
229. $y'' - 6y' + 9y = (x^3 - 4x)e^{3x} + \sin 3x;$
230. $y'' + 4y = (5x^2 - 1)e^{-2x} + \cos x;$
231. $y'' - 2y' = x^2e^x + e^{2x}\cos 3x;$
232. $y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x} + e^{-x}\cos x;$
233. $y'' - y = (x - 7)e^{3x} + e^{-2x}\cos 5x;$
234. $y'' - 6y' + 9y = (x^3 - 4x)e^{3x} + e^{-x}\sin 3x;$
235. $y'' - 3y' + 2y = x^3e^x + e^{-3x}\sin 4x;$
236. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = -6e^x + 2\cos x + 14\sin x;$
237. $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = e^{-x} + 2\cos x - 4\sin x.$

Знайти загальні розв'язки рівнянь. Розв'язати, де вказано, задачу Коші.

238. $y'' + y = ctg\ x;$
239. $y'' + y = \frac{1}{\sin x};$
240. $y'' - y = \frac{e^x}{e^x+1};$
241. $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x};$

242. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$;

243. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$;

244. $y'' + y = -ctg^2 x$;

245. $y'' - y' = e^{2x} \sin e^x$;

246. $y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}$;

247. $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2+6x+2}{x^3}$;

248. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$;

249. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$;

250. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$;

251. $y'' - 2y' + 5y = e^x(3 + tg\, 2x)$;

252. $xy'' + y' = x^2$;

253. $x^2y'' - xy' = 3x^3$.

254. $y'' + y = \frac{1}{\cos x},\ y(0) = 1, y'(0) = 0$;

255. $y'' + y = ctg\, x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$;

256. $y'' - y = \frac{e^x}{e^x+1},\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$;

257. $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x},\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$;

258. $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x},\ y(1) = 2,\ y'(1) = -1$;

259. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

260. $y'' + 8y' + 20y = \frac{4e^{-4x}}{\cos 2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Розділ 12

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

12.1. Числові ряди

Теорія рядів займає важливе місце в математичному аналізі, оскільки є одним із найзручніших і найуніверсальніших математичних інструментів. Вона виникла як розширення поняття звичайної суми на нескінченну кількість доданків. Саме завдяки теорії рядів стало можливим розв'язувати складні задачі у фізиці, механіці та техніці. Розвиток теорії рядів тісно пов'язаний із розвитком диференціального та інтегрального числення.

Нехай задана послідовність чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, n \in N$.

Вираз

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{12.1.1}$$

називається ***числовим рядом.***

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ називаються ***членами ряду,*** a_n – ***загальний член ряду.***

Отже, ряд – це сума нескінченної кількості доданків, які можна занумерувати натуральними числами.

Сума

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

скінченного числа перших n членів ряду називається ***n-ю частинною сумою ряду.***

Розглянемо послідовність частинних сум:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Якщо існує скінченна границя

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

то її називають ***сумою ряду*** (12.1.1), а сам ряд (12.1.1) – ***збіжним рядом***.

Якщо $\lim_{n\to\infty} S_n$ не існує або дорівнює нескінченності, то ряд (12.1.1) називається ***розбіжним.***

Різниця

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$$

називається ***залишком ряду*** (12.1.1).

Залишок ряду є, в свою чергу, нескінченним рядом, який отримано з даного ряду відкиданням перших його n членів.

Якщо ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

збігається і має суму S, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = \lim_{n\to\infty} S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0,$$

тобто залишок збіжного ряду при $n \to \infty$ прямує до нуля.

12.1.1. Властивості числових рядів

Числовий ряд є сумою нескінченної кількості доданків. Проте збіжні числові ряди мають певні властивості, які дають змогу виконувати над ними дії аналогічно до дій зі скінченними сумами.

Властивість 1. Якщо збіжний ряд (12.1.1), то збігається й ряд, утворений з нього відкиданням скінченної кількості членів. Навпаки, якщо збігається ряд, утворений з (12.1.1) відкиданням скінченної кількості членів, то збіжний і ряд (12.1.1).

Тобто відкидання або додавання скінченного числа початкових членів ряду не впливає на його збіжність, але змінює значення його суми S.

Це випливає з того, що якщо S_n – сума перших n членів ряду (12.1.1), C_k – сума k відкинутих членів, σ_{n-k}– сума перших $n - k$

членів ряду після вилучення цих k членів, то при n, більшому за номер останнього відкинутого члена, виконується співвідношення $S_n = \sigma_{n-k} + C_k$. З останнього співвідношення випливає, що $\lim_{n\to\infty} S_n$ існує тоді і лише тоді, коли існує $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$.

Властивість 2. Якщо члени ряду $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ помножити на одне і те саме число $C \neq 0$, тоді поведінка ряду не зміниться.

Тобто:

– якщо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ є збіжним, то і ряд $\sum_{i=1}^{\infty} Ca_i$ є збіжним;

– якщо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ є розбіжним, то і ряд $\sum_{i=1}^{\infty} Ca_i$ є розбіжним.

Наслідок. Якщо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ збіжний і його сума дорівнює S, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} Ca_i$ – збіжний і його сума дорівнює CS, $C \in R$.

Це випливає з того, що якщо $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, тоді $\sigma_n = Ca_1 + Ca_2 + \cdots + Ca_n$ – сума перших членів ряду $\sum_{i=1}^{\infty} Ca_i$ і $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = C \lim_{n\to\infty} S_n = CS$.

Властивість 3. Якщо $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ і $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ – збіжні ряди і їх суми відповідно дорівнюють $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S(a)$ і $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = S(b)$, тоді ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i \pm b_i)$ також є збіжним і його сума дорівнює $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i \pm b_i) = S(a) \pm S(b)$.

Тобто збіжні ряди можна почленно додавати або віднімати, при цьому отримуємо також збіжний ряд.

Це випливає з того, що якщо

$$S(a) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad S(b) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

тоді сума n перших членів ряду $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i \pm b_i)$ має вигляд $\sigma_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n)$ і $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(S_n(a) \pm S_n(b)) = S(a) \pm S(b)$, оскільки сума (різниця) збіжних послідовностей є збіжною послідовністю.

Наслідок. Сума збіжного та розбіжного рядів є розбіжним рядом.

Наслідок. Загального висновку про збіжність суми (або різниці) двох розбіжних рядів зробити не можна. В результаті може бути отриманий як збіжний, так і розбіжний ряд.

Властивість 4 *(необхідна ознака збіжності числового ряду).* Якщо $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ – збіжний числовий ряд, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Це пояснюється тим, що зі збіжності ряду $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ випливає існування границі послідовності його частинних сум, тобто

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Оскільки $a_n = S_n - S_{n-1}$, то $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Наслідок. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ або $\lim_{n\to\infty} a_n$ взагалі не існує, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ розбіжний.

Зауваження. Оскільки умова $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ є необхідною, а не достатньою, то навіть тоді, коли вона виконана, ряд може бути і розбіжним

Властивість 5. У збіжному числовому ряді можна довільно групувати члени, не змінюючи їх порядку, при цьому збіжність і сума ряду не змінюється.

Теорема (*критерій Больцано-Коші***).** Для того щоб числовий ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ збігався, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \wedge\ \forall m > N\colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| = \\ = |S_{n+m} - S_n| < \varepsilon.$$

Умова теореми означає, що довільна достатньо віддалена від першого члена частина ряду (незалежно від її довжини, тобто від кількості членів ряду, що містяться в цій частині) повинна бути як завгодно малою за модулем.

12.1.2. Найпростіші еталонні ряди та їх збіжність

Перш ніж переходити до загальних методів дослідження довільних числових рядів, розглянемо два класичні ряди. Вони виконують роль фундаментальних еталонів у математичному аналізі, оскільки їхня поведінка повністю вивчена, а їхні структури використовуються як зразки для порівняння.

Ряд геометричної прогресії

Рядом геометричної прогресії називається такий ряд

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1},\quad b_1 \in R,\quad b_1 \neq 0. \tag{12.1.2.1}$$

Запишемо частинну суму цього ряду, тобто суму n перших членів геометричної прогресії, з першим членом b_1 і знаменником q, яка при $q \neq 1$ обчислюється за формулою

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 q^n}{1-q}.$$

1) Якщо $|q| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ і $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{1-q} - \right.$ $\left. - \frac{b_1 q^n}{1-q}\right) = \frac{b_1}{1-q}$, тобто ряд (12.1.2.1) збіжний.

2) Якщо $|q| > 1$, то $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ і $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, тобто ряд (12.1.2) розбіжний.

3) Якщо $q = 1$, то $S_n = b_1 + b_1 + b_1 + \cdots + b_1 = nb_1$ і $S =$ $= \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, тобто ряд (12.1.2) – розбіжний.

4) Якщо $q = -1$, то маємо ряд $b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \cdots$, у якому $S_1 = b_1$, $S_2 = 0$, $S_3 = b_1$, $S_4 = 0$, ... , $S_{2n-1} = b_1$, $S_{2n} = 0$. Тому $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = b_1$, $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0$. За відомою теоремою про єдиність границі $\lim_{n\to\infty} S_n$ не існує, тобто ряд (12.1.2.1) розбіжний.

Отже, ряд геометричної прогресії збігається при $|q| < 1$ і розбігається, якщо $|q| \geq 1$.

Гармонічний ряд

Середнім гармонічним двох чисел a і b називається число c, яке задовольняє співвідношення

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Числовий ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

називається ***гармонічним рядом***, тому що

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}(n - 1 + n + 1) = n = \frac{1}{a_n}.$$

Незважаючи на те, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, тобто необхідна умова збіжності ряду виконується, гармонічний ряд розбіжний. Покажемо це.

Згадаємо границю $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, а $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$. Прологарифмуємо цю нерівність

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \ln e\,;$$

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1;$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n};$$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n};$$

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

і розглянемо цей вираз при $n = 1, 2, 3$ ...:

$\ln 2 - \ln 1 < 1, \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}, \ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$, ..., $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$,

якщо додати ці нерівності, будемо мати

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = S_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \ln(n+1) = \infty \quad \Rightarrow$$

ряд буде розбіжним.

12.1.3. Числові ряди з додатними членами

На практиці обчислення частинних сум і знаходження їх границь, тобто дослідження збіжності ряду за означенням, є досить складним завданням. Проте часто важливо встановити лише факт збіжності або розбіжності ряду. Для збіжного ряду його суму, зокрема з довільною точністю, можна обчислити за допомогою засобів комп'ютерної техніки.

Умови, виконання яких дає змогу зробити висновок про збіжність або розбіжність ряду, називають ***достатніми ознаками збіжності***.

Розглянемо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, при умові, що $a_i > 0, i = 1, 2, 3, \ldots$

В цьому випадку $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$, тобто послідовність частинних сум, є зростаючою. Для того, щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність частинних сум цього ряду була обмежена зверху:

$$S_n \le L = const, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Теорема 1 (*ознака порівняння).* Нехай $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ – ряди з додатними членами і $\forall\, n \in N\ a_n \le b_n$. Тоді:

1) якщо $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ – збіжний ряд, то $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ – збіжний ряд;

2) якщо $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ – розбіжний ряд, то $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ – розбіжний ряд.

*Доведення.*1) Нехай $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Оскільки $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ ряд збіжний, то $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, причому $\sigma_n < \sigma$, бо $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ – ряд з додатними членами. За умовою теореми $\forall\, n \in N\ a_n \le b_n$, тому

$S_n < \sigma_n < \sigma$. Отже, послідовність S_n є монотонно зростаюча і обмежена, тому вона збіжна за теоремою Больцано – Вейєрштраса, причому $\lim_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty} \sigma_n < \sigma$. Таким чином, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ збіжний, причому очевидно, що $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S \le \sigma$.

2) Нехай ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ розбіжний. Якби ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ був збіжним, то згідно до доведеного в пункті 1 твердження ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ був би також збіжним, що суперечить умові. Тому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ розбіжний.

При застосуванні ознаки порівняння часто використовують так звані «еталонні» ряди:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$ збіжний при $|q| < 1$ і розбіжний при $|q| \ge 1$;

2) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \le 1$.

Теорема 2 (*гранична ознака порівняння).* Нехай $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ – ряди із додатними членами, для яких існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q \ne 0$. Якщо збіжний один з цих рядів, то збіжний інший. Якщо розбіжний один з цих рядів, то розбіжний інший.

Теорема 3 (*ознака Д'Аламбера*). Нехай $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ – ряд із додатними членами і $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$. Тоді:

1) якщо $D < 1$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ збіжний;

2) якщо $D > 1$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ розбіжний.

Доведення. 1) Нехай $D < 1$. Розглянемо деяке $q \in R$ таке, що $D < q < 1$. З означення границі

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \ge n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - D\right| < \varepsilon \Rightarrow D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon.$$

Приймемо $\varepsilon = q - D$. Тоді, починаючи з деякого номера n_0, виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Іншими словами, $\exists n_0 \in N\ \forall n \ge n_0$: : $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$.

Розглянемо останню нерівність, починаючи з номера n_0: $a_{n_0+1} < q a_{n_0}$, $a_{n_0+2} < q a_{n_0+1} < q^2 a_{n_0}$, $a_{n_0+3} < q a_{n_0+2} < q^3 a_{n_0}$, …. Розглянемо тепер два ряди:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots \qquad (12.1.3.1)$$

$$a_{n_0} + q a_{n_0} + q^2 a_{n_0} + \cdots \qquad (12.1.3.2)$$

Члени ряду (12.1.3.1), починаючи з u_{n_0}, обмежені зверху членами ряду (12.1.3.2). Ряд (12.1.3.2) збіжний, як сума нескінченно спадної геометричної прогресії (знаменник $q < 1$). Тому ряд (12.1.3.1) також збіжний за ознакою порівняння

2) Нехай $D > 1$. Тоді, аналогічно до попереднього,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - D\right| < \varepsilon \Rightarrow D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon.$$

Візьмемо $\varepsilon = D - 1$. Тоді $\forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, тобто $a_{n+1} > a_n$. Це означає, що члени ряду (12.1.3) утворюють зростаючу послідовність, починаючи з деякого номера n_0. Отже, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ і ряд (12.1.3.1) розбіжний за необхідною ознакою збіжності ряду.

Зауваження.

1) Якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ або не існує, то ознака Д'Аламбера не дає відповіді на питання про збіжність ряду.

2) Якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, але $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ починаючи з деякого номера $n_0 \in N$, то ряд розбіжний (не виконується необхідна ознака збіжності ряду).

3) Якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ розбіжний.

Теорема 4 *(радикальна ознака Коші).* Нехай $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ – ряд із додатними членами і $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$. Тоді:

1) якщо $K < 1$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ збіжний;

2) якщо $K > 1$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ розбіжний.

Зауваження. Якщо $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ або не існує, то радикальна ознака Коші не дає відповіді на питання про збіжність ряду.

Теорема 5 *(інтегральна ознака Коші)*. Нехай:

1) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ – ряд із додатними членами;

2) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$;

3) $f(x)$ – неперервна незростаюча функція така, що $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n, \ldots$

Тоді ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ збіжний тоді і лише тоді, коли збіжний невластивий інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Як уже зазначалося, під час застосування ознаки порівняння часто використовують так звані еталонні ряди. Одним із наважливіших серед них є ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Покажемо, що цей ряд збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots, \qquad p \in R.$$

Покладемо $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Ця функція задовольняє всі умови теореми 5. Маємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \int_1^{+\infty} x^{-p}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p}\right) = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to+\infty} (b^{1-p} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, p > 1, \\ \infty, p < 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln|x| = +\infty$. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збіжний при $p > 1$ і розбіжний при $p \leq 1$.

Зауваження. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

називається ***узагальненим гармонічним*** рядом або ***рядом Діріхле***.

Якщо $p = 1$, то отримаємо ***гармонічний ряд***, який, як відомо, є розбіжним.

Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами

Ознака Д'Аламбера є однією з найпоширеніших достатніх ознак збіжності числових рядів. Вона особливо ефективна у випадках, коли загальний член ряду містить факторіали, степені, показникові функції або може бути поданий у вигляді відношення алгебраїчних і трансцендентних виразів. У таких ситуаціях знаходження границі

відношення сусідніх членів ряду значно спрощує дослідження збіжності.

Якщо ж загальний член ряду є переважно алгебраїчним виразом, наприклад раціональною функцією від n, то ознака Д'Аламбера часто не дозволяє зробити висновок про збіжність або розбіжність ряду, оскільки відповідна границя зазвичай дорівнює одиниці. У таких випадках доцільніше застосовувати інші ознаки, зокрема ознаку порівняння або інтегральну ознаку Коші.

Радикальна ознака Коші є особливо зручною тоді, коли загальний член ряду містить степеневі або показникові вирази. Її застосування ґрунтується на дослідженні границі n-го кореня із загального члена ряду. Ця ознака часто дає можливість швидко встановити характер збіжності ряду у випадках, коли використання інших методів є складнішим.

Інтегральна ознака Коші застосовується для рядів, загальний член яких можна подати у вигляді функції $a_n = f(n)$, де функція $f(x)$ є додатною, неперервною та спадною на певному проміжку. Якщо така функція легко інтегрується, то дослідження збіжності ряду можна звести до дослідження збіжності відповідного невласного інтеграла.

Під час дослідження збіжності числових рядів доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

1. Визначити тип ряду. Необхідно з'ясувати, чи є ряд додатним, знакозмінним або довільним. Це дозволяє правильно обрати подальший метод дослідження.

2. Перевірити необхідну умову збіжності. Слід встановити, чи прямує загальний член ряду до нуля при $n \to \infty$. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд є розбіжним.

3. Застосувати достатню ознаку збіжності. Якщо необхідна умова виконується, використовують одну з ознак збіжності. Вибір конкретної ознаки залежить від вигляду загального члена ряду та його властивостей.

12.1.4. Знакозмінні числові ряди. Абсолютна та умовна збіжність

Перейдемо до рядів, члени яких є дійсні числа з довільним знаком. Числовий ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається ***знакозмінним***, якщо серед його членів є як додатні, так і від'ємні дійсні числа.

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|. \qquad (12.1.4.1)$$

Якщо ж ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ збіжний, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ – розбіжний, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ називається ***умовно (неабсолютно) збіжним***.

Теорема. Якщо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ збіжний, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ також збіжний.

Таким чином, якщо збігається ряд з абсолютних значень членів знакозмінного ряду, то збігається і сам знакозмінний ряд. Обернене твердження в загальному випадку неправильне: існують такі знакозмінні ряди, які самі збігаються, але ряди, складені з абсолютних величин їх членів, розбігаються.

Зауваження. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ є рядом з додатними членами, якщо не враховувати члени, що дорівнюють нулю. Тому кожну достатню ознаку його збіжності можна вважати достатньою ознакою абсолютної збіжності ряду $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Наведемо теореми про властивості абсолютно збіжних і умовно збіжних рядів.

Теорема Коші. Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то він залишається абсолютно збіжним при довільній перестановці його членів. При цьому сума ряду не залежить від порядку його членів.

Теорема Римана. Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то яке б не було наперед задане число A, можна так переставити члени цього ряду, щоб сума перетвореного ряду точно дорівнювала б A. Більш того, можна так переставити члени умовно збіжного ряду, щоб перетворений ряд виявився розбіжним.

Ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{12.1.4.2}$$

де $a_n > 0, n = 1,2, \ldots$, називається рядом з ***почерговою зміною знаків (рядом Лейбніца)***.

Зауваження. Ряд Лейбніца – частковий випадок знакозмінного ряду.

Теорема Лейбніца. Якщо $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд Лейбніца $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ збіжний і його сума $0 < S < a_1$.

Зауваження.

1) Теорема Лейбніца залишається правильною, якщо нерівність $a_k > a_{k+1}$ виконується, починаючи з деякого $n_0 \in \Gamma$.

2) Легко бачити, що у випадку заміни ряду Лейбніца його частинною сумою S_n, похибка такої заміни не перевищує за абсолютною величиною $|a_{n+1}|$, тобто модуля першого з відкинутих членів.

12.2. Функціональні ряди

Функціональним рядом називається ряд

$$\boldsymbol{u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)} \tag{12.2.1}$$

членами якого є функції змінної x.

Якщо змінній x надати числового значення $x = x_0$, то отримаємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0), \tag{12.2.2.}$$

який може бути як збіжним, так і розбіжним.

Якщо числовий ряд (12.2.2) є збіжним, то точка x_0 називається ***точкою збіжності ряду*** (12.2.1), в протилежному випадку – ***точкою розбіжності.***

Множина X значень x, для яких функціональний ряд (12.2.1) збігається, називається ***областю збіжності*** цього ряду.

Ряд (12.2.1) називається ***абсолютно збіжним на множині X***, якщо збіжним на цій множині є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$.

Дослідження функціонального ряду на збіжність відбувається аналогічно до дослідження на збіжність знакозмінного ряду.

Алгоритм дослідження функціонального ряду на збіжність

1. Знаходження проміжків значень аргументу членів ряду, при яких ряд збігається абсолютно.

2. Знаходження проміжків значень аргументу членів ряду, при яких ряд розбігається.

3. Додаткові дослідження в граничних точках, які відділяють області абсолютної збіжності від областей розбіжності.

На практиці для знаходження області збіжності функціонального ряду (12.2.1) користуються ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = l(x)$$

або

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = l(x).$$

Отже, для знаходження області збіжності слід розв'язати нерівність $l(x) < 1$, а для знаходження області розбіжності – нерівність $l(x) > 1$. Для визначення збіжності ряду у точках межі області, де $l(x) = 1$, здійснюють додаткове дослідження. Це пов'язано з тим, що ознака Д'Аламбера і радикальна ознака Коші для $l(x) = 1$ не дають відповіді на питання збіжний ряд чи ні.

Сума n членів функціонального ряду (12.2.1) називається – ***n частковою сумою $S_n(x)$ ряду***, тобто

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Функція

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \qquad x \in X,$$

називається ***сумою ряду***.

Функція

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$$

називається ***залишком ряду*** (12.2.1) після n -го члена.

12.2.1. Рівномірна збіжність функціонального ряду

Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

називається ***рівномірно збіжним*** на деякому проміжку, якщо, яким би не було $\varepsilon > 0$, існує таке число N з множини натуральних чисел, що для кожного $n > N$ та для всіх x з даного проміжку виконується нерівність.

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

де $R_n(x)$ – залишок ряду.

Символьно означення рівномірно збіжного функціонального ряду записується так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in N\colon \quad \forall n > N(\varepsilon),\ \ \forall x \in X \quad |R_n(x)| < \varepsilon.$$

Збіжність числового ряду означає, що для нього можна знайти число, до якого прямує послідовність його частинних сум. Збіжність функціонального ряду означає, що для нього можна знайти функцію, до якої прямує послідовність його частинних сум. Тому можна дати еквівалентне означення рівномірно збіжного ряду.

Функціональний ряд (12.2.1) називається ***рівномірно збіжним*** до функції $S(x)$ на множині X, якщо для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число N, що для кожного $n > N$ та для всіх x з множини X виконується нерівність:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

де $S_n(x)$ – частинні суми ряду (12.2.1).

Геометрична інтерпретація рівномірної збіжності функціонального ряду. Геометрично рівномірна збіжність ряду

(12.2.1) на відрізку $[a,b]$ означає, що для $n \geq N(\varepsilon)$ графіки всіх частинних сум $S_n(x)$ знаходяться всередині смуги, яка обмежена кривими: $y = S(x) - \varepsilon$, $y = S(x) + \varepsilon$ та прямими: $x = a$, $x = b$ (рис. 12.2.1.1).

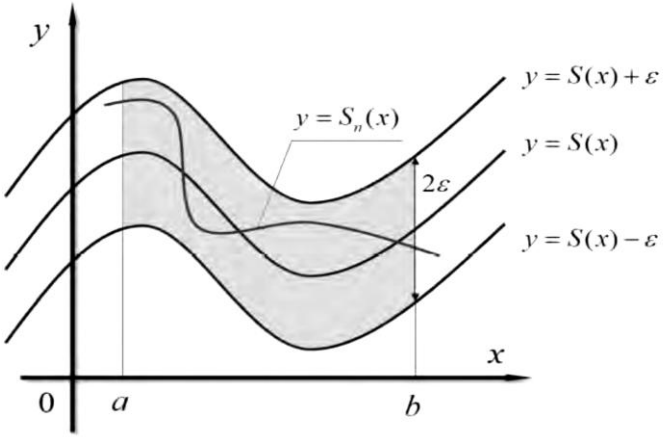


Рис. 12.2.1.1. Геометрична інтерпретація рівномірної збіжності функціонального ряду

Теорема *(ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду)*.

Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \qquad (12.2.1.1)$$

збігається абсолютно і рівномірно на деякому проміжку, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (12.2.1.2)$$

такий, що для всіх x з даного проміжку мають місце нерівності

$$|u_n(x)| < a_n, \qquad n = 1,2, \ldots .$$

В цьому випадку ряд (12.2.1.2) називається ***мажорантним***, а ряд (12.2.1.1) – ***мажорованим***.

Теорема (*Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду*). Для того, щоб функціональний ряд (12.2.1.1) рівномірно збігався на множині X, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ існувало таке натуральне число N, що для кожного $n > N$ і для будь-якого натурального числа p та для всіх x з множини X, виконувалася нерівність:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Символьно критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду записується так:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, N(\varepsilon) \in N : \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in N, \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Всі збіжні функціональні ряди за характером збіжності поділяються на рівномірно та нерівномірно збіжні.

Рівномірно збіжні функціональні ряди мають низку властивостей, які дозволяють ефективно використовувати їх при наближених обчисленнях. У цьому полягає практична перевага рівномірно збіжних рядів над нерівномірно збіжними рядами.

Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

1. Сумою рівномірно збіжного на відрізку $[a, b]$ функціонального ряду, члени якого неперервні на $[a, b]$, є функція, неперервна на цьому відрізку.

2. Якщо члени збіжного ряду (12.2.1.1) мають неперервні на $[a, b]$ похідні, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ збігається рівномірно на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку ряд (12.2.1.1) можна почленно диференціювати, тобто

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \qquad x \epsilon [a; b].$$

3. Якщо члени ряду (12.2.1.1) неперервні на відрізку $[a, b]$ і цей ряд збігається рівномірно на $[a, b]$, то його можна почленно інтегрувати на цьому відрізку, тобто

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx, \quad x \in [a; b].$$

12.3. Степеневі ряди

З усіх функціональних рядів найпростішими і найпоширенішими є степеневі ряди.

Степеневим рядом називається функціональний ряд, який має наступний вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{12.3.1}$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots \tag{12.3.2}$$

де a_n, $(n = 0,1,2,\dots)$ – дійсні числа, які називаються ***коефіцієнтами степеневого ряду***, x_0 – деяке стале число.

Ряд (12.3.2) заміною $y = x - x_0$ можна звести до ряду (12.3.1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Тому нижче розглянемо лише ряди вигляду (12.3.1), тобто за степенями x.

Теорема Абеля. Якщо ряд (12.3.1) збіжний при $x = x_1$, то він збігається абсолютно для усіх x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_1|$.

Якщо ряд (12.3.1) розбіжний при $x = x_2$, то він розбігається для усіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$.

Наслідком із теореми Абеля є наявність для степеневого ряду (12.3.1) такого числа $R \geq 0$, що для усіх $|x| < R$ ряд збігається, а для $|x| > R$ – розбігається.

Сукупність усіх числових значень, для яких ряд (12.3.1) збігається називається ***областю збіжності***.

Число R називається ***радіусом збіжності***, а інтервал $(-R;\ R)$ – ***інтервалом збіжності степеневого ряду*** (12.3.1).

Всередині інтервалу збіжності ряд абсолютно збігається, за його межами – розбігається. Питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу $R = -x$ і $R = x$ досліджується для кожного ряду окремо. Тоді областю збіжності степеневого ряду є інтервал збіжності, до якого приєднуються кінці інтервалу $x = \pm R$, якщо в цих точках ряд збіжний.

Для визначення радіуса та інтервалу збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ складаємо ряд з абсолютних величин його членів $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Далі, використовуючи ознаку Д'Аламбера або радикальну ознаку Коші, отримуємо формули для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{або} \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{12.3.3}$$

Зауваження. У деяких степеневих рядів інтервал збіжності вироджується у точку ($R = 0$), в інших охоплює всю вісь $Ox (R = \infty)$.

Зауваження. Радіус збіжності для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ визначається за тими самими формулами (12.3.3), що й для ряду (12.3.1), але інтервал збіжності ряду (12.3.2) визначають з нерівності $| x - x_0 | < R$, тобто $(x_0 - R;\ x_0 + R)$.

Зауважимо, що радіус та інтервал збіжності степеневого ряду можна знаходити, використовуючи безпосередньо ознаку Д'Аламбера або радикальну ознаку Коші до ряду, складеного з абсолютних величин його членів. У цьому разі члени ряду (12.3.1) позначають: $a_n x^n = u_n(x)$. Вказані ознаки застосовують до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ та знаходять інтервал збіжності з нерівності

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1$$

або

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1.$$

12.3.1. Ряди Тейлора та Маклорена

Рядом Тейлора для функції $f(x)$ називається ряд вигляду

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{12.3.1.1}$$

Тут $0! = 1, f^{(0)}(x_0) = f(x_0), a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ – коефіцієнти Тейлора.

Формула Тейлора має вигляд:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

де $r_n(x)$ – залишковий член, який у формі Лагранжа має вигляд:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Ряд Тейлора (12.3.1.1) при $x_0 = 0$ називають ***рядом Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \qquad (12.3.1.2)$$

Залишковий член буде мати вигляд:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Теорема. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ можна розкласти у степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.

Наступні теореми вказують на умови, за яких ряд (12.3.1.1) збігається до функції $f(x)$, тобто умови розкладу функції в ряд Тейлора.

Теорема. Для того, щоб ряд (12.3.1.1) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R;\ x_0 + R)$, необхідно і достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі і залишковий член її формули Тейлора $r_n(x)$ прямував до нуля при $n \to \infty$ ($\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$) для всіх x з цього інтервалу.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ має похідні всіх порядків і існує число $M > 0$ таке, що $\left|f^{(n)}(x_0)\right| < M$, то функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора.

Розклад функцій в степеневі ряди здійснюють двома способами.

Перший спосіб – це безпосереднє обчислення коефіцієнтів ряду за допомогою значень похідних функції:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Другий спосіб – це використання шаблонних рядів елементарних функцій у ряд Маклорена (1)-(11).

Таблиця 12.3.1.1.

Розклади в ряд Маклорена деяких елементарних функцій та відповідні їхні області збіжності

№ з/п	Розклад в ряд Маклорена	Область збіжності
1.	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$
2.	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \pm \cdots$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$
3.	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$
4.	$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$
5.	$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$
6.	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \pm \cdots$	$x \in (-1;\ 1]$
7.	$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \cdots$	$x \in [-1;\ 1]$
8.	$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5!} + \cdots + + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$x \in (-1;\ 1)$
9.	$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$	$x \in (-1;\ 1)$
10.	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$	$x \in (-1;\ 1)$
11.	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$x \in (-1;\ 1)$

Зауваження. Щоб отримати розклади у ряд Маклорена функцій, що є добутком або часткою інших функцій, наприклад

$$x^3 \sin^2 x, \quad x^2 \cos 4x, \quad x^4 \sqrt[3]{8 + x^3}, \quad \sqrt{x}\, e^{-x^3},$$
$$\frac{1 + \cos x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\ln(1+6x)}{5x}, \quad \frac{arctg\, x}{5x}, \quad \frac{x^5}{\sqrt{2 - x^4}},$$

то записують розклади у ряд функцій, використовуючи формули (1)-(11), а потім виконують множення або ділення на x^k.

Степеневі ряди застосовують для наближених обчислень значень, границь і похідних функції, а також для обчислення визначених інтегралів та розв'язанні диференціальних рівнянь. Розглянемо застосування степеневих рядів для обчислення визначених інтегралів.

Нехай потрібно знайти інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, який не виражається через елементарні функції, або складний і незручний для обчислень. У припущенні, що підінтегральна функція $f(x)$ розкладається у степеневий ряд, який рівномірно збіжний на деякому відрізку, що містить відрізок інтегрування функції $f(x)$, то для обчислення визначеного інтегралу необхідно:

1) підінтегральну функцію розкласти у ряд;

2) проінтегрувати її почленно, використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца;

3) визначити, яку кількість членів ряду потрібно залишити для необхідної точності обчислення. Оцінити похибку обчислень найпростіше у тому разі, якщо отриманий ряд є знакопочередним збіжним рядом. Згідно з ознакою Лейбніца, сума всіх відкинутих членів ряду (що є похибкою обчислення), не перевищує за абсолютною величиною першого члена, тобто $|r_n(x_0)| < u_{n+1}$. Для знакозмінних та знакододатних рядів оцінка похибки є складнішим завданням. Для цього потрібно оцінити величину залишку ряду, використовуючи одну із форм залишкового члена формули Тейлора.

12.4. Ряди Фур'є

12.4.1. Тригонометричний ряд. Ряд Фур'є

При вивченні складних періодичних процесів на практиці виникає задача розкладу їх на простіші періодичні процеси, які описуються функціями виду $a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

Тригонометричним рядом називається функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

де a_0, a_k і a_k $(k = 1, 2, \dots)$ – сталі дійсні числа, які називаються ***коефіцієнтами тригонометричного ряду***.

Нехай маємо функцію $f(x)$ з періодом 2π. З'ясуємо умови, при яких вона зображується рядом

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Цей ряд збіжний на відрізку $[-\pi, \pi]$ і такий, що можна почленно інтегрувати на відрізку $[-\pi, \pi]$. Нехай $f(x)$ – інтегровна функція на яка не є парною та не є непарною, 2π- періодична. Причому

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Інтегруючи рівність на відрізку $[-\pi, \pi]$, будемо мати

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kx \, dx \right). \quad (12.4.1.1)$$

Оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0 \pi}{2} + \frac{a_0 \pi}{2} = \pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx \, dx = \frac{a_k}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_k}{k} \sin \pi k - \frac{a_k}{k} \sin(-\pi k) = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kx \, dx = -\frac{b_k}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{b_k}{k} \cos \pi k - \frac{a_k}{k} \cos(-\pi x) = 0,$$

то, підставляючи у (12.4.1.1), маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Помножимо рівність (12.4.1.1) на $\cos kx$ і проінтегруємо отриману рівність на відрізку $[-\pi, \pi]$, отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx \cos nx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kx \cos nx\, dx\right).$$

Використовуючи формули інтегрування тригонометричних функцій, а саме:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\, dx = 0, \text{при } k \neq n;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx\, dx = 0 \text{ для довільних натуральних } n \text{ і } k;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2kx}{2k}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

маємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx = \pi a_k \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx.$$

Аналогічно

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx$$

Числа a_0, a_k і a_k $(k = 1, 2, \dots)$, що визначаються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx$$

називаються ***коефіцієнтами Фур'є функції*** $f(x)$.

Тригонометричний ряд, коефіцієнти якого є коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$, називають ***рядом Фур'є цієї функції*** і записують у вигляді

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

В останньому записі стоїть знак відповідності $\sim$, який означає, що інтегровній на відрізку $[-\pi, \pi]$ функції $f(x)$ ставиться у відповідність її ряд Фур'є. Відповідь на питання про те, у яких випадках знак відповідності можна замінити знаком рівності, подано в двох наступних теоремах.

Теорема 1 (Діріхле). Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

а) періодична з періодом 2π;

б) неперервна усюди на відрізку $[-\pi, \pi]$, окрім, можливо, скінченної кількості точок розриву першого роду;

в) сегмент $[-\pi, \pi]$ можна розділити на скінченне число підсегментів (інтервалів), в кожному з яких функція $f(x)$ обмежена і монотонна.

Тоді на відрізку $[-\pi, \pi]$ ряд Фур'є збігається і його сума

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

в точках неперервності дорівнює $f(x)$, а в точках розриву дорівнює

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

де $f(x+0)$ і $f(x-0)$ – відповідно правостороння і лівостороння границі функції $f(x)$ в точці x.

В інтервалах неперервності функції $f(x)$ ряд Фур'є збігається рівномірно.

Умови б) і в) теореми Діріхле називаються ***умовами Діріхле***, а функція, яка задовольняє цим умовам, називається ***кусково-гладкою***.

Теорема 2. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

а) періодична з періодом 2π;

б) неперервна на відрізку $[-\pi, \pi]$ усюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок розриву першого роду, в яких покладемо

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2};$$

в) на кожному проміжку неперервності функція має неперервну похідну.

Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi, \pi]$ збігається і його сума $S(x)$ в точках неперервності дорівнює $f(x)$, а в точках розриву функції дорівнює $S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. В інтервалах, де $f'(x)$ неперервна, ряд Фур'є збігається рівномірно.

Функція $y = f(x)$, яка задовольняє умови б) і в) теореми 2, називається ***кусково-гладкою***.

12.4.2. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

Якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умови теореми 1 або теореми 2 і є парною, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx\,,$$

де $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$, $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$, $k = 1, 2, \ldots$

Якщо ж функція $y = f(x)$, яка задовольняє умови теореми 1 або теореми 2, є непарною, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

де $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$, $k = 1, 2, \ldots$

12.4.3. Ряд Фур'є для $2l$-періодичної функції

Нехай тепер задана періодична функція $f\ (x)$ з періодом $T = 2l$, яка на відрізку $[-l, l]$ задовольняє умовам теореми 1 або теореми 2. Якщо ця функція не є парною та не є непарною, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Якщо $f(x)$ – парна $2l$-періодична функція, яка на відрізку $[-l, l]$ задовольняє умовам теореми 1 або теореми 2, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l},$$

де $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)dx$, $a_k = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$, $k = 1, 2, \ldots$.

Якщо $f(x)$ – непарна $2l$-періодична функція, яка на відрізку $[-l, l]$ задовольняє умовам теореми 1 або теореми 2, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

де $b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, $k = 1, 2, \ldots$.

Зауваження 1. При розв'язанні прикладів доцільно використовувати такі тотожності:

1) $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\forall n \in Z$;

2) $\sin(n\pi) = 0$, $\forall n \in Z$;

3) $\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases}(-1)^k & \text{при } n = 2k,\\ 0 & \text{при } n = 2k-1,\ k\epsilon Z;\end{cases}$

4) $\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases}0 & \text{при } n = 2k,\\ (-1)^{k+1} & \text{при } n = 2k-1,\ k\epsilon Z.\end{cases}$

Зауваження 2. Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[0, a]$ і її треба розкласти в ряд Фур'є за синусами або за косинусами, то вважають, що функція задана на півперіоді, тобто $l = a$. Потім її графік продовжують парним чином, якщо йдеться про косинуси, і непарним, якщо мова йде про синуси.

Якщо ж функція $f(x)$ задана на відрізку $[0, a]$ і ніяких додаткових умов немає, то вважають, що вона задана на періоді, тобто $T = 2l = a$.

12.5. Розв'язування прикладів та задач

1. Перевірити за означенням, що геометрична прогресія з першим членом $b_1 = 1$ і знаменником $q = \frac{1}{2}$ є збіжним рядом.

Розв'язання.

За означенням, числовий ряд є збіжним, якщо є збіжною послідовність його частинних сум. Використаємо формулу суми перших n членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Підставимо до формули задані параметри геометричної прогресії та обчислимо для неї границю виду:

$$S_n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 \cdot (1 - 0) = 2.$$

Отже, границя послідовності частинних заданої геометричної прогресії існує і скінченна, тобто за означенням отримали, що геометрична прогресія є збіжним числовим рядом.

◊◊◊

2. Перевірити за означенням, що арифметична прогресія з першим членом $a_1 = 3$ і різницею $d = 2$ є розбіжним рядом.

Розв'язання.

За означенням, числовий ряд є збіжним, якщо є збіжною послідовність його частинних сум. Використаємо формулу суми перших n членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Підставимо до формули задані параметри геометричної прогресії та обчислимо для неї границю виду:

$$S_n = \frac{2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = (3 + n - 1)n = 2n + n^2.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (2n + n^2) = \infty.$$

Границя послідовності частинних сум заданої арифметичної прогресії дорівнює нескінченності, тому за означенням задана арифметична прогресія є розбіжним числовим рядом.

◊◊◊

3. Задано ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}.$$

Знайти S_n і суму ряду S.

Розв'язання.

Частинну суму S_n можна записати так:

$$S_n = \frac{3+2}{6} + \frac{3^2+2^2}{6^2} + \frac{3^3+2^3}{6^3} + \cdots + \frac{3^n+2^n}{6^n}$$
$$= \left(\frac{3}{6} + \frac{3^2}{6^2} + \frac{3^3}{6^3} + \cdots + \frac{3^n}{6^n}\right) + \left(\frac{2}{6} + \frac{2^2}{6^2} + \frac{2^3}{6^3} + \cdots + \frac{2^n}{6^n}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right).$$

У кожній дужці маємо суму "n" членів геометричної прогресії, яка обчислюється за формулою

$$S_n = \frac{b_1}{1-q}, \text{ при } |q| < 1.$$

Отже, $S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Тому $S = 1{,}5$ і даний ряд збігається.



4. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} + \cdots$.

Розв'язання.

Загальний член ряду має вигляд $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, тобто маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Розвинувши загальний член ряду на прості дроби, отримаємо

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Частинна сума даного ряду має вигляд:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Тоді

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Отже, заданий ряд збіжний і його сума $S = \frac{1}{2}$.

◊◊◊

5. Знайти суму ряду та дослідити його на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3}.$$

Розв'язання.

Оскільки

$$4n^2 + 8n + 3 = 4(n + 12)(n + 32) = (2n + 1)(2n + 3),$$

то загальний член a_n можна записати у вигляді:

$$a_n = \frac{1}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

Частинна сума даного ряду має вигляд:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right).$$

Тоді

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Отже, заданий ряд збіжний і його сума $S = \frac{1}{6}$.

◊◊◊

6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1} + n - 1}.$$

Розв'язання.

Оскільки

$$a_n = \frac{2}{5^{n-1} + n - 1} \le \frac{2}{5^{n-1}},$$

то

$$S_n = \frac{2}{1} + \frac{2}{6} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{5^{n-1} + n - 1} \le \frac{2}{1} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \cdots + \frac{2}{5^{n-1}} =$$

$$= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 2 \cdot \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{5^n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{5}{2}.$$

Отже,

$$S_n < \tfrac{5}{2},$$

а це означає, що $\lim_{n\to\infty} S_n$ існує і є скінченним числом, тобто, даний ряд збігається.

✧✧✧

7. Довести розбіжність ряду

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3+7n}$.

Розв'язання.

а) Подивимося, чи виконується необхідна умова збіжності ряду, тобто перевіримо, чи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

$$a_n = \frac{n}{2n+1}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$, то ряд розбіжний.

б) Подивимося, чи виконується необхідна умова збіжності ряду, тобто перевіримо, чи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

$$a_n = \frac{2n+1}{3+7n}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3+7n} = \frac{2}{7} \neq 0$, то ряд розбіжний.

✧✧✧

8. Перевірити за допомогою необхідної ознаки, що арифметична прогресія з першим членом $a_1 = 3$ і різницею $d = 2$ є розбіжним рядом.

Розв'язання.

Запишемо формулу n-ого члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Підставимо у формулу задані параметри арифметичної прогресії та перевіримо чи виконується необхідна умова збіжності ряду.

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)\cdot 2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2n+1) = \infty \neq 0.$$

Отже, задана арифметична прогресія є розбіжним числовим рядом.

✧✧✧

9. Довести розбіжність ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots.$$

Розв'язання.

Подивимося, чи виконується необхідна умова збіжності ряду, тобто перевіримо, чи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Тут необхідна умова збіжності виконується, проте

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

тобто $S_n > \sqrt{n}$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

Звідки

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний.

✧✧✧

10. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}.$$

Розв'язання.

Маємо, що для всіх $n \geq 1$ виконується нерівність

$$\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \leq \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Порівняємо даний ряд із геометричним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}},$$

який є збіжним, оскільки його знаменник $q = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ і $|q| < 1$.

За ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ також збіжний. Крім того,

$$\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Отже, ряд $\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ є збіжним.

✧✧✧

11. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Розв'язання.

Розглянемо числовий ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

Для всіх $n \geq 2$ виконується нерівність

$$n^n \geq 2^n,$$

тому

$$\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Отже,

$$\frac{1}{2^2} \le \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{3^3} \le \frac{1}{2^3};\ \dots;\ \frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n}.$$

Порівняємо даний ряд із геометричним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

який є збіжним, оскільки його знаменник $q = \frac{1}{2}$ і $|q| < 1$.

За ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ також збіжний. Крім того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 1 = 1.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ є збіжним.

◊◊◊

12. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Розв'язання.

Скористаємось нерівністю

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x, \text{ якщо } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(пряма $y = \frac{2x}{\pi}$ лежить вище кривої $y = \sin x$). Маємо

$$\sin \frac{\pi}{2n} > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Оскільки гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

розбіжний, то згідно ознаки порівняння даний ряд теж розбіжний.

◊◊◊

13. Дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + 3}{n^4}; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{3^n}.$$

Розв'язання.

а) Для порівняння розглянемо розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і скористаємося граничною ознакою порівняння.

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{n^4}\div\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^3+3)}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{n^3}=2\neq 0.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+3}{n^4}$ – розбіжний.

б) Для порівняння розглянемо збіжний геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ і скористаємося граничною ознакою порівняння.

Знайдемо $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{3^n}\div\frac{1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}=1.$

Оскільки одержали скінченну додатну границю, то за граничною ознакою порівняння даний ряд має той самий характер збіжності, що й геометричний ряд, тобто також збіжний.

◊◊◊

14. Дослідити на збіжність ряди користуючись ознакою Д'Аламбера:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Розв'язання.

а) Запишемо

$$a_n=\frac{n^2}{5^n},\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}.$$

Далі обчислимо:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n(n+1)^2}{5\cdot 5^n\cdot n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{5\cdot n^2}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{5}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{5}<1.$$

Отже, цей ряд збігається за ознакою Даламбера.

б) Запишемо

$$a_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}, \qquad a_{n+1} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1) \cdot (3n+2)}.$$

Обчислимо:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1) \cdot (3n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

в) Запишемо

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Обчислимо:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1) n!}{n^n \cdot n! \, (n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд розбіжний.

◊◊◊

15. Дослідити на збіжність ряди користуючись радикальною ознакою Коші:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+1}{2n}\right)^n$.

Розв'язання.

а) Запишемо

$$a_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$$

Скористаємося радикальною ознакою Коші, та обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1.$$

За радикальною ознакою Коші цей ряд збіжний.

б) Запишемо

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$$

Скористаємося радикальною ознакою Коші, та обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} = e^2 > 1.$$

За радикальною ознакою Коші цей ряд розбіжний.

в) Запишемо

$$a_n = \left(\arcsin\frac{n+1}{2n}\right)^{n}$$

Скористаємося радикальною ознакою Коші, та обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{n+1}{2n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \arcsin\frac{n+1}{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \arcsin\left(\frac{n}{2n}+\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \arcsin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1.$$

За радикальною ознакою Коші цей ряд збіжний.

16. Дослідити на збіжність ряди користуючись інтегральною ознакою Коші:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2$.

Розв'язання.

а) Скористаємося інтегральною ознакою Коші. Запишемо:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1};$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{A\to+\infty} arctg\ x\Big|_1^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} (arctg\ A - arctg\ 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < \infty.$$

Інтеграл збіжний, отже, даний ряд теж збігається.

б) Перетворимо загальний член ряду:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2 = \frac{n^2+2n+1}{(n^2+1)^2} = \frac{n^2+1}{(n^2+1)^2} + \frac{2n}{(n^2+1)^2} = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2n}{(n^2+1)^2}.$$

Таким чином, даний ряд є сума двох рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+1)^2}.$$

Перший з цих рядів збігається (див. а)). Досліджуємо другий ряд за інтегральною ознакою:

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2};$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{1}{(x^2+1)^2}\,d(x^2+1) = \lim_{A\to+\infty} \frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}\Bigg|_1^A =$$

$$= -\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{x^2+1}\Bigg|_1^A = -\lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{A^2+1} - \frac{1}{1^2+1}\right) = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$< \infty.$$

Другий ряд збігається. Згідно з властивістю про те, що сума двох збіжних рядів також є збіжною, робимо висновок, що і вихідний ряд збігається.

◊◊◊

17. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}.$$

Розв'язання.

Розглянемо спочатку такий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+2)\ln^2(5n+2)}.$$

Скористаємося інтегральною ознакою Коші:

$$f(x) = \frac{1}{(5x+2)\ln^2(5x+2)};$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(5x+2)\ln^2(5x+2)}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^{A} \frac{1}{(5x+2)\ln^2(5x+2)}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{5}\int_1^{A} \frac{1}{\ln^2(5x+2)}\,d(\ln(5x+2)) = \frac{1}{5}\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{\ln^{-1}(5x+2)}{-1}\right|_1^{A} =$$

$$= -\frac{1}{5}\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{1}{\ln(5x+2)}\right|_1^{A} = -\frac{1}{5}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(5\cdot A+2)} - \frac{1}{\ln(5\cdot 1+2)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(5A+2)} - \frac{1}{\ln 7}\right) = -\frac{1}{5}\left(0 - \frac{1}{\ln 7}\right) = \frac{1}{5\ln 7} < \infty,$$

тобто ряд збігається.

А тепер застосуємо граничну ознаку порівняння. Порівняємо вихідний ряд з розглянутим рядом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)} \Bigg/ \frac{1}{(5n+2)\ln^2(5n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(5n+2)\ln^2(5n+2)}{(3n+4)\ln^2(5n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n+4} = \frac{5}{3} \neq 0.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$ теж збігається.

✧✧✧

18. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}, \qquad \alpha \in R.$$

Розв'язання.

Запишемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2},$$

який є рядом з додатними членами. Оскільки

$$a_n = \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \le \frac{1}{n^2},$$

а узагальнений гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ збіжний за ознакою порівняння.

Отже, ряд з абсолютних величин збігається, тоді, відповідно до теореми про збіжність знакозмінних рядів, даний знакозмінний ряд також збігається.



19. Дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}.$$

Розв'язання.

а) Запишемо наш ряд:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

Цей ряд є рядом, члени якого почергово набувають додатних і від'ємних значень, тобто рядом із почерговою зміною знаків (рядом Лейбніца). Для визначення його збіжності скористаємося теоремою Лейбніца.

Перевіримо, чи виконуються умови теореми:

1) $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Оскільки

$$1 > \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{3} > \tfrac{1}{4} > \cdots > \tfrac{1}{n} > \cdots > 0 \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n} = 0,$$

то за ознакою Лейбніца цей ряд є збіжним.

б) Запишемо наш ряд:

$$-\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{8\cdot 6}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}+\cdots.$$

Цей ряд є рядом, члени якого почергово набувають додатних і від'ємних значень, тобто рядом із почерговою зміною знаків (рядом Лейбніца). Для визначення його збіжності скористаємося теоремою Лейбніца.

Перевіримо чи виконуються умови теореми. Оскільки

$$\tfrac{1}{1\cdot 4} > \tfrac{1}{4\cdot 5} > \tfrac{1}{8\cdot 6} > \cdots > \tfrac{1}{n^2(n+3)} > \cdots > 0 \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n^2(n+3)} = 0,$$

то за ознакою Лейбніца цей ряд є збіжним.

✧✧✧

20. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n \cdot (n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$.

Розв'язання.

а) Запишемо

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}; \quad |a_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}\right| = \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

Тобто ряд з абсолютних величин членів цього ряду має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

Цей ряд є рядом з додатними членами. Дослідимо його на збіжність за ознакою Д'Аламбера.

$$|a_n| = \frac{1}{n \cdot 3^n}, \qquad |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}.$$

Обчислимо:

$$D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 3^n}{3^n \cdot 3 \cdot (n+1)} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} < 1.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – збігається. Отже, даний ряд збігається абсолютно.

б) Запишемо

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n \cdot (n+1)}; \quad |a_n| = \left|(-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n \cdot (n+1)}\right| = \frac{2n+1}{n \cdot (n+1)}.$$

Тобто ряд з абсолютних величин членів цього ряду має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n \cdot (n+1)}.$$

Цей ряд є рядом з додатними членами. Скористаємось граничною ознакою порівняння. Оскільки при великих значеннях n одиницями можна знехтувати, то порівняємо цей ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}\Big/\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot n}{n\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2\neq 0.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}$ з абсолютних величин теж розбіжний.

Досліджуємо тепер даний ряд на умовну збіжність за допомогою теореми Лейбніца. Перевіримо чи виконуються умови теореми:

1) визначимо чи $a_n > a_{n+1}$, тобто

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)} &> \frac{2(n+1)+1}{(n+1)(n+2)};\\ \frac{2n+1}{n} &> \frac{2n+3}{(n+2)};\\ (2n+1)(n+2) &> n(2n+3);\\ 2n^2+4n+n+2 &> 2n^2+3n;\end{aligned}$$

$2n+2>0,$ вірно.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}=0.$

Отже, даний ряд збігається умовно.

в) Запишемо

$$a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n};\qquad |a_n|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}\right|=\frac{n+1}{n}.$$

Тобто ряд з абсолютних величин членів цього ряду має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}.$$

Цей ряд є рядом з додатними членами.

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\neq 0,$$

то ряд розбіжний (не виконується необхідна умова збіжності).

Досліджуємо тепер даний ряд на умовну збіжність за допомогою теореми Лейбніца. Перевіримо, чи виконуються умови теореми:

1) визначимо чи $a_n > a_{n+1}$, тобто

$\frac{n+1}{n}$	$>$	$\frac{n+1+1}{n+1};$
$\frac{n+1}{n}$	$>$	$\frac{n+2}{n+1};$
$(n+1)(n+1)$	$>$	$n(n+2);$
n^2+2n+1	$>$	$n^2+2n;$

$1 > 0,$ вірно.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0,$ умова не виконується.

Якщо хоч одна з умов теореми Лейбніца не виконується, то ряд розбіжний. Отже, даний ряд розбіжний.



21. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x};$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n};$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2x-3}{4}\right)^n.$

Розв'язання.

а) Скористаємося ознакою Д'Аламбера для знаходження проміжків значень аргументу членів ряду, при яких ряд збігається абсолютно.

$$u_n(x) = \frac{(x-3)^n}{n^3}; \qquad u_{n+1}(x) = \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^3}.$$

Тоді

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{(x-3)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-3)^n (x-3) n^3}{(n+1)^3 (x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-3)n^3}{(n+1)^3}\right| = |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} =$$

$= |x-3| \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = |x-3| \cdot 1 = |x-3|.$

Далі, $|x-3| < 1$;

$$-1 < x-3 < 1;$$
$$2 < x < 4.$$

Тепер досліджуємо даний ряд на кінцях одержаного проміжку:

1) при $x = 4$ отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

який збігається, як узагальнений гармонічний ряд при $p = 3 > 1$;

2) при $x = 2$ отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3},$$

який збігається абсолютно.

Отже, область збіжності даного функціонального ряду: $x \in [2; 4]$.

б) Скористаємося ознакою Д'Аламбера.

$$u_n(x) = \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}; \qquad u_{n+1}(x) = \frac{(x+2)^{n+1}}{(2n+3)3^{n+1}}.$$

Тоді

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x+2)^{n+1}}{(2n+3)3^{n+1}} \cdot \frac{(2n+1)3^n}{(x+2)^n}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x+2)^n(x+2)(2n+1)3^n}{3(2n+3)3^n(x+2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x+2)(2n+1)}{3(2n+3)}\right| =$$
$$= \frac{|x+2|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{|x+2|}{3} \cdot 1 = \frac{|x+2|}{3}.$$

Далі, $\frac{|x+2|}{3} < 1$;

$$|x+2| < 3;$$
$$-3 < x+2 < 3;$$
$$-5 < x < 1.$$

Тепер досліджуємо даний ряд на кінцях одержаного проміжку:

1) при $x = 1$ отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2)^n}{(2n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

Порівняємо цей ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Отже, при $x=1$ ряд розбігається.

2) при $x=-5$ отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5+2)^n}{(2n+1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{(2n+1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}.$$

Цей ряд є рядом, члени якого почергово набувають додатних і від'ємних значень, тобто рядом Лейбніца. Для визначення його збіжності скористаємося теоремою Лейбніца.

1) $\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2n+3}$ – виконується;

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ – виконується.

Таким чином, ряд збігається умовно, а $x=-5$ точка умовної збіжності ряду.

Отже, область збіжності даного функціонального ряду: $x\in[-5;1]$.

в) Скористаємося радикальною ознакою Коші.

$$u_n(x)=e^{-n^2x}.$$

Тоді

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|e^{-n^2x}\right|}=\lim_{n\to\infty}e^{-nx}=$$
$$=\begin{cases}0,\text{якщо } x>0.\text{ Ряд збігається.}\\ \infty,\text{якщо x}<0.\text{ Ряд розбігається.}\end{cases}$$

При $x=0$ маємо такий ряд: $1+1+\cdots+1+\cdots$. Він розбіжний за достатньою ознакою розбіжності ряду, бо $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}1=$ $=1\neq 0$.

Отже, область збіжності даного функціонального ряду: $x>0$ або $x\in[0;+\infty]$.

г) Скористаємося радикальною ознакою Коші.

$$u_n(x)=n^2\left(\frac{2x-3}{4}\right)^n.$$

Тоді

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| n^2 \left(\frac{2x-3}{4}\right)^n \right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \left|\frac{2x-3}{4}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \left|\frac{2x-3}{4}\right| = 1^2 \cdot \left|\frac{2x-3}{4}\right| = \left|\frac{2x-3}{4}\right|,$$

то за радикальною ознакою Коші ряд збігається, причому абсолютно, якщо

$$\left|\frac{2x-3}{4}\right| < 1;$$
$$|2x-3| < 4;$$
$$-1 < 2x < 7;$$
$$-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2},$$

тобто якщо $-0{,}5 < x < 3{,}5$.

Тепер досліджуємо даний ряд на кінцях одержаного проміжку:

1) при $x = -0{,}5$ отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2\cdot(-0{,}5)-3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{-4}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2.$$

Цей ряд є рядом, члени якого почергово набувають додатних і від'ємних значень. Скористаємося теоремою Лейбніца.

1) $n^2 > (n+1)^2$ – не виконується.

Таким чином, ряд розбігається.

2) при $x = 3{,}5$ отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2\cdot 3{,}5-3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{4}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2.$$

Цей ряд розбіжним, оскільки

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty,$$

тобто не виконується необхідна умова збіжності числового ряду.

Отже, область збіжності даного функціонального ряду:

$$x \in (-0{,}5;\ 3{,}5).$$

◊◊◊

22. Для даного функціонального ряду побудувати мажорантний ряд та довести рівномірну збіжність на заданому відрізку:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}$, $[0;2]$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$, $[-5;-1]$.

Розв'язання.

а) Для цього ряду

$$u_n(x) = \frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}.$$

Тоді, оскільки $0 \le x \le 2$, а для довільного x: $\cos nx \le 1$, то

$$|u_n(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{n^5+1}} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{5}{3}}}.$$

У якості мажорантного ряду оберемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{5}{3}}}.$$

Цей ряд є знакододатним і збігається, бо $p = \frac{5}{3} > 1$. Тоді за ознакою Вейєрштрасса заданий за умовою ряд рівномірно збігається на відрізку $[0,2]$.

б) Для цього ряду

$$u_n(x) = \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}.$$

Оскільки $-5 < x < -1$, то $|x+3| \le 2$ і тоді

$$|u_n(x)| = \left|\frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}\right| = \frac{n!\,|x+3|^n}{n^n} \le \frac{n!\,2^n}{n^n}.$$

Розглянемо знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$$

та дослідимо його на збіжність за ознакою Д'Аламбера:

$$a_n = \frac{n!\,2^n}{n^n}; \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!\,2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n!\,(n+1)2^n n^n}{(n+1)^n(n+1)n!\,2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} =$$

$$= 2\cdot e^{-1} = \frac{2}{e} < 1.$$

Отже, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,2^n}{n^n}$$

збігається. Тому функціональний ряд, що заданий за умовою, рівномірно збігається на проміжку $[-5, -1]$.

◊◊◊

23. Дослідити характер збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}.$$

Розв'язання.

Оскільки

$$u_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2} = \left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

тобто члени даного функціонального ряду для будь-якого x мажоруються членами збіжного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, то за ознакою Вейєрштраса функціональний ряд є рівномірно збіжним для $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

◊◊◊

24. Знайти радіус та область збіжності степеневих рядів:

а) $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;

б) $x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$;

в) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n}}{n^2}$;

ґ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2(x+2)^n}{n+2}$

Розв'язання.

а) Радіус збіжності степеневого ряду обчислюємо за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Тоді

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{1}\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

тобто інтервал збіжності $(-1; 1)$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

Якщо $x = -1$ маємо ряд $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який збігається за ознакою Лейбніца.

Якщо $x = 1$, маємо ряд $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{x^n}{n} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Якщо відкинути перший член (відкидання скінченої кількості членів на збіжність не впливає), то одержимо розбіжний гармонічний ряд.

Отже, областю збіжності ряду є проміжок $[-1; 1)$;

б) Радіус збіжності степеневого ряду зручно обчислити формулою

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

$$a_n = n^n$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = 0.$$

Радіус збіжності дорівнює нулю, тобто ряд розбіжний для всіх значень $x \in (-\infty; +\infty)$.

в) Радіус збіжності степеневого ряду обчислюємо за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Маємо

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

тобто інтервал збіжності $(-\infty;\ +\infty)$. Ряд збіжний для всіх $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

г) ***1-й спосіб***. Область збіжності степеневого ряду можна знаходити аналогічно тому, як це робилося для функціонального ряду. Застосуємо ознаку Д'Аламбера. Маємо $u_n(x) = \frac{(x+5)^{2n}}{n^2}$, $u_{n+1}(x) = \frac{(x+5)^{2n+2}}{(n+1)^2}$,

$$l(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{2n+2}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(x+5)^{2n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{2n}(x+5)^2\cdot n^2}{(n+1)^2(x+5)^{2n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^2\cdot n^2}{(n+1)^2}\right| =$$

$$= |x+5|^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x+5|^2\cdot 1 = |x+5|^2.$$

Визначимо, за яких значень x ряд збіжний:

$$|x+5|^2 < 1 \quad\Rightarrow\quad |x+5| < 1 \quad\Rightarrow\quad -1 < x+5 < 1 \quad\Rightarrow\quad -6 < x < -4.$$

Якщо $x = -6$, маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6+5)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

який збігається як узагальнений гармонічний ряд при $p = 2 > 1$.

Якщо $x = -4$, маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+5)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

який збігається як узагальнений гармонічний ряд при $p = 2 > 1$.

Отже, областю збіжності ряду є відрізок $[-6;\ -4]$.

2-й спосіб. За формулою

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

знаходимо радіус збіжності степеневого ряду.

Маємо

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Тоді з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто $|x - 5| < 1$, отримуємо

$$-6 < x < -4.$$

Збіжність ряду на кінцях інтервалу досліджена вище.

Отже, областю збіжності ряду є відрізок $[-6;\ -4]$.

ґ) За формулою

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

знаходимо радіус збіжності степеневого ряду. Маємо

$$a_n = \frac{(n-1)^2}{n+2}, \qquad a_{n+1} = \frac{n^2}{n+3},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n-1)^2}{n+2}\cdot\frac{n+3}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n-1)^2(n+3)}{n^2(n+2)}\right| = 1.$$

Тоді з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто $|x+2| < 1$, отримуємо

$$-1 < x+2 < 1$$

$$-3 < x < -1.$$

Якщо $x = -3$, маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2(-3+2)^n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)^2}{n+2}.$$

Це ряд Лейбніца. Перевіримо умови виконання теореми:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{n+2} = \infty \neq 0 - \text{не виконується}.$$

Отже, ряд розбігається за ознакою Лейбніца.

Якщо $x = -1$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2(-1+2)^n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n(n-1)^2}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+2},$$

який розбігається, бо не виконується необхідна умова збіжності ($\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{n+2} = \infty \neq 0$).

Тому область збіжності даного функціонального ряду – це інтервал $(-3, -1)$.

✧✧✧

25. Розвинути у ряд за степенями x функцію $f(x) = e^x$.

Розв'язання.

Для розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = e^x$ необхідно знайти її похідні в точці $x_0 = 0$. Маємо

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \in N \quad i \quad f^{(k)}(0) = e^0 = 1.$$

За формулою (12.13)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

запишемо:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Щоб упевнитися, що даний ряд має сумою функцію $f(x) = e^x$, дослідимо залишковий член

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Бачимо, що при $|x| < M$, M – довільне число,

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x} \cdot M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Але ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$ збіжний при будь-якому M (див. приклад 3в).

Отже, $\lim_{n\to\infty} \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, а це означає, що $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, тобто функція розвивається у ряд:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

✧✧✧

26. Розвинути у ряд Тейлора або Маклорена функції у вказаних точках:

а) $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$;

б) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-x}}$, $x_0 = 0$;

в) $f(x)=\ln x,\ x_0=2$;

г) $f(x)=2^x,\ x_0=0$.

Розв'язання.

а) Для розкладу функції в ряд Маклорена ($x_0=0$) скористаємося розкладами деяких елементарних функцій, поданими в таблиці 12.1. Замінимо у формулі (1) x на $-x^2$, отримаємо

$$e^{-x^2}=1+(-x^2)+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\cdots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+\cdots=$$
$$=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

б) Запишемо $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-x}}$ у вигляді:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x}{1-x}=\frac{1}{2}\ln(1+2x)-\frac{1}{2}\ln(1-x).$$

Для розкладу функції у ряд Маклорена використаємо формулу (6) з таблиці 12.1

$$\ln(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n}+\cdots,$$

в якій для першого доданку функції замінимо x на $2x$, для другого – x на $-x$, а потім отримані ряди віднімемо.

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+2x)=\tfrac{1}{2}\Big(2x-\tfrac{4x^2}{2}+\tfrac{8x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{(2x)^n}{n}+\cdots\Big);$$
$$\tfrac{1}{2}\ln(1-x)=\tfrac{1}{2}\Big(-x-\tfrac{(-x)^2}{2}+\tfrac{(-x)^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{(-x)^n}{n}+\cdots\Big);$$
$$f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+2x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}-\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(-x-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}+\cdots\right)=$$
$$=x-x^2+\frac{4x^3}{3}-\cdots+\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\cdots=\frac{3}{2}x-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x^3}{2}+\cdots$$

в) Запишемо $f(x)=\ln x$ у вигляді:

$$f(x)=\ln x=\ln(x-2+2)=\ln\left[2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right).$$

У таблиці 12.1 у формулі (6) функції $\ln(1+x)$ замінимо x на $\frac{x-2}{2}$ і до результату додаємо $\ln 2$.

Отримаємо

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{(x-2)^3}{2^3 \cdot 3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{2^n \cdot n} + \cdots$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$-1 < \frac{x-2}{2} \le 1, \qquad -2 < x-2 \le 2, \qquad 0 < x \le 4.$$

Отже, область збіжності ряду є проміжок $(0;\ 4]$.

г) Використаємо формулу (1) таблиці 12.1, попередньо записавши функцію $f(x) = 2^x$ вигляді:

$$f(x) = 2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x \ln 2}.$$

Тоді

$$2^x = e^{x \ln 2} = 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2!} + \frac{(x \ln 2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x \ln 2)^n}{n!} + \cdots =$$
$$= 1 + x \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 3}{3!} + \cdots + \frac{x^n \ln^n 2}{n!} + \cdots$$

◊◊◊

27. Обчислити $\cos 1°$ із точністю до 0,001.

Розв'язання.

Користуючись розкладом функції $\cos x$ в степеневий ряд (формула (3) таблиці 12.1), можна записати:

$$\cos 1° = \cos\frac{\pi}{180} = \cos x =$$
$$= 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n}}{(2n)!} + \cdots =$$
$$= 1 - \frac{\pi^2}{180^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{180^4 \cdot 2!} - \cdots.$$

Оскільки цей ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца, а його другий член $\frac{\pi^2}{180^2 \cdot 2!}$ вже менший за 0,001, то

$$\cos 1° \approx 1$$

із точністю до 0,001.

◊◊◊

28. Обчислити $\sqrt[3]{30}$ із точністю до 0,001.

Розв'язання.

Знайдемо найближче за величиною до числа 30 число, з якого точно добувається корінь кубічний, та запишемо:

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{9}\right)} = \left(27\left(1+\frac{1}{9}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Далі, використовуючи формулу (9) таблиці 12.1 при $m=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{9}\in(-1;1)$, одержимо

$$\left(1+\tfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = 1+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{9}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\left(\tfrac{1}{9}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot\left(\tfrac{1}{9}\right)^3+\cdots =$$
$$= 1+\frac{1}{27}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 9^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 9^3\cdot 3!}+\cdots.$$

Тоді

$$\sqrt[3]{30} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\left(1+\frac{1}{27}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 9^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 9^3\cdot 3!}+\cdots\right).$$

Оскільки цей ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца, причому

$$\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 9^2\cdot 2!} < 0{,}001 < \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 9^3\cdot 3!},$$

то для того, щоб одержати результат із необхідною точністю, треба взяти три перші доданки.

Таким чином,

$$\sqrt[3]{30} = 3\left(1+\frac{1}{27}-\frac{1\cdot 2}{729}\right) = \frac{2265}{729} \approx 3{,}107.$$



29. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \sin x^2\,dx$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання.

Даний інтеграл не обчислюється в елементарних функціях. Тому підінтегральну функцію розкладемо у степеневий ряд (замінивши у формулі (2) таблиці 12.1 x на x^2) і перевіримо, чи належить відрізок інтегрування області збіжності цього ряду. Маємо

$$\sin x^2 = x^2-\frac{(x^2)^3}{3!}+\frac{(x^2)^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots =$$

$$= x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \cdots$$

і за ознакою Д'Аламбера знаходимо область збіжності степеневого ряду.

$$a_n = \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}, \qquad a_{n+1} = \frac{x^{4n+6}}{(2n+3)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{4n+6}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{4n+2}}\right| = x^4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} =$$

$$= x^4 \cdot 0 = 0.$$

Отже, область збіжності степеневого ряду: $(-\infty; +\infty)$, причому відрізок інтегрування $[0; 1]$ належить області збіжності цього ряду. Отримуємо

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} + \cdots\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{320} - \frac{1}{75600} + \cdots$$

Отримали знакопочерговий числовий ряд. Тоді число членів ряду, яке гарантує задану точність, визначаємо з нерівності

$$\frac{1}{(4n+3)(2n+1)!} < 10^{-4}.$$

Для $n = 2$ маємо, що

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} > 10^{-4}.$$

Для $n = 3$ маємо, що

$$\frac{1}{15 \cdot 7!} < 10^{-4}.$$

У цьому разі достатньо взяти перші три члени ряду:

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{320} = 0{,}3102,$$

причому

$$\left|\int_0^1 \sin x^2\, dx - 0{,}3102\right| < 10^{-4}.$$

✧✧✧

30. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання.

Використаємо ряд Маклорена (3) таблиці 12.1 функції $\cos x$. Маємо

$$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int_0^{0,5} \frac{1}{x^2} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right)\right] dx =$$

$$= \int_0^{0,5} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots\right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2!} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1} \cdot (2n)!} + \cdots$$

Число членів ряду, яке гарантує точність 0,001, визначаємо з нерівності:

$$\frac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1} \cdot (2n)!} < 10^{-3}.$$

Для $n = 2$ маємо, що

$$\frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 4!} = \frac{1}{576} > 10^{-3}.$$

Для $n = 3$ маємо, що

$$\frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 6!} = \frac{1}{115200} < 10^{-3}.$$

У цьому разі достатньо взяти перші два члени ряду:

$$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \approx \frac{1}{2 \cdot 2!} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 4!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{576} = 0{,}2482,$$

причому

$$\left| \int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \approx -0{,}2482 \right| < 10^{-3}$$

✧✧✧

31. Розкласти функцію $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$ в ряд Фур'є:

Розв'язання.

Встановлюємо період функції. Якщо за умовою немає додаткових вимог про розклад в ряд Фур'є за синусами, або за

косинусами, то вважаємо, що період функції, яку будемо розкладати в ряд Фур'є, дорівнює довжині інтервалу, на якому функція задана за умовою. В нашому випадку період дорівнює 2π (рис.12.5.1).

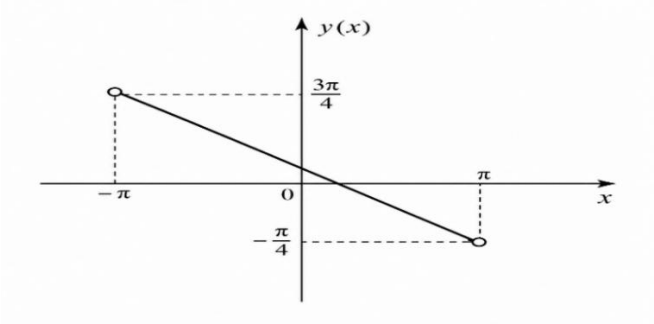


Рис. 12.5.1

Періодично продовжуємо функцію на всю числову вісь, побудуємо графік функції $y(x)$ (рис.12.5.2):

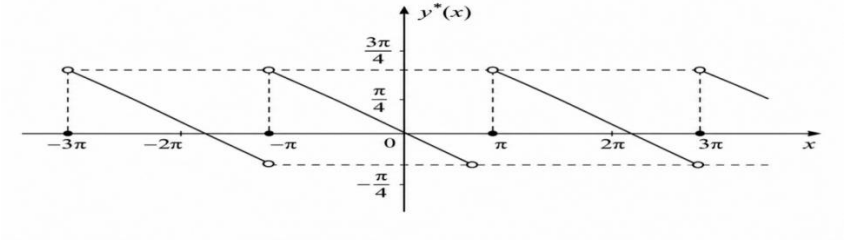


Рис. 12.5.2

$$y^*(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\text{, якщо } x\epsilon\ (-\pi, \pi);\ y^*(x + 2\pi k) = y^*(x);$$

$$y^*(x) = \frac{\pi}{4}\text{, якщо } x = \pi + 2k\pi;\ k\epsilon Z.$$

З'ясовуємо, чи буде функція $y^*(x)$ парною, чи непарною, або ні парною, ані непарною. В нашому випадку функція $y^*(x)$ не є парною і не є непарною.

Записуємо ряд Фур'є функції $y^*(x)$ та формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є:

$$y^*(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos kx + b_k \sin kx,$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)coskxdx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)sinkxdx,$$

Обчислюємо коефіцієнти Фур'є та записуємо відповідь:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos kx\,dx = \left|\begin{matrix} u = \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} \Rightarrow du = -\frac{1}{2}dx \\ dv = cos\,kx\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{k}sinkxdx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)sinkx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2k}\int_{-\pi}^{\pi}sinkxdx = 0.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)sin\,kx\,dx = \left|\begin{matrix} u = \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} \Rightarrow du = -\frac{1}{2}dx \\ dv = sin\,kx\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{k}coskxdx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)coskx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2k}\int_{-\pi}^{\pi}coskxdx = \frac{(-1)^k}{k}.$$

Таким чином,

$$y^*(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx \text{ при всіх } x \in (-\infty, +\infty),$$

$$y(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx \text{ лише при } x \in (-\pi, \pi).$$



32. Розкласти функцію $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в інтервалі $(0, \pi)$ в ряд Фур'є:

а) за синусами;

б) за косинусами.

Розв'язання.

а) Оскільки в ряд Фур'є за синусами можна розкласти лише непарну функцію, то задану в інтервалі $(0, \pi)$ функцію $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$

продовжимо непарним чином на інтервал $(-\pi, 0)$і побудуємо функцію (рис.12.5.3).

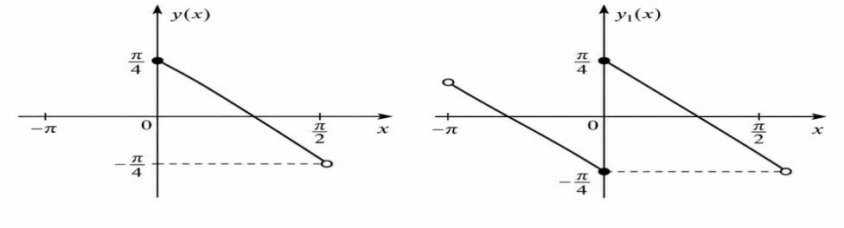


Рис. 12.5.3

$$y_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, \text{якщо } 0 < x < \pi\ ; \\ -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}, \text{якщо } -\pi < x < 0; \\ 0, \quad \text{якщо } x = 0\ . \end{cases}$$

Ця функція є непарною та визначена на інтервалі $(-\pi, \pi)$. Продовжимо її на всю числову вісь з періодом $T = 2\pi$, і побудуємо графіки функції $y^*(x)$(рис. 12.5.4):

$$y^*(x) = y_1(x), \text{якщо } x\epsilon\ (-\pi, \pi);\ y^*(x + 2\pi k) = y^*(x);$$
$$y^*(x) = 0, \text{якщо } x = \pi k, k\epsilon Z.$$

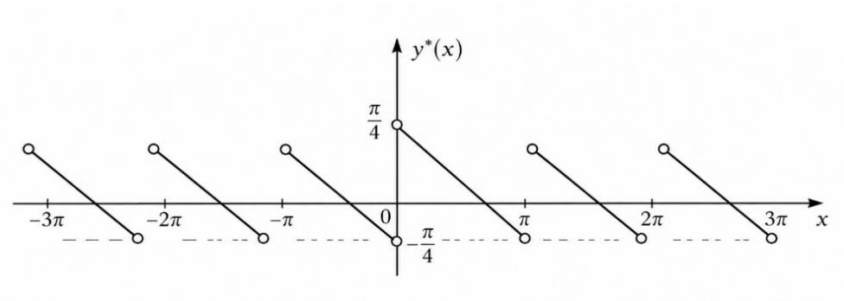


Рис. 12.5.4

Оскільки

$$y^*(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

де

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\,(x) sinkxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) sin\,kx\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} \Rightarrow du = -\frac{1}{2}dx \\ dv = sin\,kx\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{k}coskxdx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) coskx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2k}\int_0^{\pi} coskxdx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2k}((-1)^k + 1) = \begin{cases} 0, \text{при } k = 2n-1 \\ \frac{2}{2n}, \text{при } k = 2n; n \in N \end{cases}.$$

то

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n} \text{ при всіх } x \in (-\infty, +\infty),$$

а

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n} \text{ лише при } x \in (0, \pi).$$

б) Оскільки в ряд Фур'є за косинусами можна розкласти лише парну функцію, то задану за умовою в інтервалі $(0, \pi)$, продовжимо парним чином на інтервал $(-\pi, \pi)$ і побудуємо функцію (рис 12.5.5)

$$y_1(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, \text{якщо } 0 \le x \le \pi\,; \\ -\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}, \text{якщо } -\pi \le x \le 0. \end{cases}$$

Ця функція є парною та визначена на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Продовжимо її на всю числову вісь з періодом $T = 2\pi$ і побудуємо графік функції $y^*(x)$ (рис 12.5.5):

$y^*(x) = y_1(x)$, якщо $x\epsilon\ [-\pi, \pi]$; $\quad * x + 2\pi k = y*(x), = \pi k, k\epsilon Z$

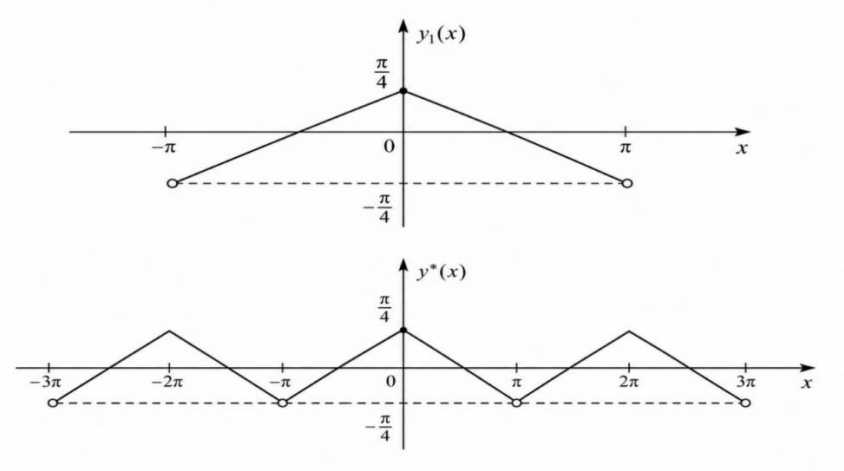


Рис. 12.5.5

Оскільки

$$y^*(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\,(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 0;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\,(x)coskxdx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos kx\,dx = \left|\begin{matrix} u = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \Rightarrow du = -\frac{1}{2}dx \\ dv = cos\,kx\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{k}sinkxdx \end{matrix}\right|$$

$$= -\frac{1}{k^2\pi}\cos kx|_0^{\pi} = -\frac{1}{k^2\pi}((-1)^k - 1)$$

$$= \begin{cases} 0, \text{при } k = 2n \\ \dfrac{2}{(2n-1)^2\pi}, \text{при } k = 2n-1; n \in N \end{cases}.$$

то

$$y^*(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \text{ при всіх } x \in (-\infty, +\infty),$$

а

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \text{ лише при } x \in (0, \pi).$$

12.6. Контрольні запитання

1. Що називається числовим рядом?
2. Що називається загальним членом числового ряду?
3. Що називається частинною сумою ряду?
4. Який числовий ряд називається збіжним?
5. Який числовий ряд називається розбіжним?
6. Що називається сумою числового ряду?
7. Що таке залишок ряду?
8. Сформулюйте основні властивості збіжних числових рядів.
9. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності числового ряду.
10. Чому необхідна ознака збіжності не є достатньою?
11. Сформулюйте критерій Коші збіжності числового ряду.
12. Який ряд називається геометричним?
13. За якої умови геометричний ряд є збіжним?
14. Який ряд називається гармонічним?
15. Чи є гармонічний ряд збіжним?
16. Які ряди називаються рядами з додатними членами?
17. Сформулюйте ознаку порівняння для рядів з додатними членами.
18. Сформулюйте граничну ознаку порівняння.
19. Сформулюйте ознаку Д'Аламбера.
20. Сформулюйте радикальну ознаку Коші.
21. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші.
22. Який ряд називається узагальненим гармонічним рядом?
23. За яких значень параметра узагальнений гармонічний ряд є збіжним?
24. Який ряд називається знакозмінним?
25. Який ряд називається абсолютно збіжним?
26. Який ряд називається умовно збіжним?
27. Сформулюйте теорему Лейбніца.

28. Який ряд називається рядом Лейбніца?
29. Що називається функціональним рядом?
30. Що називається областю збіжності функціонального ряду?
31. Що називається областю абсолютної збіжності функціонального ряду?
32. Що називається рівномірною збіжністю функціонального ряду?
33. Сформулюйте критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду.
34. Сформулюйте ознаку Вейєрштрасса рівномірної збіжності.
35. Які властивості мають рівномірно збіжні функціональні ряди?
36. Що називається степеневим рядом?
37. Що називається радіусом збіжності степеневого ряду?
38. Що називається інтервалом збіжності степеневого ряду?
39. Сформулюйте теорему Абеля.
40. Як знаходять радіус збіжності степеневого ряду?
41. Що називається рядом Тейлора?
42. Що називається рядом Маклорена?
43. Які умови розкладу функції в ряд Тейлора?
44. Наведіть розклади основних елементарних функцій у ряд Маклорена.
45. Для чого застосовують степеневі ряди?
46. Що називається тригонометричним рядом?
47. Що називається рядом Фур'є функції?
48. Що називають коефіцієнтами Фур'є?
49. Сформулюйте теорему Діріхле для рядів Фур'є.
50. Як записується ряд Фур'є для парної та непарної функцій?

12.7. Завдання для самостійного виконання

Написати найпростішу формулу n-го члена ряду.

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$.

2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$.

3. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\cdots$.

4. $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{8}+\frac{10}{11}+\cdots$.

5. $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{5}{10}+\frac{7}{17}+\cdots$.

6. $\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^4}+\frac{6}{3^6}+\frac{8}{3^8}+\cdots$.

7. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot5\cdot8}+\cdots$.

8. $\frac{1}{1\cdot2^2}+\frac{2}{3\cdot2^3}+\frac{4}{5\cdot2^4}+\frac{4}{7\cdot2^4}+\cdots$.

9. $\frac{1\cdot3}{2\cdot3}+\frac{3\cdot5}{4\cdot7}+\frac{5\cdot7}{6\cdot11}+\cdots$.

10. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot3}}+\frac{3}{\sqrt{2\cdot3^2}}+\frac{5}{\sqrt{3\cdot3^3}}+\frac{9}{\sqrt{4\cdot3^4}}+\cdots$.

Написати кілька перших членів ряду.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(n+1)!}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n^2+1}\right)^n$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-4}{18n+7}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$.

Користуючись означенням збіжності числового ряду, встановити, які ряди збігаються, і знайти їхні суми.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^{n-1}}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} atctg\,\frac{2}{n^2}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} ln\frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} atctg\,\frac{1}{n^2+n+1}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} ln\frac{n+2}{n+3}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} ln\frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$.

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n^2+1}}{4n^2-1}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^{n/2}$.

36. $\sum_{n=1}^{\infty} ln\frac{2n^2+n+1}{5n^2+3n+2}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{n^2}$.

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi}sin\frac{\pi}{n}$.

Використовуючи ознаку порівняння, дослідити на збіжність.

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^2+4}$.

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^3+2}$.

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(3n-2)^2}$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{13n-12}$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\, n}{n\sqrt{n}}$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{\pi}{n^2}$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{2^n}$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} arsin\frac{2}{n+3}$.

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$.

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3-2}$.

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(n^2+1)}{n^3}$.

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$.

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+2}{n\sqrt{n}+3}$.

Використовуючи ознаку Д'Аламбера, дослідити на збіжність.

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+2)2^n}$.

56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}$.

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3^n}$.

58. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)tg\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-4}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$.

60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^{n+1}}$.

61. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{5^n\cdot n!}$.

62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n!)^2}$.

63. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n)!}$.

64. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}sin\frac{\pi}{n!}$.

65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{1\cdot 8\cdot 27\cdot\ldots\cdot n^3}$.

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2}$.

Використовуючи ознаку Коші, дослідити на збіжність.

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-4}\right)^n$.

68. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+4}\right)^n$.

69. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3n^n}$.

70. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

71. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{ln^n(n+1)}$.

72. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^{n+1}}$.

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{5^n}$.

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2}$.

75. $\sum_{n=1}^{\infty} ln^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$.

Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність.

77. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n+5}$.

78. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$.

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^4+4}$.

80. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2n^2+3}$.

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\, ln^2(n+1)}$.

82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, ln^2\, n}$.

84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\, ln(n+1)}$.

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n})}$.

86. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot 3^{\frac{1}{n}}$.

Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

87. $a_n = \frac{n+3}{n^3-2}$.

88. $a_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

89. $a_n = \frac{1}{(2n+1)^2-1}$.

90. $a_n = \frac{3^n}{(2n)!}$.

91. $a_n = \frac{n^3}{e^n}$.

92. $a_n = \frac{1}{(n+2)\, ln^2(n+2)}$.

93. $a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$.

94. $a_n = \frac{n^2}{(3n)!}$.

95. $a_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

96. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$.

97. $a_n = \frac{sin\, n\alpha}{n\sqrt{n}}$.

98. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$.

99. $a_n = \frac{1}{ln^n(n+1)}$.

100. $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

101. $a_n = \frac{1}{n^2+n}$.

102. $a_n = \left(\frac{2n+1}{2+n}\right)^n$.

103. $a_n = \frac{cos\, n\alpha}{n^2}$.

104. $a_n = \frac{n}{(n+1)^4}$.

105. $a_n = \frac{1}{2^n(3n-1)}$=

106. $a_n = \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^n$.

107. $a_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

108. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

109. $a_n = \frac{2}{3+n^2}$.

110. $a_n = \frac{n}{(n+1)^3}$.

Встановити, які ряди збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються.

111. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

112. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$.

113. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1}$.

114. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{2n+1}}$.

115. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

116. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$.

117. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} sin\frac{\pi}{n}$.

118. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} ln(n-1)}{\sqrt{n}}$.

119. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n ln^2 n}$.

120. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n arctg^n \frac{1}{n}$.

121 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{3n}{4n+1}\right)^n$.

122. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} arctg\, n$.

123. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2}{n^n}$.

124. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

125. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

126. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+1}}$.

127. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{3n^2+4}$.

128. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

129. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{4^{n+1}}$.

130. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n n!}{(2n+2)!}$.

131. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$.

132. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(3n+1)^n}$.

Обчислити суми рядів з точністю ε. Вкажіть найменшу достатню кількість членів ряду:

133. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n^3}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

134. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n^2+1)\cdot 3^n}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

135. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \cdot n!}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

136. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Знайти радіус та область збіжності степеневих рядів.

137. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$.

138. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$.

139. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n^2+1)} x^n$.

140. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} x^n$.

141. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n$.

142. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} x^n$.

143. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+6}\right)^n x^n$.

144. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} x^n$.

145. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$.

146. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} x^n$.

147. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} x^n$.

148. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^{n+1}} x^n$.

149. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n(n+1)} x^n$.

150. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt[n]{n}} x^n$.

151. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-3)} x^n$.

152. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} x^n$.

153. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n$.

154. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} x^n$.

155. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n} x^n$.

156. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} x^n$.

157. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n(n-2)} x^n$.

158. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$.

159. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(4n-1)^2} (x-2)^n$.

160. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{3n+2} (x+3)^n$.

161. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{3^{n-1}} (x-5)^n$.

162. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{4n-3} (x+1)^n$.

163. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 4^n}{5n-1} (x-3)^n$.

164. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n-4}}{3n^2-n+2} (x+4)^n$.

165. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)^2}{n^5 \cdot 2^n} (x+4)^n$.

166. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+3} \cdot 4^n}{n^2+5} (x-4)^n$.

Знайти область збіжності функціонального ряду.

167. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

168. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.

169. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x)^2}$.

170. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

171. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosnx}{n^2}$.

172. $\sum_{n=1}^{\infty} ln^n x$.

173. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{n(n+1)}$.

174. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \, tg \frac{x}{2}$.

175. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x+2)^n}$.

176. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

177. $\sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n$.

178. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos2x}{3^n}$.

179. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{7^n}$.

180. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n^2} x^{n^2}$.

181. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-3)^n}$.

182. $\sum_{n=1}^{\infty} ln^n(1+x^2)$.

183. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \, tg \frac{x}{3^n}$.

184. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3x-4)^n}{5^n}$.

Довести рівномірну збіжність функціонального ряду в зазначених проміжках.

185. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $(-\infty; +\infty)$.

186. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+x^2)}$, $(-\infty; +\infty)$.

187. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+cos^2 x}$, $(-\infty; +\infty)$.

188. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $(0; \infty)$.

189. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{5^n}$, $(-\infty; +\infty)$.

190. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosn^2x}{3n^2+1}$, $(-\infty; +\infty)$.

191. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{(2n)!}, (-\infty; +\infty)$.

192. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosnx}{(2n+1)!}, (-\infty; +\infty)$.

193. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{1+nx}}, (0; \infty)$.

194. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}\sqrt{1+(2n-1)x}}, (0; \infty)$.

195. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)}, (0; \infty)$.

Для заданого функціонального ряду побудувати мажорантний ряд. Довести рівномірну збіжність функціонального ряду на заданому відрізку.

196. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)^2 \ln(n+1)}, [3; 4]$.

197. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}, [-3; 0]$.

198. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}, [2; 4]$.

199. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi-x)\cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7+1}}, [0; \pi]$.

200. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)(x-2)^n, [1; 3]$.

201. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{5^n}\right)(x+2)^n, [-3; -1]$.

202. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n+2)\ln^3(3n+2)}, [0; 2]$.

203. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg\frac{1}{7^n}\right)(x+1)^n, [-2; 0]$.

Знайти суми рядів.

204. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n(n+1)}$.

205. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

206. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 4^{2n-1}}$.

207. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$.

208. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}$.

209. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\cdot 5^n}$.

210. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

211. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n\cdot(n-1)\cdot 2^n}$.

212. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{2^{n+2}}$.

213. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

214. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 3^{n-1}}$.

215. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$.

216. $\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)x^{3n}$.

217. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n+1}$.

218. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})x^n$.

219. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{2^n-1}$.

Розвинути в ряд Тейлора функції.

220. $f(x,y) = \ln x$ за степенями $(x-1)$.

221. $f(x,y) = \frac{1}{x^2}$ за степенями $(x+1)$.

222. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+4x+7}$ за степенями $(x+2)$.

233. $f(x,y) = e^x$ за степенями $(x+2)$.

224. $f(x,y) = cos^2 x$ за степенями $(x - \frac{\pi}{4})$.

225. $f(x,y) = \frac{1}{x}$ за степенями $(x-1)$.

226. $f(x,y) = \frac{1}{4+3x}$ за степенями $(x+2)$.

227. $f(x,y) = \frac{1}{5+2x}$ за степенями $(x-3)$.

228. $f(x,y) = \ln(5x+3)$ за степенями $(x-1)$.

229. $f(x,y) = \sqrt{x^3}$ за степенями $(x-1)$.

230. $f(x,y) = \sqrt[3]{x}$ за степенями $(x-1)$.

Розвинути в ряд Маклорена функції.

231. $f(x,y) = \cos 3x$.

232. $f(x,y) = \cos\frac{2x^2}{3}$.

233. $f(x,y) = x^2 arctgx$.

234. $f(x,y) = 2^x$.

235. $f(x,y) = 3^x$.

236. $f(x,y) = e^{5x}$.

237. $f(x,y) = \frac{1}{1+x}$.

238. $f(x,y) = x \cdot cos\, x^2$.

239. $f(x,y) = \ln(3x+2)$.

240. $f(x,y) = e^{-x^2}$.

241. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$.

242. $f(x,y) = x \cdot \sin\sqrt{x}$.

243. $f(x,y) = \frac{\sin 2x}{x}$.

244. $f(x,y) = x^2 \cdot cos\, x$.

245. $f(x,y) = cos\, 5x$.

246. $f(x,y) = e^{4x}$.

247. $f(x,y) = \frac{1}{x+6}$.

248. $f(x,y) = \frac{x^2}{1+x}$.

249. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

250. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

Обчислити наближено з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$ вказані величини, розклавши в степеневий ряд відповідні функції.

251. $\sqrt{145}$.

252. $\sqrt[3]{80}$.

253. $\sqrt[3]{e}$.

254. $\sqrt[4]{90}$.

255. $\ln 7$.

256. $\frac{1}{\sqrt{20}}$.

257. $arctg\frac{1}{2}$.

258. $\ln 3$.

259. $\ln 10$.

260. $sin\frac{\pi}{2}$.

261. $\sin 1^0$.

262. $\cos\frac{\pi}{10}$.

263. $\sqrt{e}$.

264. $\frac{1}{e}$.

265. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

266. $cos 3^0$.

267. $\lg 3$.

268. e^2.

269. $arctg\frac{1}{3}$.

270. $arcsin\frac{1}{3}$.

271. $arctg\frac{\pi}{10}$.

Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Фур'є на заданому інтервалі.

272. $f(x) = x - 3, \quad (-\pi;\ \pi).$ **273.** $f(x) = \frac{x}{2} + 1, \quad (-\pi;\ \pi).$

274. $f(x) = 3x + 1, \quad (-\pi;\ \pi).$ **275.** $f(x) = 2x + 4, \quad (-\pi;\ \pi).$

276. $f(x) = 3x - 4, \quad (-\pi;\ \pi).$ **277.** $f(x) = \frac{x}{2} - 1, \quad (-\pi;\ \pi).$

278. $f(x) = \frac{x}{2} + 4, \quad (-\pi;\ \pi).$ **279.** $f(x) = x + 2, \quad (-\pi;\ \pi).$

Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Фур'є за синусами на заданому інтервалі.

280. $f(x) = 2 - 3x, \quad (0;\ 2).$ **281.** $f(x) = \frac{x}{3} + 3, \quad (0;\ 3).$

282. $f(x) = 2 - \frac{x}{2}, \quad (0;\ 4).$ **283.** $f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad (0;\ 4).$

284. $f(x) = 3 - x, \quad (0;\ 2).$ **285.** $f(x) = 3x - 2, \quad (0;\ 2).$

286. $f(x) = \pi - 2x, \quad (0;\ \pi).$ **287.** $f(x) = 3x + 2, \quad (0;\ 1).$

Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Фур'є за косинусами на заданому інтервалі.

288. $f(x) = 2x + \pi, \quad (0;\ \pi).$ **289.** $f(x) = \pi - x, \quad (0;\ \pi).$

290. $f(x) = |x|, \quad (-2;\ 2).$ **291.** $f(x) = x - \pi, \quad (0;\ 2\pi).$

292. $f(x) = \frac{\pi}{4} - x, \quad (0;\ \pi).$ **293.** $f(x) = 2 - 2x, \quad (0;\ 2).$

294. $f(x) = |x| + 2, \quad (-1;\ 1).$ **295.** $f(x) = \frac{\pi}{2} - 2x, \quad (0; \frac{\pi}{2}).$

296. $f(x) = 1 - 2|x|, \quad (-2;\ 2).$ **297.** $f(x) = \frac{2\pi}{3} - 2x, \quad (0; \frac{\pi}{2}).$

Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Фур'є

298. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-2\pi; 0), \\ x - \pi, & x \in (0; 2\pi]. \end{cases}$ **299.** $f(x) = \begin{cases} 2x + \pi, & x \in (-\pi; 0), \\ -1, & x \in (0; \pi]. \end{cases}$

300. $f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-\pi; 0), \\ 2x - \pi, & x \in (0; \pi]. \end{cases}$ **301.** $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \in (-2; 0), \\ -2, & x \in (0; 2]. \end{cases}$

302. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \in (-2; 0), \\ 1, & x \in (0; 2\pi]. \end{cases}$ **303.** $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-3; -1), \\ 2x, & x \in (-1; 3]. \end{cases}$

304. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \in (-2; -1], \\ -2, & x \in (-1; 2]. \end{cases}$ **305.** $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & x \in (-\pi; 0), \\ 2, & x \in (0; \pi]. \end{cases}$

306. $f(x) = \begin{cases} 2x + \pi, & x \in (-\pi; 0), \\ 3, & x \in (0; \pi]. \end{cases}$ **307.** $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi; 0), \\ 2x - \frac{\pi}{2}, & x \in (0; \pi]. \end{cases}$

Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Фур'є

308. Розвинути функцію $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Фур'є за синусами на $(0;\ \pi)$.

309. Розвинути функцію $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0;\ \pi)$.

310. Розвинути функцію $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Фур'є на інтервалі $(0;\ \pi)$.

311. Розвинути функцію $f(x) = \sin 2x$ в ряд Фур'є за синусами на $(0;\ \pi)$.

312. Розвинути функцію $f(x) = \sin 2x$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0;\ \pi)$.

313. Розвинути функцію $f(x) = \sin 2x$ в ряд Фур'є на інтервалі $(0;\ \pi)$.

314. Розвинути функцію $f(x) = \begin{cases} \cos 2x,\ x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right), \\ 2,\ x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right). \end{cases}$ в ряд Фур'є за синусами на $(0;\ \pi)$.

315. Розвинути функцію $f(x) = \begin{cases} \sin 2x,\ x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right), \\ 1,\ x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right). \end{cases}$ в ряд Фур'є за косинусами на $(0;\ \pi)$.

316. Розвинути функцію $f(x) = \begin{cases} -\cos 2x,\ x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right), \\ 1,\ x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right). \end{cases}$ в ряд Фур'є за синусами на $(0;\ \pi)$.

317. Розвинути функцію $f(x) = \begin{cases} \cos 2x,\ x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right), \\ -1,\ x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right). \end{cases}$ в ряд Фур'є на інтервалі $(0;\ \pi)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аршава О. О., Харченко А. П., Щелкунова Л. І. Інтегральне числення функцій багатьох змінних : навч. посібник. Харків : ТОВ «Цифрова типографія», 2018. 137 с.
2. Білоус О. А., Кравченко Ю. А. Прикладні задачі з вищої математики : навч. посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 с.
3. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика : навч. посібник: у 2 ч. Ч. 1. Київ : КНЕУ, 2001. 546 с.
4. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика : навч. посібник: у 2 ч. Ч. 2. Київ : КНЕУ, 2002. 451 с.
5. Валєєв К. Г., Джалладова І. А., Лютий О. І. та ін. Вища математика : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. Вид. 2-ге, перероб. і допов. Київ : КНЕУ, 2002. 606 с.
6. Вища математика : навч. посібник / Т. І. Бубняк. 2-ге вид., стереотипне. Львів : Новий Світ-2000, 2026. 396 с.
7. Вища математика : навч. посібник / за ред. В. П. Лісовської. Київ : КНЕУ, 2024. 485 с. URL: https://drive.google.com/file/d/1bwf5XhO91W4zAecoy50XRMjvOs8tiLCe/view
8. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посібник : у 2 т. Т. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди / Л. В. Курпа та ін. ; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". Харків : НТУ «ХПІ», 2009. 432 с.
9. Вища математика. Практикум : навч. посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 409 с.
10. Вища математика : підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків, Ф. М. Мигович, В. М. Неміш, Б. С. Окрепкий, Г. П. Хома, М. Я. Шелестовська; за ред. М. І. Шинкарика. Тернопіль : Вид-во Карп'юка, 2003. 480 с.
11. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння : навч. посібник. Івано-Франківськ : Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2021. 357 с.
12. Диференціальні рівняння : навчальний посібник для інженерних спеціальностей : для студ. спеціальності 131 «Прикладна механіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. М. Копась. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 126 с.
13. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. П. Дубовик., І. І. Юрик. 4-те вид. Київ : Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
14. Дудкін М. Є. Вища математика : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями / М. Є. Дудкін,

О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 449 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/51064

15. Кагадій Т. С., Сушко Л. Ф., Щербина І. В., Онопрієнко О. Д., Шпорта А. Г. Диференціальні рівняння: теорія, приклади, розв'язання : навч. посібник. Дніпро : ДДАЕУ, 2022. 190 с.

16. Клочко В. І. Вища математика. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Тестові завдання : навч. посібник / В. І. Клочко, З. В. Бондаренко, С. А. Кирилащук. Вінниця : ВНТУ, 2012. 84 с.

17. Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика : навч. посібник. Львів : Магнолія-2006, 2024. 342 с.

18. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика : практикум. 2-ге вид. Київ : Центр навчальної літератури, 2023. 536 с.

19. Інтегральне числення функції багатьох змінних. Матеріали методичного забезпечення поглибленого вивчення розділу студентами технічних спеціальностей / упоряд.: Т. С. Кагадій, Л. І. Шелест. Дніпро : НГУ, 2018. 62 с.

20. Лиман Ф. М., Власенко В. Ф., Петренко С. В. та ін. Вища математика : навч. посібник : у 2 ч. / за заг. ред. Ф. М. Лимана. Суми : ВТД «Університетська книга», 2005. 614 с.

21. Лозовий Б. Л., Пушак Я. С., Шабат О. Є. Практикум з вищої математики : навч. посібник. Львів : Магнолія-2026, 2016. 285 с.

22. Лютий О. І., Макаренко О. І. Збірник задач з вищої математики : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2003. 305 с.

23. Математичний аналіз функцій дійсної змінної : навч. посібник / Х. Т. Дрогомирецька, П. І. Каленюк, М. І. Клапчук, Г. В. Понеділок. Львів : Вид-во Національного університету «Львівська політехніка», 2016. 592 с.

24. Огірко О. І., Галайко Н. В. Вища математика : навч. посібник. Львів : Львівський державний університет внутрішніх справ, 2025. Ч. 1. 376 с.

25. Скуратовський Р. Р. Вища математика з прикладами і задачами : підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с.

26. Тулученко Г. Я. Ряди : навч. посібник для студентів електротехнічних спеціальностей. Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2024. 220 с.

27. Хохлова Л. Г., Хома Н. Г. Практикум з диференціальних рівнянь : навч. посібник. Тернопіль : ТНПУ імені В.Гнатюка, 2023. 71 с.

28. Хом'юк І. В., Хом'юк В. В. Вища математика. Ч. 3. Функції багатьох змінних : практикум. Вінниця : ВНТУ, 2020. 70 с.

29. Числові та функціональні ряди. Ряди Фур'є : метод. вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання / уклад.: М. І. Чернєй, Г. К. Новикова, Н. Л. Денисенко. Київ : НТУУ «КПІ», 2016. 62 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсолютно збіжний ряд 299, 301
Визначник Вронського (вронскіан) 231, 232
Визначник Якобі (якобіан) 76, 89
Внутрішній інтеграл 73, 87
Внутрішня точка множини 10
Відкрита множина 10
Відокремлення змінних 160
Властивості криволінійних інтегралів 95, 102
Властивості неперервних функцій 17
Властивості поверхневих інтегралів першого роду 95, 108
Властивості подвійного інтегралу 71
Властивості потрійного інтегралу 84
Гармонічний ряд 293, 297
Гладка крива 94
Градієнт функції 29
Границя функції багатьох змінних 14, 15
Графік функції багатьох змінних 11
Геометричний зміст подвійного інтеграла 70
Геометричний зміст частинних похідних 18
Геометричний зміст якобіана 77
Гранична ознака порівняння 295
Диференціал n-го порядку 25
Диференційовна функція багатьох змінних 20
Дотична площина 26
Диференціальне рівняння Бернуллі 168
Диференціальне рівняння вищих порядків 152, 225
Диференціальне рівняння з відокремленими змінними 160
Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними 159
Диференціальне рівняння Клеро 178
Диференціальне рівняння Лагранжа 178
Диференціальне рівняння першого порядку 153
Диференціальне рівняння першого порядку, нерозв'язне відносно похідної 174
Диференціальне рівняння у повних диференціалах 170
Диференціальне рівняння, що зводиться до однорідного 162
Диференціальне рівняння, що зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними 160
Дійсні (кратні) корені характеристичного рівняння 235, 236
Дійсні різні (прості) корені характеристичного рівняння 234, 236
Достатня ознака збіжності 294
Другий диференціал функції багатьох змінних 25
Двократний інтеграл 73
Дотична до поверхні 26
Електричний заряд 94
Загальний інтеграл диференціального рівняння 157, 226

Загальний розв'язок диференціального рівняння 157, 225
Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку 232
Загальний член ряду 289
Задача Коші 154, 226
Залишок ряду 290, 302
Збіжний ряд 290
Звичайне диференціальне рівняння 153
Зв'язна множина 10
Зв'язок між криволінійними інтегралами 1-го і 2-го родів 103
Знакозмінний ряд 299
Зовнішній інтеграл 73
Інтеграл диференціального рівняння 157, 226
Інтегральна крива 155, 226
Інтегральна ознака Коші 296, 298
Інтегральна сума 69, 83, 112
Інтегрувальний множник диференціального рівняння 172
Інтегрування диференціального рівняння 153
Інтервал збіжності степеневого ряду 305
Квадратична форма 32
Криволінійний інтеграл 1-го роду 95
Криволінійний інтеграл 2-го роду 101
Критичні (стаціонарні) точки функції багатьох змінних 31
Коефіцієнти рівняння 154
Коефіцієнти степеневого ряду 305
Коефіцієнти тригонометричного ряду 310
Коефіцієнти Фур'є 311
Комплексно-спряжені корені характеристичного рівняння 235, 236
Координати центра ваги пластини 82
Координати центра ваги поверхні 110
Критерій Больцано–Коші 292
Критерій Коші 304
Кусково-гладка крива 94
Кусково-гладка функція 312
Лінійне диференціальне рівняння першого порядку 164
Лінійне диференціальне рівняння n-го порядку 230
Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 164
Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку 230
Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами 237
Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду 240
Лінійне однорідне диференціальне рівняння 164
Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами 234

Лінійне однорідне
диференціальне рівняння
n-го порядку 230
Лінійне однорідне
диференціальне рівняння
n-го порядку
зі сталими коефіцієнтами 233
Лінійно залежні функції 231, 232,
Лінійно незалежні функції 231, 232
Лінія рівня 14
Локальний максимум функції
багатьох змінних 30, 33
Локальний мінімум максимум
функції багатьох змінних 30, 33
Мажорантний ряд 303
Маса кривої 98
Маса пластини 82
Матриця квадратичної форми 32
Метод Бернуллі 165, 169
Метод варіації
довільної сталої 166, 169
Метод введення параметра 177
Метод Лагранжа 166
Метод невизначених
коефіцієнтів 240
Метод підбору
частинного розв'язку 240
Механічний зміст
криволінійного інтеграла 101
Механічний зміст
подвійного інтеграла 70
Механічний зміст
потрійного інтеграла 84
Мішані похідні функції
багатьох змінних 24
Множники Лагранжа 35
Множина зв'язна 10
Множина значення функції
багатьох змінних 11
Множина обмежена 11
Моменти інерції дуги кривої 99
Моменти інерції поверхні 110
Момент інерції пластини відносно
початку координат 82, 83
Моменти інерції пластини
відносно осей 82, 83
Неабсолютно збіжний ряд 299
Необхідна ознака збіжності
числового ряду 291
Неявне диференціальне
рівняння 174
Неперервна функція 17
Неявне диференціальне
рівняння першого порядку 174
Нормальна форма
диференціального рівняння 153
Нормальне диференціальне
рівняння 153
Нормаль до поверхні 27
Обвідна сім'ї
інтегральних кривих 158
Область визначення функції
багатьох змінних 11
Область збіжності ряду 301, 305
Область інтегрування 70
Область правильна
в напрямку осі 72
Область проста в напрямку осі 73
Об'єм тіла 81
Обчислення поверхневих
інтегралів другого роду 113
Однорідна функція 161
Однорідне диференціальне
рівняння 161
Ознака Вейєрштрасса 303
Ознака Д'Аламбера 295, 296, 297
Ознака порівняння 294, 295

Особливий розв'язок диференціального рівняння 158
Особливі точки диференціального рівняння 157
Площа поверхні 81
Площа плоскої фігури 80
Поверхня двостороння 111
Поверхня одностороння 111
Повні многочлени 240
Подвійний інтеграл 69
Подвійний інтеграл в полярних координатах 77
Поверхневий інтеграл 107
Повний приріст функції 17
Послідовність збіжна 14
Послідовність розбіжна 14
Потік вектора 113
Потрійний інтеграл 84
Потрійний інтеграл у сферичних координатах 91
Потрійний інтеграл у циліндричних координатах 90
Порядок диференціального рівняння 153
Початкова задача 154
Початкова умова 155
Початкові дані 155
Права частина спеціального вигляду 240
Правила диференціювання 19
Поверхня рівня 14
Повний приріст функції багатьох змінних 17
Початкова точка кривої 99
Похідна за напрямом 27, 28
Радикальна ознака Коші 296, 298, 301
Радіус збіжності ряду 305, 306
Рівномірно збіжний ряд 302
Рівняння у частинних похідних 153
Розбіжний ряд 290, 291
Розв'язок диференціального рівняння 153
Розв'язок диференціального рівняння у неявному вигляді 154
Розв'язок диференціального рівняння у параметричній формі 154
Розв'язок диференціального рівняння у явному вигляді 154
Розв'язок диференціального рівняння n-го порядку 225
Ряд геометричної прогресії 292
Ряд Діріхле 297
Ряд з почерговою зміною знаків 300
Ряд Лейбніца 300
Ряд Маклорена 307, 308
Ряд Тейлора 306
Ряд Фур'є 311
Ряд Фур'є для $2l$-періодичної функції 313
Ряд Фур'є для парних і непарних функцій 313
Середнє гармонічне двох чисел 293
Середнє значення функції 96
Способи задання функції багатьох змінних 12
Статичні моменти пластини 82
Статичні моменти поверхні 110
Статичні моменти дуги кривої 98
Степеневий ряд 305
Сума ряду 290
Сферичні координатами точки 91
Теорема Абеля 305
Теорема Діріхле 312

Теорема Коші 18, 156
Теорема Лейбніца 300
Теорема Пеано 155
Теорема Фубіні 74
Теорема про накладання розв'язків 244
Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 237
Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 231
Теорема Римана 300
Точка збіжності ряду 301
Точка координатного простору 9
Точки локального екстремуму 30
Точка розбіжності ряду 301
Тригонометричний ряд 309
Узагальнений гармонічний ряд 297
Умови Діріхле 312
Умовно збіжний ряд 299
Умовний екстремум функції багатьох змінних 34
Фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду 106, 109
Формула заміни змінних у подвійному інтегралі 77
Формула заміни змінних у потрійному інтегралі 89
Формули переходу від декартових до сферичних координат 91
Формули переходу від декартових до циліндричних координат 90
Формула Гріна 105
Формула Маклорена 30
Формула Тейлора 30
Фундаментальна система розв'язків рівняння 231
Функціональний ряд 300
Функція двох змінних 11
Функція від n незалежних змінних 11
Характеристичне рівняння для лінійного однорідного рівняння 234
Циліндричні координатами точки 90
Частинна сума ряду 289
Частинний розв'язок диференціального рівняння 158, 226, 236
Частинні похідні другого порядку 24
Частинні похідна n-го порядку 25
Частинний розв'язок диференціального рівняння n-го порядку 226, 236
Частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння 234
Числовий ряд 289
Члени ряду 289
Явне диференціальне рівняння 153

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Ольга Огірко,
кандидат технічних наук, доцент
(розділи 8–9, підрозділи 12.4–12.7)

Наталія Галайко,
(розділи 10–11, підрозділи 12.1–12.3)

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина 2

Навчальний посібник

Редагування *Оксана Шмиговська*
Макетування *Марта Левкович*
Друк *Назарій Ганущак*

Підписано до друку 03.11.2026
Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Умовн.-друк. арк. 21,39.
Тираж 70. Зам. 51-26.

Львівський державний університет внутрішніх справ
вул. Городоцька, 26, Львів, 79007, Україна

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2541 від 26 червня 2006 р.